

К ТЕОРИИ РАННЕЙ ТУРБУЛИЗАЦИИ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

Ю. А. Буевич, В. М. Сафрай

(Москва)

Рассмотрено влияние межфазового взаимодействия на гидродинамическую устойчивость дисперсного потока и предложена качественная модель преждевременного наступления турбулентного режима течения.

Хорошо известно, что диспергированная фаза способна стабилизировать ламинарное течение суспензий и аэровзвесей, задерживая появление нейтральных возмущений в них и развитие турбулентного режима. Стабилизирующее влияние взвешенной примеси проявляется как в сдвиге кривых нейтральной устойчивости в сторону более высоких значений критерия Рейнольдса [1,2], так и в появлении дополнительной диссиpации энергии пульсационных движений силами межфазового взаимодействия [3,4].

Эти выводы теории хорошо подтверждаются экспериментами по движению достаточно мелкодисперсных или почти равноплотных систем, когда переход от ламинарного движения к турбулентному осуществляется при повышенных (по сравнению с движением однородной дисперсионной среды) критических числах Рейнольдса R_* . Однако при переходе к более грубодисперсным системам с существенно различными плотностями фаз ситуация резко изменяется — взвешенные частицы, наоборот, дестабилизируют поток, так что турбулентный режим устанавливается при самых различных значениях R_* , меньших соответствующих значений для течений однородной жидкости. Ранняя турбулизация суспензий была отмечена в [5] для движений смеси жидкости с песком в вертикальных трубах, когда R_* составляло всего 150—200 вместо $R_* \approx 2300$, характерного для обычного течения Пуазеля. Аналогичные результаты были получены и в последующих опытах с водно- и нефтепесчаными системами [6]. Заметим, что нарушение устойчивости ламинарного течения при заниженных R_* характерно и для мульсий, в которых плотность материала диспергированной фазы меньше плотности дисперсионной среды. Это явление наблюдалось, например, для водненефтяных эмульсий [7] при весьма малых концентрациях их. Весьма существенно, что значение R_* не является некой инвариантной характеристикой данного типа движения, а зависит от физических параметров фаз и концентрации дисперсной системы.

Указанные факты позволяют предположить, что, помимо обычного механизма нарушения гидродинамической устойчивости, связанного с влиянием инерционных эффектов и возникновением незатухающих сдвиговых волн и вторичных течений, в потоках дисперсных систем имеется иной, иногда более существенный механизм переноса энергии к пульсациям, интенсифицирующий их разрастание и способствующий, тем самым, преждевременному наступлению турбулентности. Ясно, что такой дополнительный перенос энергии может быть связан только с эффектами межфазового взаимодействия, приводящими к несовпадению локальных скоростей жидкости и частиц, и для его реализации не принципиально наличие сдвига в потоке. Поэтому для предварительного анализа условий ранней турбулизации целесообразно рассмотреть лишь устойчивость одномерного и однородного двухфазного потока, что и сделано в этой работе.

§ 1. Для описания движения используем модель двух взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред [8], дополняя ее выражением для силы межфазового взаимодействия, следующим из результатов работы [8]. В последнем выражении учитываются как силы вязкого сопротивления и плавучести, так и силы, связанные с избыточным градиентом давления и ускорением жидкой фазы при нестационарном движении частиц, особенно существенные при анализе поведения систем, близких к равноплотным. При этом предполагаем, что сила вязкого трения линейна по скорости межфазового скольжения и может быть представлена в виде произведения силы Стокса на определенную функцию от объемной концентрации системы ρ и критерия Архимеда A .

Тогда уравнения сохранения масс и импульсов фаз записутся в виде

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[(1-\rho)v] &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w) = 0 \\
 \left\{ [\rho + \kappa(1-\rho) + \xi \kappa \rho] \frac{\partial}{\partial t} + \kappa(1-\rho)(v \nabla) + (1+\xi \kappa) \rho (w \nabla) \right\} v - \\
 -\xi \kappa \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \nabla) \right] w &= -\nabla p + \nabla \tau^{(1)} + \kappa g - \beta \rho K (v - w) \\
 \left[(1+\xi \kappa) \frac{\partial}{\partial t} + (w \nabla) + \xi \kappa (v \nabla) \right] w - (1+\xi \kappa) \left[\frac{\partial}{\partial t} + (w \nabla) \right] v = \\
 = -\frac{1}{\rho} \nabla q + \frac{1}{\rho} \nabla \tau^{(2)} + (1-\kappa) g + \beta K (v - w) \quad (1.1) \\
 \beta = \frac{9\mu_0}{2a^2 d_2}, \quad \kappa = \frac{d_1}{d_2}, \quad K = K(\rho, A)
 \end{aligned}$$

