

УДК 532.59

О СУММИРОВАНИИ РЯДА ВАЙТИНГА В ЗАДАЧЕ ОБ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЕ

Е. А. Карабут

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Найден ряд точных решений уравнений Эйлера со свободной поверхностью в присутствии сил гравитации. Они получены путем суммирования рядов Вайтинга, применяемых в теории уединенных волн. Обнаружено, что левая половина построенных течений в некоторых случаях близка к левой половине уединенных волн.

Введение. В работе [1] для описания уединенной волны в жидкости конечной глубины предложен некоторый степенной ряд (ряд Вайтинга) и осуществлено его численное суммирование. В [2–4] показано, что задача точного суммирования этого ряда сводится к интегрированию специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщение ряда Вайтинга на случай периодических волн на воде предложено в [5–7]. Суммирование этих обобщений сводится к решению аналогичной системы уравнений. Ранее рассматривался простейший случай, когда эта система состоит из трех уравнений. В настоящей работе численно и аналитически изучен случай, когда количество уравнений больше трех.

В настоящей работе рассматривается задача о плоских стационарных течениях идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле сил тяжести. Течения потенциальны, происходят над ровным горизонтальным дном, поверхностное натяжение отсутствует. Считается, что на левой бесконечности жидкость движется слева направо с горизонтальной скоростью u_0 в слое глубины h_0 . К такому классу задач относится как задача об уединенной волне, так и течения, даваемые рядом Вайтинга [1] (далее их называем течениями Вайтинга).

Задача об уединенной волне состоит в нахождении свободной поверхности в форме локального возвышения, симметрично расположенного относительно вертикальной оси. Эта задача зависит от одного параметра, в качестве которого можно взять либо число Фруда ($Fr = u_0/\sqrt{gh_0} > 1$, где g — ускорение свободного падения), либо параметр Стокса θ ($0 \leq \theta < \pi/2$), определяемый из уравнения $\operatorname{tg} \theta/\theta = Fr^2$. Для малых амплитуд (или для малых θ) задача об уединенной волне изучена аналитически. Ряд Вайтинга предложен для исследования случая не малых амплитуд. Он представляет собой асимптотическое разложение в окрестности левой бесконечности. Этот ряд исследован численно в [1] для двух случаев: $\theta = \pi/3$ и $\pi/4$. Показано, что на его основе приближенно можно описывать уединенные волны вплоть до максимальной амплитуды. Примеры других типов рядов для уединенных волн можно найти в [8, 9].

В [2–4] доказано, что при $\theta = \pi t/n$, где t, n — целые числа, задача точного суммирования ряда Вайтинга равносильна решению специальной системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений. Обнаружилось, что ряды Вайтинга соответствуют не уединенным волнам, а некоторым другим течениям со свободной границей. Для $\theta = \pi/3$, когда система содержит три уравнения (минимальное количество), она легко интегрируется. Форма свободной поверхности и линии тока ранее построены только для этого

простейшего случая.

В данной работе изучены течения Вайтинга для других значений θ . Интерес к таким течениям обусловлен, во-первых, тем, что это точные решения уравнений гидродинамики, на свободной поверхности которых выполнено условие постоянства давления. Во-вторых, по смыслу своего построения левая половина течения Вайтинга должна быть близка к левой половине уединенной волны. Нельзя гарантировать отсутствие особых точек в потоке и однолиственности течения, можно гарантировать это только в левой половине течения. Поэтому, если «обрезать» течение Вайтинга, то, исследуя левую его половину, можно судить о поведении уединенной волны при изменении параметра θ . Например, изученное нами течение Вайтинга для $\theta = \pi/3$ имеет на свободной поверхности точку заострения с углом 120° . Слева от этой точки течение близко с высокой точностью к уединенной волне максимальной амплитуды. Естественно предположить, что и для $\theta < \pi/3$ также получим течения, левая половина которых близка к левой половине уединенной волны с амплитудой меньше максимальной. Это предположение проверяется в данной работе, и, по-видимому, оно справедливо только для $\theta \simeq \pi/3$.

Если в качестве граничного условия на свободной поверхности использовать интеграл Бернулли, то исходная краевая задача будет кубически-нелинейна. Соответственно кубически-нелинейной будет система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая течения Вайтинга. Известно, однако, что задача о волнах на воде квадратично-нелинейна [10]. Ниже, используя квадратично-нелинейное операторное уравнение Бабенко, получим квадратично-нелинейную систему уравнений, описывающую течения Вайтинга, а затем найдем один ее интеграл. Благодаря этому интегралу система проинтегрирована для $\theta = \pi/4$. Когда количество уравнений системы больше четырех, ее решение находилось численно.

1. Постановка задачи. Поместим начало декартовой системы координат на дне. Ось X пустим вдоль дна, ось Y — вертикально вверх. Необходимо найти $Y = Y_0(X)$ — уравнение свободной поверхности, удовлетворяющее условию $\lim_{|X| \rightarrow \infty} Y'_0(X) = h_0$.

