

А. Г. Демешкин, В. М. Корнеев

**ПРОХОДЯЩИЕ ВОЛНЫ И ДИНАМИЧЕСКИЙ КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ  
В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЕ.  
СОПОСТАВЛЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ**

Решается уточненная задача о распространении стационарного краевого режима в ортотропной полосе. Уточнения в задаче связаны с учетом сдвига и обжатия в ортотропном слое. Получаемые теоретические оценки для зоны проникновения краевого эффекта качественно сравниваются с результатами экспериментов, проведенных на композитных стержнях.

**1. Анализ продольных колебаний анизотропной полосы.** Рассмотрим уравнения динамики упругой ортотропной полосы для плоской деформации [1, 2]

$$(1.1) \quad \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + G \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) = \rho c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$G \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} \left( \nu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \rho c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

при следующих краевых условиях на боковых поверхностях полосы и на торце:

$$(1.2) \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } y = -1; 1,$$

$$\sigma_x = \sigma^0(y, t), \quad \tau = \tau^0(y, t) \quad \text{при } x = 0,$$

причем напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau$  рассчитываются по формулам [3]. Здесь  $U$  и  $W$  — смещения вдоль и поперек слоя;  $E_1, E_2, G$  — модули упругости;  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты Пуассона;  $\rho$  — приведенная плотность материала;  $c = [E_1/\rho(1-\nu_1\nu_2)]^{1/2}$  — приведенная скорость распространения возмущений в направлении оси  $x$ . За единицы измерения приняты:  $2h$  — толщина пластины,  $\tau$  — время, в течение которого возмущение в сечении  $x = 0$  пробегает расстояние, равное  $h$ :  $t_1 = tc/h$ ,  $x_1 = x/h$ ,  $y_1 = y/h$ . В дальнейшем индекс 1 опущен.

Сведем задачу (1.1), (1.2) к одномерной. Разложим перемещения  $U$  и  $W$  в ряды по полиномам Лежандра  $P_i(y)$  [2]. Уравнения системы (1.1) и краевые условия (1.2) умножим на полиномы Лежандра и проинтегрируем по толщине пластины. При интегрировании по частям соотношений (1.1) используются условия на боковых поверхностях (1.2). Воспользовавшись известными соотношениями для полиномов Лежандра, получим две бесконечные системы уравнений (для изотропного материала аналогичные системы приведены в [1], первая из которых соответствует задаче о продольных колебаниях, а вторая — задаче об изгибных колебаниях полосы). Будем рассматривать задачу только о продольных колебаниях при стационарном краевом режиме. В разложении

$$(1.3) \quad U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{2} U_i(x, t) P_i(y), \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{2} W_i(x, t) P_i(y)$$

ограничимся приближением, учитывающим только функции  $U_0, W_1, U_2$ . Для данного случая система уравнений продольных колебаний полосы примет вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + 3\nu_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$a_{21} \frac{\partial U_0}{\partial x} - \delta^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - W_1 + a_{23} \frac{\partial U_2}{\partial x} - \alpha_1^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$a_{32} \frac{\partial W_1}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - U_2 + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} = 0,$$

где  $a_{21} = -v_1/3$ ;  $a_{23} = 5G(1 - v_1v_2)/3E_2$ ;  $a_{32} = -1/5$ ;  $\delta^2 = G(1 - v_1v_2)/3E_2$ ;  $\varepsilon^2 = E_1/15G(1 - v_1v_2)$ ;  $\alpha_1^2 = E_1/3E_2$ ;  $\alpha_2^2 = E_1/15G(1 - v_1v_2)$ .  
Крайевые условия для системы (1.4):

$$(1.5) \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} + 3v_2 W_1 = \int_{-1}^1 \sigma^0(y, t) P_0(y) dy,$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} + 5U_2 = \int_{-1}^1 \tau^0(y, t) P_2(y) dy, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} = \int_{-1}^1 \sigma^0(y, t) P_2(y) dy.$$

Для решения системы (1.4) введем разрешающую функцию  $V(x, y)$  такую, что

$$(1.6) \quad U_0 = 3v_2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad W_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{1}{a_{23}} \left[ \alpha_1^2 \frac{\partial^4 V}{\partial t^4} - (\delta^2 + \alpha_1^2) \frac{\partial^4 V}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - 3v_2 a_{21} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right].$$

Тогда первое и второе уравнения системы (1.4) удовлетворяются тождественно, а третье дает для разрешающей функции  $V(x, t)$  уравнение

$$(1.7) \quad \left[ a_{23} a_{32} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) + 3v_2 a_{21} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] V = 0.$$