Здесь w, v — скорости твердой и жидкой фаз; $p, \tau^{(1)}$ и $q, \tau^{(2)}$ — тензоры давления и вязких напряжений в жидкой и диспергированной фазах, отнесенные к плотности материала частиц d_2 ; d_1 — плотность жидкой фазы; μ_0 — ее вязкость; a — радиус частиц, предполагаемых сферическими; g — ускорение силы тяжести; $K(\rho, A)$ — функция влияния, учитывающая возрастание эффективной силы вязкого трения при стесненном обтекании частиц; $\xi = \xi(\rho)$ — коэффициент присоединенной массы ($\xi \leqslant 1/2$). Относительно тензоров $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$ предположим, что они выражаются через градиенты компонент скорости обычным для гидродинамики вязкой жидкости образом.

Одномерный однородный поток описывается соотношениями (ось $x = x_1$ направляем обратно вектору g)

$$\begin{aligned}
 w_i = 0, \quad v_i = u \delta_{i1}, \quad p = \text{const} &- (\kappa g - \beta \rho K u) x \\
 q = \text{const}, \quad u = \frac{(1-\kappa) g}{3K} &= \frac{2}{9} \frac{a^2 (d_2 - d_1) g}{\mu_0 K} \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

Уравнения (1.1), линеаризованные по малым возмущениям величин (отмечаемым ниже звездочкой) относительно стационарного состояния (1.2), имеют форму

$$\begin{aligned}
 \left\{ [\rho + \kappa(1-\rho) + \xi \kappa \rho] \frac{\partial}{\partial t} + \kappa(1-\rho) u \frac{\partial}{\partial x} \right\} v_i^* - \\
 - \xi \kappa \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) w_i^* &= -\nabla p^* + \mu^{(1)} \Delta v_i^* + \gamma^{(1)} \nabla (\operatorname{div} v^*) - \\
 - \beta \rho K u_i^* - \beta \left(K + \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right) u \delta_{1i} \rho^*, \quad \gamma^{(i)} = \frac{1}{3} \mu^{(i)} + \zeta^{(i)} \\
 \left[(1+\xi \kappa) \frac{\partial}{\partial t} + \xi \kappa u \frac{\partial}{\partial x} \right] w_i^* - (1+\xi \kappa) \frac{\partial v_i^*}{\partial t} = \quad (1.3) \\
 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho^*}{\partial x_i} + \frac{\mu^{(2)}}{\rho} \Delta w_i^* + \frac{\gamma^{(2)}}{\rho} \nabla (\operatorname{div} w^*) + \beta K u_i^* + \beta \frac{\partial K}{\partial \rho} \delta_{1i} u \rho^* \\
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho^* = (1-\rho) \operatorname{div} v^*, \quad \frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} w^*, \quad u^* = v^* - w^*
 \end{aligned}$$

Тензор давления жидкой фазы в этих уравнениях предполагается шаровым, «равновесные» нормальные напряжения твердой фазы различны в разных направлениях ($q^{(1)} \neq q^{(2)} = q^{(3)}$), как это следует из результатов [9, 10]. Величины $\mu^{(i)}, \zeta^{(i)}$ — сдвиговые и объемные вязкости фаз, соответственно, отнесенные к величине d_2 . Полагаем

$$\{p^*, \rho^*, v^*, w^*\} = \{P, R, V, W\} e^{i(\omega t + kx)}$$

Подставляя эти соотношения в (1.3) и исключая из получающейся системы алгебраических уравнений величины \mathbf{V} и \mathbf{W} , имеем после уравнения