Пусть Φ, Ψ — соответственно потенциал скорости и функция тока. В плоскости безразмерного комплексного потенциала $\chi = \varphi + i\psi = \theta(\Phi + i\Psi)/h_0 u_0$ жидкости соответствует полоса

$$-\infty < \varphi < \infty, \quad 0 < \psi < \theta. \quad (1.1)$$

Задача об уединенной волне будет решена, если найдем конформное отображение этой полосы на область течения. Представим это отображение в виде $Z = X + iY = (h_0/\theta)f(\chi)$, где $f(\chi) = \chi + W(\chi)$. Искомая функция $W(\chi) = A(\varphi, \psi) + iB(\varphi, \psi)$ определяется из решения краевой задачи

$$\left| \frac{d(W + \chi)}{d\chi} \right|^2 = \frac{1}{1 - 2\nu \operatorname{Im} W}, \quad \nu = \operatorname{ctg} \theta \quad (\psi = \theta, \quad \varphi < \varphi_0),$$

$$\operatorname{Im} W = 0 \quad (\psi = 0, \quad \varphi < \varphi_0), \quad (1.2)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \operatorname{Im} W = 0.$$

Здесь первое уравнение — это условие постоянства давления на свободной поверхности (интеграл Бернулли), второе — условие ровного дна. Решение такой краевой задачи не единственно, поскольку ничего не известно о поведении решения при $\varphi > \varphi_0$. Уединенная волна — одно из возможных решений, оно получается, если дополнительно выполнено условие

$$\varphi_0 = +\infty, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \operatorname{Im} W = 0. \quad (1.3)$$

Поиск решения (1.2) в виде ряда

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} \theta^{2j} W^{(j)}(\chi) \quad (1.4)$$

приводит к так называемому разложению мелкой воды. Впервые в несколько иной постановке оно появилось в [11]. Все $W_{\chi}^{(j)}$ — полиномы от $\operatorname{ch}^{-2}(\chi/2)$. Если введем переменную $\zeta = e^{\chi}$, то обнаружим, что функции $W^{(j)}$ являются аналитическими от ζ в окрестности точки $\zeta = 0$. Поэтому естественно переразложить (1.4) и пытаться искать решение краевой задачи (1.2) в виде степенного ряда

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\theta) \zeta^j, \quad \operatorname{Im} E_j = 0. \quad (1.5)$$

Это ряд Вайтинга. Если его подставить в граничное условие (1.2) и приравнять члены при одинаковых степенях e^{φ} , то получим рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов E_j

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1^2(-3\nu^2/4 + 1/4), \\ E_3 &= E_1^3(9\nu^4/16 - 7\nu^2/8 + 1/16), \\ &\dots \\ E_j(\theta) &= E_1^j \tilde{E}_j(\nu) \quad (j \geq 2), \\ &\dots \end{aligned}$$

Первый коэффициент остается неопределенным. Однако его изменение приводит лишь к сдвигу решения вдоль полосы, поэтому E_1 может быть любым положительным числом. Преимущество ряда Вайтинга (1.5) перед рядом (1.4) в том, что $E_j(\theta)$ находятся проще, чем $W^{(j)}(\chi)$. В [1] Вайтинг численно нашел более 200 членов ряда (1.5).

Неизвестно, описывают ли оба ряда одно и то же течение, однако теперь ясно, что эти ряды уединенную волну не описывают. Причина в том, что точное решение задачи (1.2), (1.3), т. е. функция $W(\zeta)$, не является аналитической при $\zeta = 0$. Парадокс состоит в том, что ряды (1.4), (1.5) интенсивно применялись для вычислений параметров уединенных волн. Особенно это касается ряда (1.4), который использовался во многих статьях. Рекорд здесь принадлежит работе [12], где разложение найдено до θ^{54} . В данном случае речь идет о приближенных вычислениях, хотя и с большой точностью.

При $\theta = \pi t/n$ функции

$$P_j(\chi) = W(\zeta \omega^{2j-2}), \quad \omega = e^{i\theta}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

как следует из [2–4], удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{dP_{j+1}}{d\chi} + 1\right) \left(\frac{dP_j}{d\chi} + 1\right) = \frac{1}{f_j}, \quad P_{n+1} \equiv P_1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Здесь $f_j = 1 + i\nu(P_{j+1} - P_j)$. Следовательно, для решения краевой задачи (1.2) в форме ряда Вайтинга (1.5) достаточно проинтегрировать систему (1.7) и положить затем $W = P_1$.

2. Уравнение Бабенко. Пусть в полосе (1.1) задана произвольная аналитическая функция $Q(\chi)$, удовлетворяющая граничным условиям:

$$\operatorname{Im} Q = q(\varphi) \quad (\psi = \theta), \quad \operatorname{Im} Q = 0 \quad (\psi = 0).$$

Обозначим через \mathbf{H} , \mathbf{N} соответственно операторы восстановления реальной части и нормальной производной мнимой части на верхней границе полосы, т. е.

$$\mathbf{H}q(x) = \operatorname{Re} Q \Big|_{\psi=\theta}, \quad \mathbf{N}q(x) = \frac{\partial}{\partial \psi} \operatorname{Im} Q \Big|_{\psi=\theta}.$$