При стационарном возбуждении колебаний решение для разрешающей функции  $V(x, t)$  будем искать как

$$(1.8) \quad V(x, t) = A \exp [i(\omega_1 t - kx)],$$

где  $\omega_1 = \omega h/c$  — безразмерная частота;  $h$  — полутолщина пластины. В дальнейшем индекс 1 опустим. Подставляя (1.8) в (1.7), получим бикубическое уравнение

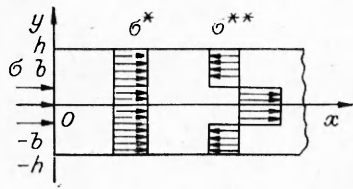
$$(1.9) \quad (k^2 - \omega^2) (\varepsilon^2 k^2 + 1 - \alpha_2^2 \omega^2) (\delta^2 k^2 + 1 - \alpha_1^2 \omega^2) + 3v_2 a_{21} k^2 (\varepsilon^2 k^2 + 1 - \alpha_2^2 \omega^2) + a_{23} a_{32} k^2 (k^2 - \omega^2) = 0.$$

Решая (1.9), найдем корни  $k_{1,2} = \pm \gamma_1$ ,  $k_{3,4} = \pm \gamma_2$ ,  $k_{5,6} = \pm \gamma_3$ . Тогда для волны, распространяющейся вправо ( $x > 0$ ), выражение для разрешающей функции  $V(x, t)$  запишется в виде

$$(1.10) \quad V(x, t) = \sum_{n=1}^3 A_n \exp [i(\omega t - \gamma_n x)].$$

Амплитуды  $A_n$  для стационарного краевого режима при  $x = 0$  определяются из краевых условий (1.5).

Процесс нахождения корней бикубического уравнения и дальнейшего анализа значительно упростится, если положить в системе уравнений (1.4) коэффициенты  $a_{21} = a_{32} = 0$ , которые по абсолютной величине меньше единицы. Опуская члены с коэффициентами  $a_{21}$ ,  $a_{32}$  при младших производных, не меняем тип уравнения (1.7); полученное решение для функций  $U_0$ ,  $W_1$ ,  $U_2$  отличается от полного решения (1.6) членами за малыми параметрами порядка  $|a_{21}|$ ,  $|a_{32}|$ . Ниже при сравнении экспериментальных и теоретических результатов будет произведен численный расчет  $U(x, t)$  как с учетом коэффициентов  $a_{21}$  и  $a_{32}$ , так и без их учета.



Р и с. 1

Итак, полагая в уравнении (1.9)  $a_{21} = a_{32} = 0$ , находим

$$(k^2 - \omega^2)(\varepsilon^2 k^2 + 1 - \alpha_2^2 \omega^2)(\delta^2 k^2 + 1 - \alpha_1^2 \omega^2) = 0,$$

откуда сразу определяются корни уравнения

$$k_{1,2} = \pm \omega, \quad k_{3,4} = \pm \delta^{-1}(\alpha_1^2 \omega^2 - 1)^{1/2}, \\ k_{5,6} = \pm \varepsilon^{-1}(\alpha_2^2 \omega^2 - 1)^{1/2}.$$

Решение для разрешающей функции  $V(x, t)$  имеет вид

$$V(x, t) = A_1 \exp[-i\omega(t-x)] + A_2 \exp[i\omega t - x(1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2}/\delta] + \\ + A_3 \exp[i\omega t - x(1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}/\varepsilon].$$

При изменении частотного параметра  $\omega$  будет меняться и характер решения и могут возникать различные варианты. Рассмотрим только случай, когда  $\alpha_1^2 \omega^2 < 1$ ,  $\alpha_2^2 \omega^2 < 1$  (остальные случаи  $\alpha_1^2 \omega^2 > 1$ ,  $\alpha_2^2 \omega^2 > 1$ ;  $\alpha_1^2 \omega^2 < 1$ ,  $\alpha_2^2 \omega^2 > 1$  ... анализируются аналогично):

$$(1.11) \quad U_0(x, t) = iA_{11} \exp[i\omega(t-x)] + A_{12} \exp[i\omega t - x\delta^{-1}(1 - \alpha_1^2 \omega^2)] + \\ + A_{13} \exp[i\omega t - x\varepsilon^{-1}(1 - \alpha_2^2 \omega^2)], \\ W_1(x, t) = A_{22} \exp[i\omega t - x\delta^{-1}(1 - \alpha_1^2 \omega^2)] + A_{23} \exp[i\omega t - x\varepsilon^{-1}(1 - \alpha_2^2 \omega^2)], \\ U_2(x, t) = A_{33} \exp[i\omega t - x\varepsilon^{-1}(1 - \alpha_1^2 \omega^2)].$$

Здесь коэффициенты  $A_{ij}$  зависят от частоты  $\omega$ . Получено решение для продольных колебаний в виде трех составляющих: решения типа проходящей волны с амплитудой  $A_{11}$  и двух краевых эффектов, которые локализируются вблизи торца, к которому приложена нагрузка. Зона проникновения динамического краевого эффекта определяется параметрами  $\delta$  и  $\varepsilon$ . Чем меньше эти параметры и частота, тем ближе к торцу полосы происходит затухание краевого эффекта, и наоборот.