$$\begin{aligned} & ik^2 P + (r_1 k_1 + s_1 k_2) R = 0, \quad (s_2 k_2 + r_2 k_1) R = 0 \\ & r_1 = \gamma^{(1)} k_1 \frac{\omega + u k_1}{1 - \rho} + \frac{1}{k_1} \left(\frac{\omega + u k_1}{1 - \rho} a_1 + \frac{\omega}{\rho} b_1 \right) + \beta \left(K + \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right) u \\ & r_2 = \frac{\gamma^{(2)}}{\rho} k_2 \frac{\omega}{\rho} + \frac{1}{k_1} \left(\frac{\omega + u k_1}{1 - \rho} a_2 + \frac{\omega}{\rho} b_2 \right) + \beta \frac{\partial K}{\partial \rho} u - \frac{i k_1}{\rho} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \rho} \\ & s_1 = \gamma^{(1)} k_2 \frac{\omega + u k_1}{1 - \rho}, \quad s_2 = \frac{\gamma^{(2)}}{\rho} k_2 \frac{\omega}{\rho} - i \frac{k_2}{\rho} \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \rho} \\ & a_1 = \mu^{(1)} k^2 + \beta \rho K + i \{ [\rho + \kappa (1 - \rho) + \xi \kappa \rho] \omega + \kappa (1 - \rho) u k_1 \} \quad (1.4) \\ & a_2 = \beta K + i (1 + \xi \kappa) \omega, \quad b_1 = \beta \rho K + i \xi \kappa \rho (\omega + u k_1) \\ & b_2 = \frac{\mu^{(2)}}{\rho} k^2 + \beta K + i [(1 + \xi \kappa) \omega + \xi \kappa u k_1] \end{aligned}$$

Первое из уравнений (1.4) определяет величину P , второе — дает характеристическое уравнение системы; его можно привести к виду

$$(C_0 + i D_0) \omega^2 + (C_1 + i D_1) \omega + C_2 + i D_2 = 0 \quad (1.5)$$

$$C_0 = 0, \quad D_0 = 1 + \xi \kappa, \quad C_1 = \beta K + \rho^{-1} (1 - \rho) (\mu^{(2)} + \gamma^{(2)}) k^2$$

$$\begin{aligned} D_1 &= (\rho + \xi \kappa) u k_1, \quad | \quad C_2 = \beta \rho \left[(1 - \rho) \frac{\partial K}{\partial \rho} + K \right] u \\ D_2 &= -(1 - \rho) \left(k_1^2 \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \rho} + k_2^2 \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

Условия устойчивости (отсутствие корней ω уравнения (1.5), имеющих отрицательные мнимые части) имеют вид

$$D_0 C_1 > 0, \quad (D_1 C_1 - D_0 C_2) C_2 - D_2 C_1^2 > 0 \quad (1.6)$$

Первое из условий (1.6) выполняется всегда, второе приводит к следующему условию устойчивости:

$$\begin{aligned} & \alpha_0 k^4 + \alpha_1 k^2 + \alpha_2 > 0 \quad (1.7) \\ & \alpha_0 = \frac{(1 - \rho)^3}{\rho^2} (\mu^{(2)} + \gamma^{(2)}) \left(k_1^2 \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \rho} + k_2^2 \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \rho} \right), \quad \alpha_1 = \beta (1 - \rho) (\mu^{(2)} + \gamma^{(2)}) \times \\ & \times \left\{ k_1^2 \left[2 \frac{1 - \rho}{\rho} K \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \rho} + (\rho + \xi \kappa) \left(K + (1 - \rho) \frac{\partial K}{\partial \rho} \right) u^2 \right] + 2 k_2^2 \frac{1 - \rho}{\rho} K \frac{\partial q^{(2)}}{\partial \rho} \right\} \\ & \alpha_2 = k_1^2 \beta^2 \rho (1 - \rho) \left\{ \frac{1}{\rho} K^2 \frac{\partial q^{(1)}}{\partial \rho} + \left[K + (1 - \rho) \frac{\partial K}{\partial \rho} \right] \left[\xi \kappa K - (1 + \xi \kappa) \rho \frac{\partial K}{\partial \rho} \right] u^2 \right\} \end{aligned}$$