Справедливо соотношение Коши — Римана

$$\mathbf{H}q_\varphi = \mathbf{N}q. \tag{2.1}$$

Условие постоянства давления $1/|df/d\chi|^2 = 1 - 2\nu \operatorname{Im}W$ ($\psi = \theta$) с использованием аналитической в полосе (1.1) функции $G = 1/(df/d\chi) - 1$ может быть переписано в виде $G = \overline{(df/d\chi)}(1 - 2\nu \operatorname{Im}W) - 1$. Учитывая, что $df/d\chi = 1 + \mathbf{N}B + iB_\varphi$, получим $G = \mathbf{N}B - 2\nu B(1 + \mathbf{N}B) - i(B - \nu B^2)_\varphi$. Реальная и мнимая части функции G связаны оператором \mathbf{H} . Следовательно, $\mathbf{H}(B - \nu B^2)_\varphi + \mathbf{N}B - 2\nu B(1 + \mathbf{N}B) = 0$. Воспользовавшись соотношениями Коши — Римана (2.1), получим уравнение Бабенко [10]

$$B + (B - 1/\nu)\mathbf{N}B + \mathbf{N}B^2/2 = 0. \tag{2.2}$$

Сведем данное операторное уравнение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого существует два способа. Первый, более простой, основан на аналитическом продолжении неизвестных функций за пределы полосы [4]. Вторым, более громоздкий, основан на непосредственном суммировании рядов с использованием производящих функций [3]. Для уравнения Бабенко пригоден, по-видимому, только второй способ.

Пусть $\theta = \pi m/n$. Будем говорить, что функция, зависящая от φ , представленная в виде степенного ряда по e^φ , принадлежит l -му семейству ($1 \leq l \leq 2n$), если степенной ряд содержит только члены вида $e^{(l+k-2n)\varphi}$, где k — произвольное неотрицательное целое число. Для суммирования ряда (1.5) необходимо ввести $2n$ производящих функций

$$B_l(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{2nj-(2n-l)} e^{\varphi(2nj-2n+l)},$$

каждая из которых является функцией l -го семейства.

Величину $B(\varphi, \psi)$ на верхней границе полосы $\psi = \theta$ можно представить в виде суммы функций $2n$ различных семейств:

$$B = \sum_{l=1}^{2n} \sin(l\theta) B_l(\varphi). \tag{2.3}$$

Получим аналогичное представление для $\mathbf{N}B$ и $\mathbf{N}B^2$. Если

$$s_l = a_l e^{l\varphi} + a_{l+2n} e^{(l+2n)\varphi} + \dots$$

является произвольной функцией l -го семейства, то

$$\mathbf{H}s_l = \frac{\cos(l\theta)}{\sin(l\theta)} s_l, \quad \mathbf{N}s_l = \frac{\cos(l\theta)}{\sin(l\theta)} s_l, \tag{2.4}$$

где штрих обозначает производную по φ . Это следует из рассмотрения реальной и мнимой частей вспомогательной аналитической функции $S_l = a_l e^{l\chi} + a_{l+2n} e^{(l+2n)\chi} + \dots$ на верхней границе полосы $\chi = \varphi + i\theta$. Учитывая $\operatorname{Re} S_l = \cos(l\theta) s_l$, $\operatorname{Im} S_l = \sin(l\theta) s_l$, получим требуемые формулы (2.4). Применяя их к (2.3), находим

$$\mathbf{N}B = \sum_{l=1}^{2n} \cos(l\theta) B'_l(\varphi). \tag{2.5}$$

Возводя далее в квадрат (2.3) с использованием формулы суммирования по диагонали всех элементов квадратной матрицы

$$\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} = \sum_{l=1}^{2n} \left(\sum_{j=1}^{l-1} a_{j,l-j} + \sum_{j=l}^{2n} a_{j,l+2n-j} \right)$$

и принимая во внимание, что произведения $B_j B_{l-j}$ и $B_j B_{l-j+2n}$ — функции l -го семейства, т. е. для них применимы формулы (2.4), имеем

$$NB^2 = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\cos(l\theta)}{\sin(l\theta)} \left[\sum_{j=1}^{l-1} \sin(j\theta) \sin(l-j)\theta \cdot (B_j B_{l-j})' + \sum_{j=l}^{2n} \sin(j\theta) \sin(l-j)\theta \cdot (B_j B_{l-j+2n})' \right]. \quad (2.6)$$

Подставляя найденные выражения (2.3), (2.5), (2.6) в уравнение Бабенко (2.2) и учитывая, что если сумма $2n$ функций различных семейств равна нулю, то равно нулю и каждое слагаемое по отдельности, получим

$$\begin{aligned} \sin(l\theta) \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \sin(j\theta) \cos(l-j)\theta \cdot B_j B_{l-j}' + \sum_{j=l}^{2n} \sin(j\theta) \cos(l-j)\theta \cdot B_j B_{l+2n-j}' \right\} + \\ + \cos(l\theta) \left\{ \sum_{j=1}^{l-1} \sin(j\theta) \sin(l-j)\theta \cdot B_j B_{l-j}' + \sum_{j=l}^{2n} \sin(j\theta) \sin(l-j)\theta \cdot B_j B_{l+2n-j}' \right\} + \\ + \sin^2(l\theta) B_l - (1/\nu) \cos(l\theta) \sin(l\theta) B_l' = 0. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Таким образом, найдена искомая квадратично-нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее упрощения применим дискретное преобразование Фурье. По определению, если задан произвольный вектор из $2n$ комплексных чисел D_l , то преобразование, осуществляемое по формуле