Легко видеть, что при $(\partial/\partial \rho) q^{(2)} > 0$ наиболее неустойчивы одномерные возмущения ($k_2 = 0$), а при обратном неравенстве — возмущения с большими k_2 . Если также $(\partial/\partial \rho) q^{(1)} > 0$, то устойчивость нарушается сначала по отношению к возмущениям с $k_1 \approx 0$. При уменьшении $q^{(1)}$ с ростом ρ движение неустойчиво. Это видно из того, что корни уравнений $(\partial/\partial \rho) q^{(i)} = 0$ (близкие по величине к концентрации плотно упакованной системы ρ_* [9, 10]) обычно значительно больше корня уравнения

$$\xi \kappa K = (1 + \xi \kappa) \rho \partial K / \partial \rho$$

Поэтому достаточно исследовать устойчивость по отношению к плоским волнам с $k_1 \approx 0$. В этом случае из (1.7) имеем приближенное условие устойчивости

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial q^{(i)}}{\partial \rho} - (1 - \rho) \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right) \left[(1 + \xi \kappa) \rho \frac{\partial \ln K}{\partial \rho} - \xi \kappa \right] u^2 > 0. \quad (1.8)$$

Видно, что устойчивость движения не зависит от вязкостных свойств обеих фаз.

§ 2. Для анализа условий (1.7) или (1.8) необходимо располагать зависимостями K и $q^{(i)}$ от ρ и прочих параметров движения. Для K можно использовать зависимость из [9].

$$K \approx \frac{1}{(1 - \rho)^{3.75}} [1 + 0.033(1 - \rho)^{2.375} A^{1/2}], \quad A = \frac{8ga^3}{\mu_0^2} d_1(d_2 - d_1) \quad (2.1)$$

Получение выражений для $q^{(i)}$ сопряжено с трудностями рассмотрения взвешенных частиц, хаотически движущихся в вязкой жидкости, как некоторой статистической системы. В настоящее время известны лишь приближенные выражения для $q^{(i)}$, пригодные в случаях, когда характерное время взаимодействия между частицами намного ниже времени релаксации скорости частиц относительно жидкости, а сами взаимодействия короткодействующие [9, 10]. Эти условия выполняются обычно для взвесей частиц в газе и лишь в некотором приближении — для суспензий.

В [10], исходя из предположения о марковости процесса изменения положения изображающей точки системы частиц в ее фазовом пространстве, получено следующее представление для нормального напряжения диспергированной фазы в направлении взвешивающего потока

$$\begin{aligned} P_{11} &= -P_0 - \frac{4m\eta^\circ}{3\chi\theta} Bu^2, \quad P_0 = n\theta(1 + Y) \\ Y &= 4\rho\chi, \quad \eta^\circ = \frac{5}{64a^2} \left(\frac{m\theta}{\pi} \right)^{1/2}, \quad B = \frac{33K\theta}{mu^2} \\ \theta &= \frac{D}{3} m \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right)^2 \Psi(\rho) u^2, \quad \Psi(\rho) = \langle (\delta\rho)^2 \rangle, \quad \chi = \chi(\rho) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь θ — средняя энергия изотропных мелкомасштабных пульсаций частиц, B — коэффициент, определяющий тензор диффузии в пространстве скоростей пульсационных движений, $\langle (\delta\rho)^2 \rangle$ — интенсивность флуктуаций концентрации системы, D — численный коэффициент, остающийся в рамках теории [10] неопределенным, $\chi(\rho)$ — величина, показывающая, во сколько раз возрастает частота бинарных столкновений (заметим, что в системе твердых сфер все столкновения бинарные) в концентрированной системе частиц конечного объема по сравнению с системой точечных частиц. В разбавленных системах справедливо соотношение для $\chi(\rho)$, следующее из теории плотных газов Энскога [10]:

$$\chi(\rho) \approx (1 - \rho^{11/2}) (1 - 8\rho)^{-1}, \quad \rho \ll 1$$

Для концентрированных систем имеем приближенно [9]

$$\chi(\rho) \approx \frac{1}{4\rho} \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad \sigma = \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{1/3}, \quad \sim 0.12 \leq \rho \leq \rho_*$$

Функция $\chi(\rho)$ монотонно увеличивается с ростом ρ и стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow \rho_*$.