$$\hat{D}_j = \sum_{l=1}^{2n} D_l \omega^{(l-1)(j-1)},$$

где $\omega = e^{i\theta} = e^{i\pi m/n}$, называется дискретным преобразованием Фурье. Если

$$C_l = \sum_{j=1}^l D_j H_{l-j+1} + \sum_{j=l+1}^{2n} D_j H_{l+2n-j+1}, \quad \text{то} \quad \hat{C}_p = \hat{D}_p \hat{H}_p.$$

За счет этого свойства достигается упрощение уравнения (2.7). После преобразования Фурье суммы в (2.7) исчезают.

Введем новые векторы. В левом столбце приведены их обозначения, в правом — соответствующие преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} F_l &= \omega^{2l} B_l, & \hat{F}_p &= \omega^2 \hat{B}_{p+2}, \\ G_l &= \omega^{4l} B_l', & \hat{G}_p &= \omega^4 \hat{B}'_{p+4}, \\ C_l &= \sum_{j=1}^{l-1} B_j B_{l-j}' + \sum_{j=l}^{2n} B_j B_{l-j+2n}', & \hat{C}_p &= \omega^{p-1} \hat{B}_p \hat{B}'_p, \\ D_l &= \sum_{j=1}^{l-1} F_j B_{l-j}' + \sum_{j=l}^{2n} F_j B_{l+2n-j}', & \hat{D}_p &= \omega^{p-1} \hat{F}_p \hat{B}'_p, \\ S_l &= \sum_{j=1}^{l-1} F_j G_{l-j} + \sum_{j=l}^{2n} F_j G_{l-j+2n}, & \hat{S}_p &= \omega^{p-1} \hat{F}_p \hat{G}_p. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Через новые векторы выражение (2.7) переписется в виде

$$(2\omega^{2l} - \omega^{4l} - 1)B_l + \frac{i}{\nu}(\omega^{4l} - 1)B_l' - (\omega^{4l} + 1)C_l + D_l + S_l = 0.$$

Осуществляя преобразование Фурье последнего уравнения, обозначая $P_l = \hat{B}_{2l-1} \omega^{2l-2}$ и используя правый столбец (2.8), после некоторых упрощений получим

$$(P_l' + 1)f_l = (P_{l+2}' + 1)f_{l+1} \quad (1 \leq l \leq n). \quad (2.9)$$

Таким образом, из уравнения Бабенко получается система (2.9), причем каждое ее уравнение — следствие двух соседних уравнений (1.7). Если система (1.7) может быть записана в стандартной форме, разрешенной относительно производных, то для (2.9) такое разрешение невозможно, так как произведение всех уравнений (2.9) дает тождество. Должен, следовательно, существовать интеграл. Он легко находится, если просуммировать все уравнения (2.9). С учетом $\sum_{j=1}^n f_j = \text{const}$ получим

$$\sum_{j=1}^n \frac{dP_j}{d\chi} f_j = \sum_{j=1}^n \frac{dP_{j+1}}{d\chi} f_j \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\chi} \sum_{j=1}^n f_j^2 = 0.$$

Перепиывая последнее равенство, заключаем, что система (2.9) должна быть дополнена квадратично-нелинейным интегралом

$$(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + \dots + (P_{n-1} - P_n)^2 + (P_n - P_1)^2 = \text{const}. \quad (2.10)$$

Ряды Стокса для гравитационных волн на поверхности жидкости находятся по рекуррентным формулам, содержащим двойные суммы. В [13] обнаружено нелинейное преобразование, позволяющее упростить эти формулы таким образом, чтобы они содержали только одинарные суммы. Такие преобразования разных рядов, применяемых в задачах о волнах, встречаются вплоть до последнего времени. По-видимому, факт квадратичной нелинейности исходной постановки задачи мало известен. Для (1.5) Вайтинг в [1] также использовал рекуррентные формулы с двойными суммами. Формулы с одинарными суммами получаются, если воспользоваться одним уравнением системы (1.7), которое с учетом (1.6) можно записать в виде

$$\left(\frac{dW(\chi - 2i\theta)}{d\chi} + 1 \right) [1 + i\nu(W(\chi) - W(\chi - 2i\theta))] = \left(\frac{dW(\chi + 2i\theta)}{d\chi} + 1 \right) [1 + i\nu(W(\chi + 2i\theta) - W(\chi))].$$

Исходная краевая задача (1.2) эквивалентна этому квадратично-нелинейному дифференциально-разностному уравнению. Подставляя в него ряд Вайтинга (1.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях ζ , получим рекуррентную формулу

$$E_j = \frac{\nu}{2 \sin(j\theta) (j \cos(j\theta) - \nu \sin(j\theta))} \sum_{k=1}^{j-1} k E_k E_{j-k} (\cos(2k\theta) - \cos(2j\theta)).$$

3. Система из четырех уравнений. Рассмотрим следующий по сложности после $\theta = \pi/3$ случай $\theta = \pi/4$. Частично он был изучен в [3]. Ниже построим линии тока и найдем явные формулы для формы свободной поверхности.

Имеем систему из четырех уравнений

$$\begin{aligned} (P_2' + 1)(P_1' + 1) &= 1/f_1, & (P_3' + 1)(P_2' + 1) &= 1/f_2, \\ (P_4' + 1)(P_3' + 1) &= 1/f_3, & (P_1' + 1)(P_4' + 1) &= 1/f_4, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $f_1 = 1 + i(P_2 - P_1)$, $f_2 = 1 + i(P_3 - P_2)$, $f_3 = 1 + i(P_4 - P_3)$, $f_4 = 1 + i(P_1 - P_4)$. Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned} Q_1 &= E_1\zeta + E_3\zeta^3 + E_5\zeta^5 + E_7\zeta^7 + \dots, & R_1 &= E_2\zeta^2 + E_4\zeta^4 + E_6\zeta^6 + E_8\zeta^8 + \dots, \\ Q_2 &= E_1\zeta - E_3\zeta^3 + E_5\zeta^5 - E_7\zeta^7 + \dots, & R_2 &= -E_2\zeta^2 + E_4\zeta^4 - E_6\zeta^6 + E_8\zeta^8 - \dots, \end{aligned} \quad (3.2)$$

которые, как следует из (1.6), со старыми неизвестными связаны соотношениями $P_1 = Q_1 + R_1$, $P_2 = iQ_2 + R_2$, $P_3 = -Q_1 + R_1$, $P_4 = -iQ_2 + R_2$. Система (3.1) решается благодаря интегралу (2.10), имеющему вид

$$Q_2^2 - Q_1^2 = (R_2 - R_1)^2, \quad (3.3)$$

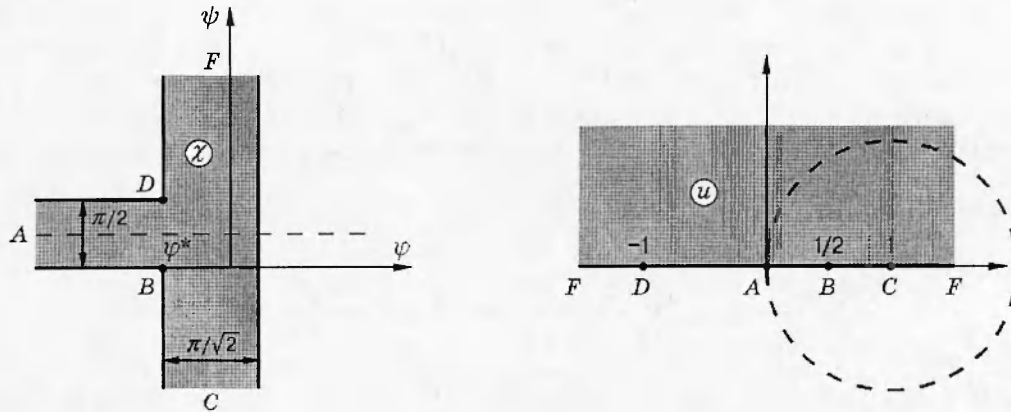


Рис. 1

а также благодаря второму очевидному интегралу $f_1 f_3 = f_2 f_4$, который может быть переписан в виде

$$R_2 - R_1 = Q_2 Q_1. \quad (3.4)$$

В результате порядок системы (3.1) может быть уменьшен на два. Получим

$$\frac{dQ_1}{d\chi} = \frac{Q_1(1 - Q_1^2)}{\sqrt{(1 + Q_1^2)(1 - 2Q_1^2)}}, \quad \frac{d(R_1 + \chi)}{d\chi} = \sqrt{\frac{(1 - Q_1^2)^3}{(1 + Q_1^2)(1 - 2Q_1^2)}}. \quad (3.5)$$

Необходимо найти решение этой системы, удовлетворяющее, как следует из (3.2), условиям

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} Q_1 e^{-\chi} = E_1, \quad \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} R_1 e^{-2\chi} = E_1^2(-3\nu^2/4 + 1/4).$$

Первое уравнение системы решается независимо от второго. После того как функция $Q_1(\chi)$ найдена, интегрируется второе уравнение и решение Вайтинга для $\theta = \pi/4$ дается формулой

$$W = Q_1 + R_1. \quad (3.6)$$

На дне, т. е. когда $\chi = \varphi$, при достаточно больших отрицательных φ функция Q_1 вещественна. Когда Q_1 увеличивается от 0 до $1/\sqrt{2}$, φ возрастает от $-\infty$ до некоторого φ^* . При дальнейшем возрастании φ функция Q_1 , как видно из первого уравнения (3.5), уже не может оставаться вещественной, следовательно, точка $\chi = \varphi^*$ является особой. Обозначая $u = Q_1^2$ и интегрируя первое уравнение (3.5), получим

$$\frac{1}{2} \int_{1/2}^u \frac{du}{u(1-u)} \sqrt{(1+u)(1-2u)} = \chi - \varphi^*.$$

Эта формула представляет собой интеграл Кристоффеля — Шварца, осуществляющий конформное отображение верхней полуплоскости u на многоугольник $ADFCB$ в плоскости комплексного потенциала χ , изображенный на рис. 1.