Из результатов [9] следует соотношение

$$\Psi(\rho) \approx 6\rho^2 \frac{N\theta}{V} \left| \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial F_0} \right)_0 \right| = 6\rho^2 \left(1 + Y + \rho \frac{dY}{d\rho} \right)^{-1} \quad (2.3)$$

Для разбавленных и концентрированных систем получим соответственно следующие представления:

$$\psi(\rho) \approx 6\rho^2 \frac{1 - 16\rho + 64\rho^2}{1 - 8\rho + 2\rho^2} \text{ или } \psi(\rho) \approx 6\rho^2 \frac{(1 - \sigma)^2}{1 - \frac{2}{3}\sigma} \quad (2.4)$$

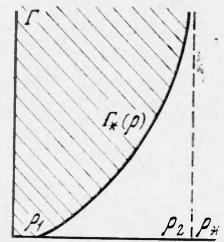
В [9] получена также формула для θ , с точностью до числового множителя совпадающая с (2.2). Сравнивая (2.2) с этой формулой, получим $D \approx 0.2$, что и используем ниже.

После вычислений получим в результате

$$d_2 q^{(1)} = -P_{11} \approx 0.067 \rho (1 + Y(\rho)) \psi(\rho) \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right)^2 d_2 u^2 + \\ + 0.573 \frac{\psi^{1/2}(\rho) K}{\chi(\rho)} \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right) \left(\frac{\mu_0}{ad_2} \right) d_2 u \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в условие устойчивости (1.8), запишем это условие в форме

$$2.57 \Gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\psi^{1/2} K^2}{\chi} \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right) \right] + \\ + \left\{ 0.067 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \psi (1 + Y) \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. - \rho (1 - \rho) \left(\frac{\partial \ln K}{\partial \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right) \left[(1 + \xi \kappa) \frac{\partial \ln K}{\partial \rho} - \xi \kappa \right] \right\} > 0 \\ \Gamma = \frac{v_0^2 \kappa^2}{(1 - \kappa) g a^3} = \frac{\mu_0^2}{(1 - \kappa) d_2^2 g a^3}, \quad A = \frac{8\kappa}{\Gamma}, \quad u \neq 0 \quad (2.6)$$



Фиг. 1

Таким образом, нейтральная кривая определяется величиной ρ и единственным безразмерным параметром Γ , зависящим от параметров фаз системы. Исследование неравенства (2.6) показывает, что нейтральная кривая в области $\Gamma > 0$, $0 < \rho \leq \rho_*$ имеет форму кривой на фигуру (область устойчивости расположена над этой кривой). Видно, что с уменьшением параметра Γ системы неустойчивость наступает при переходе через критическое значение $\Gamma_*(\rho)$. Нарушению устойчивости способствует, таким образом, увеличение размера частиц, уменьшение отношения плотностей κ , а также увеличение плотности диспергированной фазы и уменьшение вязкости дисперсионной среды. Все эти выводы находятся в хорошем качественном согласии с многочисленными экспериментами, касающимися как собственно потоков дисперсных систем, так и особенно псевдоожижженного состояния. Известно, например, что нарушению однородности псевдоожижжения и установлению неоднородного режима функционирования взвешенного слоя препятствует переход от псевдоожижжения крупных тяжелых частиц газом малой вязкости и плотности к псевдоожижжению мелких легких частиц в капельной жидкости с высокой плотностью и вязкостью (см., например, обзор экспериментальных данных в [11]). Ранней турбулизации дисперсных систем препятствует точно такое же изменение физических параметров фаз [8–7]. Поэтому появляется возможность связать раннюю турбулизацию, неоднородное псевдоожижжение и т. п. с нарушением устойчивости системы именно по отношению к малым возмущениям.

Анализ показывает, что при малой надкритичности по Γ в области $\rho \leq \rho_2$ (фигура) нарушение устойчивости происходит первоначально по отношению к плоской волне возмущения, распространяющейся вдоль направления взвешивающего потока, и возможно установление периодического вторичного течения с $k_2 \approx 0$. Это явление известно в литературе под названием «расложение супензий». Наоборот, в области $\rho \geq \rho_2$, где $q^{(1)}(\rho)$ убывает с ростом ρ , нарушение устойчивости происходит по отношению к возмущениям с высокими волновыми числами. Именно в этой области следует, по-видимому, ожидать бурного развития начальных возмущений вплоть до образования в системе пузырей, заполненных чистой дисперсионной средой, как это характерно, например, для неоднородного псевдоожижжения.