Как нетрудно убедиться, при таком конформном отображении окружности $|u - 1| = 1$ или

$$u = 2 \cos \alpha e^{i\alpha} \quad (-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2) \quad (3.7)$$

(показанной пунктиром) в плоскости комплексного потенциала соответствует верхняя граница полосы (1.1). Следовательно, на свободной поверхности имеет место тождество $|1 - Q_1^2| = 1$ ($\psi = \pi/4$). Учитывая следствие из (3.3), (3.4)

$$(1 - Q_1^2)(1 + Q_2^2) = 1, \quad (3.8)$$

находим другое тождество

$$|1 + Q_2^2| = 1 \quad (\psi = \pi/4). \quad (3.9)$$

Для доказательства еще двух тождеств

$$Q_1 = -iQ_2, \quad R_1 = R_2 \quad (\psi = \pi/4) \quad (3.10)$$

достаточно подставить $\zeta = r e^{i\pi/4}$ ($r \geq 0$) в ряды (3.2). Из первого равенства (3.10) получаем следствие

$$|1 + Q_1^2| = |1 - Q_2^2| \quad (\psi = \pi/4). \quad (3.11)$$

Воспользуемся полученными тождествами для проверки условия постоянства давления на свободной поверхности. Необходимо доказать выполнение равенства

$$\left| \frac{d(W + \chi)}{d\chi} \right|^2 = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{Im} W} \quad (\psi = \pi/4),$$

которое в более подробной записи с учетом (3.5), (3.6) имеет вид

$$\left| \frac{Q_1(1 - Q_1^2) + (1 - Q_1^2)^{3/2}}{\sqrt{(1 + Q_1^2)(1 - 2Q_1^2)}} \right|^2 = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{Im}(Q_1 + R_1)}. \quad (3.12)$$

Преобразуем сначала левую часть (3.12). Она не изменится, если поделить ее на $|1 - Q_1^2|^{3/2} = 1$. Воспользовавшись для преобразования числителя следствием из (3.8) $Q_2 = Q_1/\sqrt{1 - Q_1^2}$, находим, что левая часть равна $|1 + Q_2|^2/|1 + Q_1^2||1 - 2Q_1^2|$. Учитывая равенство $1 - 2Q_1^2 = (1 - Q_2^2)/(1 + Q_2^2)$, полученное из (3.8), а также (3.9) и (3.11), заключаем, что

$$\left| \frac{Q_1(1 - Q_1^2) + (1 - Q_1^2)^{3/2}}{\sqrt{(1 + Q_1^2)(1 - 2Q_1^2)}} \right|^2 = \frac{1}{|1 - Q_2|^2}. \quad (3.13)$$

Теперь преобразуем правую часть (3.12). Учитывая тождества (3.4), (3.10), имеем цепочку равенств по преобразованию правой части (3.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + i(Q_1 + R_1 - Q_1 - R_1)} &= \frac{1}{1 + iQ_1 - Q_2 + i(R_1 - R_2)} = \\ &= \frac{1}{1 + iQ_1 - Q_2 - iQ_1Q_2} = \frac{1}{(1 - Q_2)(1 + iQ_1)} = \frac{1}{|1 - Q_2|^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая с (3.13), заключаем, что условие постоянства давления выполнено.

Решение в окрестности точки $\chi = \varphi^*$ имеет вид

$$(W + \chi) - (W + \chi)^* = 3^{1/3} 2^{-5/6} e^{i\pi/3} (\chi - \varphi^*)^{2/3}.$$

Следовательно, граница жидкости имеет заострение с внутренним углом 120° . Условие ровного дна выполнено для $\varphi < \varphi^*$. В точке $\chi = \varphi^*$ наклон дна меняется скачком. При возрастании φ далее условие ровного дна нарушается вплоть до точки $\varphi^{**} = \varphi^* + \sqrt{2}\pi$. В окрестности этой точки решение имеет вид

$$(W + \chi) - (W + \chi)^{**} = \operatorname{const} e^{i4\pi/3} (\varphi^{**} - \chi)^{4/3} \quad (\operatorname{const} > 0).$$

Следовательно, вновь имеется излом, однако при $\varphi > \varphi^{**}$ дно снова ровное и горизонтальное. Полученное решение можно интерпретировать как течение над неровным участком дна, расположенным при $\varphi^* < \varphi < \varphi^{**}$. «Длина препятствия» на дне дается формулой 23

$$x^{**} - x^* = \frac{4h_0}{\pi} \{2 \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}\}.$$

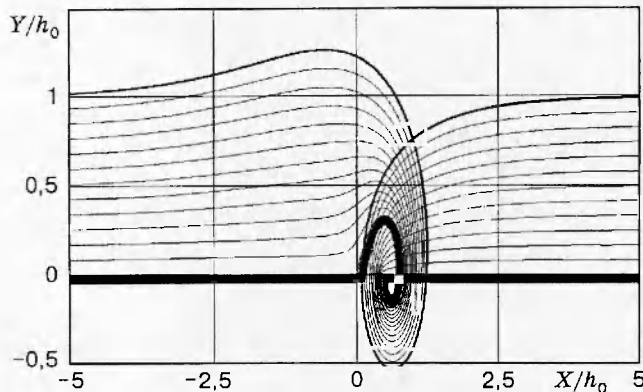


Рис. 2

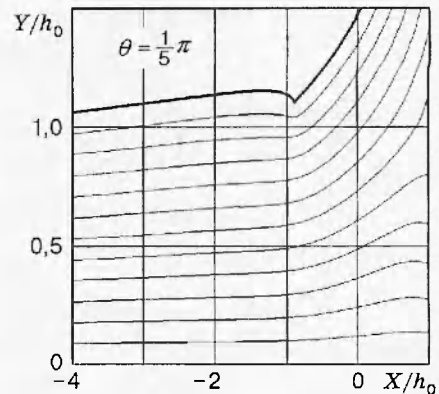


Рис. 3

Интегрируя следствие из (3.5) $d(R_1 + \chi)/du = \sqrt{1-u}/2u$, приходим к следующему утверждению. Если $u(\chi)$ — конформное отображение многоугольника в плоскости комплексного потенциала χ (рис. 1) на верхнюю полуплоскость u , то решение Вайтинга для $\theta = \pi/4$ дается формулой

$$\chi + W = \sqrt{u} + \sqrt{1-u} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-u}}{1 + \sqrt{1-u}} + \text{const.}$$

Подставляя в нее (3.7), получим параметрическое представление уравнения свободной поверхности

$$X = \frac{4}{\pi} \left(\sqrt{2} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \sin \alpha \right) + \text{const.},$$

$$Y = \frac{4}{\pi} \left(\sqrt{2} \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \quad (-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2).$$

Форма свободной поверхности, определяемая этой формулой, а также линии тока приведены на рис. 2. Найдено двухлистное течение над неровным дном, имеющим точку самопересечения. В нижней точке жидкость находится ниже твердой стенки. Отрыв жидкости не происходит из-за отрицательности давления внутри жидкости.

Получено течение, совсем не похожее на уединенную волну. Однако это не помешало Вайтингу на основе такого течения, численно им найденного, построить уединенную волну для $\theta = \pi/4$. Им была проведена линеаризация задачи (1.2) на этом решении, и возмущенное решение подбиралось таким образом, чтобы было выполнено условие симметрии относительно вертикальной оси. В результате был найден профиль волны, близко совпадающий с результатами других авторов. Теперь такую линеаризацию можно провести на точном решении.

4. Численное интегрирование системы. Следующий после $\theta = \pi/4$ по сложности случай $\theta = \pi/5$. Система уравнений (1.7) здесь состоит из пяти уравнений. Нам не удалось ее проинтегрировать точно. Если обозначить $y_j = 1/(dP_j/d\chi + 1)(dP_{j+1}/d\chi + 1)$ и ввести независимую переменную $\zeta = i\nu \int d\chi / \sqrt{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5}$, то (1.7) для $\theta = \pi/5$ можно записать в следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\zeta} &= y_3 y_5 - y_2 y_4, & \frac{dy_2}{d\zeta} &= y_4 y_1 - y_3 y_5, & \frac{dy_3}{d\zeta} &= y_5 y_2 - y_4 y_1, \\ \frac{dy_4}{d\zeta} &= y_1 y_3 - y_5 y_2, & \frac{dy_5}{d\zeta} &= y_2 y_4 - y_1 y_3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Нетрудно показать, что эта система имеет интегралы

$$\frac{d}{d\zeta}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 0, \quad \frac{d}{d\zeta}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2) = 0,$$

причем второй из них соответствует (2.10). Неизвестно, имеет ли система другие полиномиальные интегралы.

Линии тока, полученные численным интегрированием системы (4.1), представлены на рис. 3. Верхняя линия тока соответствует свободной поверхности. Условие постоянства давления выполнено от $-\infty$ до особой точки (на рис. 3 это точка заострения).

Численное интегрирование системы (1.7) осуществлено и в том случае, когда количество уравнений n больше пяти. Мы ограничились рассмотрением нечетных n . В этом случае существует простая формула, позволяющая записать систему (1.7) в стандартной форме, разрешенной относительно производных:

$$\frac{dP_j}{d\chi} + 1 = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} f_{[(2k+j-2) \bmod n]+1} / \sqrt{\prod_{k=1}^n f_k} \quad (1 \leq j \leq n). \quad (4.2)$$

В случае четных n для получения соответствующей формулы необходимо использовать производную от интеграла

$$\prod_{j=1}^{n/2} f_{2j} = \prod_{j=1}^{n/2} f_{2j-1},$$

и она не получается столь простой.