Полученные результаты соответствуют следующей физической картине поведения возмущений. Пусть, например, в системе образовалась положительная флуктуация, в которой концентрация частиц выше таковой в окружающем объеме. Подъемная сила, действующая на частицы в составе такой флуктуации со стороны взвешивающего потока, относительно выше, чем сила, действующая на частицу вне флуктуации [9]. В ре-

зультате эта флуктуация начинает двигаться вверх, захватывает при этом новые частицы, и ее концентрация растет. С другой стороны, силы взаимодействия между частицами, совершающими хаотические движения, приводят к появлению эффективного давления в твердой фазе. Если это давление увеличивается с ростом концентрации, то оно приводит к рассасыванию флуктуации. Конкуренция этих двух факторов, действующих в противоположном направлении, и определяет устойчивость системы. В этой связи становится понятным, почему все предыдущие известные авторам исследования линейной устойчивости дисперсных систем (см., например, [12]) приводили к выводу об их неустойчивости при произвольных значениях всех физических параметров и концентрации ρ , что явно противоречит эксперименту. Дело в том, что в этих исследованиях вообще не учитывалось давление в твердой фазе и его зависимость от ρ , а тем самым и единственный физический фактор, ведущий к уничтожению возмущений концентрации системы.

Заметим, что величина ρ_1 (фигура) зависит, вообще говоря, от Γ и α (из-за зависимости величины K в (2.1) от числа Архимеда A). Однако эта зависимость, как нетрудно видеть, весьма слабая.

Для равноплотных систем $\mu = 0$ и левая часть неравенств (1.7) и (1.8) обращается в нуль, что соответствует нейтральной устойчивости течений таких систем. С уменьшением μ , а следовательно, и Γ , в области отрицательных μ и Γ (частицы легче жидкой фазы) характер областей устойчивости существенно изменяется. В частности, как видно из (1.7), возможно появление неустойчивости при малых концентрациях и устойчивости при больших. Первый вывод качественно согласуется с опытными данными, приведенными в [7]. Более подробное исследование устойчивости при $\mu < 0$ затрудняется тем, что нет никакой уверенности в справедливости формул § 2 для этого случая, а какие-либо более точные выражения для $q^{(i)}$ в таких системах неизвестны.

Отметим, что при выводе формул § 2 в [9, 10] не учитывался перенос импульса в твердой фазе за счет трения между соприкасающимися частицами. Можно ожидать, что этот эффект приведет к росту $q^{(i)}(\rho)$ с ρ в области ρ , непосредственно примыкающей к $\rho = \rho_*$. В этом случае вблизи от ρ_* появится дополнительная область устойчивости. Эксперименты свидетельствуют в пользу существования такой области (взвешенный слой вблизи от начала псевдоожижения оказывается однородным [11]), однако способ ее теоретической оценки в настоящее время неясен.

Поступила 19 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Гупало Ю. П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
- Saffman P. G. On the stability of laminar flow of a dusty gas. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, pt. 1.
- Баренблatt Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.
- Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. О влиянии взвешенных в жидкости частиц на вырождение изотропной турбулентности. ПМТФ, 1965, № 4.
- Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смеси жидкости с песком в скважине и трещине при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.
- Багиров М. К. О режимах движения нефтепесчаных смесей в трубах. Азерб. нефтяное хоз-во, 1965, № 2.
- Котяков Ф. И. Условия выноса воды и песка при эксплуатации скважин. Грозный, 1946.
- Буевич Ю. А. О сопротивлении движению частицы, взвешенной в турбулизованной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
- Буевич Ю. А. Приближенная статистическая теория взвешенного слоя ПМТФ, 1966, № 6.
- Мясников В. П. О динамических уравнениях движения двухкомпонентных систем. ПМТФ, 1967, № 2.
- Дэвидсон И. Ф., Харрисон Д. Псевдоожижение твердых частиц. «Химия», 1965.
- Murray J. D. On the Mathematics of Fluidization. Part 1, Fundamental Equations and Wave Propagation. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 3.