Положим $E_1 = 1$. Для суммирования ряда Вайтинга необходимо решить задачу Коши $\lim_{\zeta \rightarrow 0} P_j/\zeta = e^{2i(j-1)\theta}$ ($1 \leq j \leq n$) для системы (4.2). Эта задача решалась численным интегрированием в плоскости ζ . Использовался метод Рунге — Кутты четвертого порядка точности. Поскольку для (4.2) точка $\zeta = 0$ является особой, то интегрирование начиналось с некоторой другой точки $\zeta \neq 0$. Решение в последней предварительно находилось численным суммированием ряда Вайтинга (1.5).

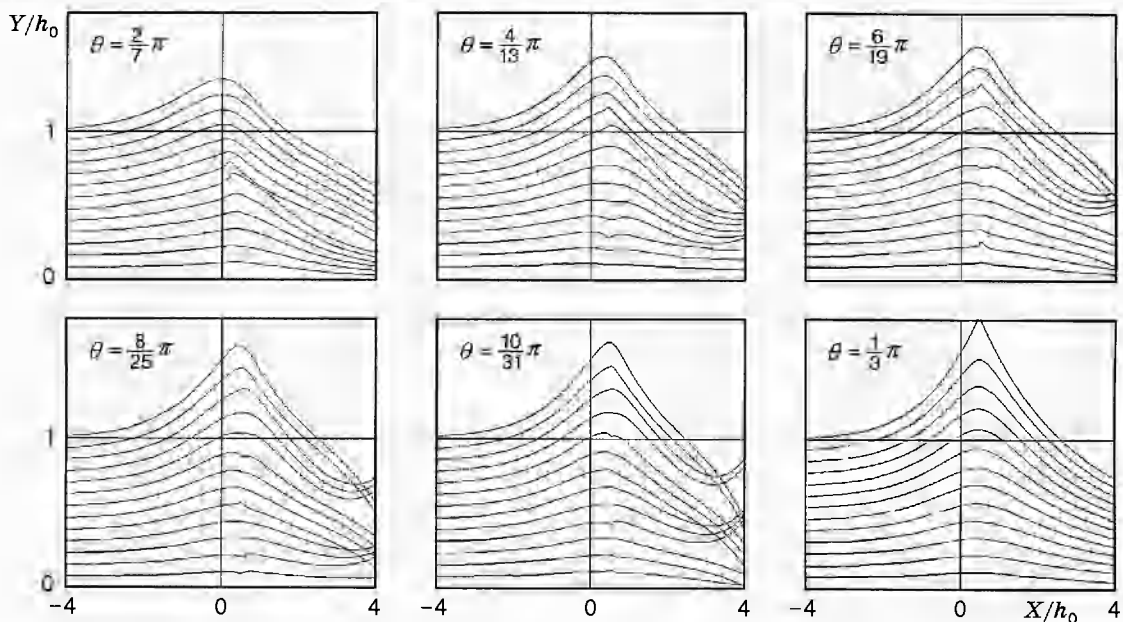


Рис. 4

На рис. 4 изображены линии тока для шести значений параметра θ . Верхняя линия соответствует свободной поверхности. Если для $\theta = \pi/3$ линии тока всюду гладкие и особая точка только одна (она расположена на границе потока), то для $\theta < \pi/3$ течение содержит уже много особых точек. Большая их часть расположена внутри жидкости. Течение становится многолистным — линии тока пересекаются. Однако особые точки расположены только в правой части потока. Левая половина свободна от них и может использоваться для приближенного описания уединенных волн с амплитудой меньше максимальной.

Видно, что в правой половине при изменении θ течение меняется хаотически, в то время как в левой половине оно изменяется мало. По-видимому, решение, даваемое рядом Вайтинга (1.5), в левой половине обладает непрерывной зависимостью от параметра θ .

Автор выражает благодарность В. М. Тешукову, Н. И. Макаренко и С. Л. Гаврилюку за полезные обсуждения.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 43 «Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости».

ЛИТЕРАТУРА

1. Witting J. On the highest and other solitary waves // J. Appl. Math. 1975. V. 28, N 3. P. 700–719.
2. Карабут Е. А. К задаче об уединенной волне на поверхности жидкости // Докл. РАН. 1994. Т. 337, №3. С. 339–341.
3. Карабут Е. А. Суммирование ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 2. С. 328–348.
4. Karabut E. A. Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave // J. Fluid Mech. 1996. V. 319. P. 109–123.
5. Карабут Е. А. Семейство точных решений, близких к гравитационным волнам максимальной амплитуды // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 5. С. 623–626.
6. Карабут Е. А. Теория гравитационных волн максимальной амплитуды // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, № 11. С. 127–143.
7. Karabut E. A. An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 45–70.
8. Овсянников Л. В. Об асимптотическом представлении уединенных волн // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 3. С. 556–559.
9. Карабут Е. А. Численный анализ асимптотического представления уединенных волн // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 44–54.
10. Бабенко К. И. Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 5. С. 1033–1037.
11. Keller J. B. The solitary wave and periodic waves in shallow water // Commun. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 323–339.
12. Pennel S. A. On a series expansion for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 557–561.
13. Longuet-Higgins M. S. Some new relations between Stokes's coefficients in the theory of gravity waves // J. Inst. Math. and Appl. 1977. V. 22, N 3. P. 261–273.

Поступила в редакцию 21/IV 1997 г.