Теперь рассмотрим анизотропную полосу, к торцу которой ( $x = 0$ ) на участке шириной  $2b$  приложена стационарная динамическая нагрузка (рис. 1). Разложим нагрузку  $\sigma$  единичной интенсивности, действующую на торец полосы на две составляющие:  $\sigma^*$ , равномерно распределенная по всей ширине полосы с интенсивностью  $\beta$ , и самоуравновешенная  $\sigma^{**}$ . Тогда граничные условия (1.4) при отсутствии сдвигающих усилий  $\tau^0$  и с учетом разложения действующей нагрузки  $\sigma$  на две составляющие  $\sigma^*$  и  $\sigma^{**}$  примут вид

$$(1.12) \quad \frac{\partial U_0}{\partial x} + 3\nu_2 W_1 = \sigma_1, \quad \frac{\partial W_1}{\partial x} + 5U_2 = 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} = \sigma_2,$$

$$\text{где} \quad \sigma_1 = \int_{-1}^1 \sigma^* P_0(y) dy; \quad \sigma_2 = \int_{-1}^1 \sigma^{**} P_2(y) dy.$$

Для определения коэффициентов  $A_{ij}$  в уравнениях (1.11) подставим разрешающую функцию  $V(x, t)$  в (1.6) и (1.12). После некоторых преобразований получим следующие выражения для  $A_{ij}$ :

$$(1.13) \quad A_{11} = 3\nu_2 \left[ \frac{\sigma_2}{3\nu_2 \omega^2} - \frac{5\delta^3 \sigma_2}{\omega^2 \delta^2 + 1 - \alpha_1^2 \omega^2} \left( \frac{\delta^2 (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}}{\varepsilon^2 \gamma (1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon}{(1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2} (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}} - \frac{a_{23} \sigma_2}{\gamma} \right) \right], \\ A_{12} = - \frac{15\nu_2 \delta^3 \sigma_2}{\omega^2 \delta^2 + 1 - \alpha_1^2 \omega^2} \left[ \frac{\delta^2 (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}}{\varepsilon^2 \gamma (1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2}} + \frac{\varepsilon}{(1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2} (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}} \right],$$

$$A_{13} = 3v_2 a_{23} \sigma_2 (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2} / \varepsilon \gamma,$$

$$A_{23} = a_{23} \sigma_2 / \varepsilon^2 \gamma, \quad A_{33} = \gamma \varepsilon / a_{23} (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}$$

$$(\gamma = \varepsilon^{-4} [\delta^2 (1 - \alpha_2^2 \omega^2) - \varepsilon^2 (1 - \alpha_1^2 \omega^2)]).$$

В рассматриваемом приближении, в котором учитываются только функции  $U_0, W_1, U_2$ , для продольных колебаний полосы соотношения (1.3) дают

$$(1.14) \quad \tilde{U}(x, y, t) = 0,5 [U_0(x, t) P_0(y) + 2,5 U_2(x, t) P_2(y)].$$

Подставим выражения для полиномов Лежандра и выражения для  $U_0(x, t)$  и  $U_2(x, t)$  из (1.11) в (1.14):

$$(1.15) \quad \tilde{U}(x, y, t) - 0,5 A_{11} \sin \omega(t - x) = R(x, y) \exp(i\omega t),$$

$$R(x, y) = 0,5 \{ A_{12} \exp[-x \delta^{-1} (1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2}] + [A_{13} + 2,5(3y^2 - 1)] \times \exp[-x \varepsilon^{-1} (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}] \}.$$

Динамический краевой эффект  $R(x, y)$  определяется правой частью соотношения (1.15) и имеет экспоненциальные множители, которые при возрастании  $x$  убывают тем быстрее, чем больше  $\delta^{-1}$  и  $\varepsilon^{-1}$ .

Введем зону пропикновения динамического краевого эффекта  $q$  такую, что

$$(1.16) \quad \alpha = R(q, y) / R(0, y),$$

$$\alpha = \frac{A_{12} \exp[-q \delta^{-1} (1 - \alpha_1^2 \omega^2)^{1/2}] + [A_{13} + 2,5 A_{33} (3y^2 - 1)] \exp[-q \varepsilon^{-1} (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2}]}{A_{12} + A_{13} + 2,5 A_{33} (3y^2 - 1)}.$$

Вне этой зоны краевой эффект  $R(x, y)$  пренебрежимо мал по сравнению с  $R(0, y)$ : в практических расчетах принималось  $\alpha = 0,05$ , что связано с точностью измерений динамических процессов.

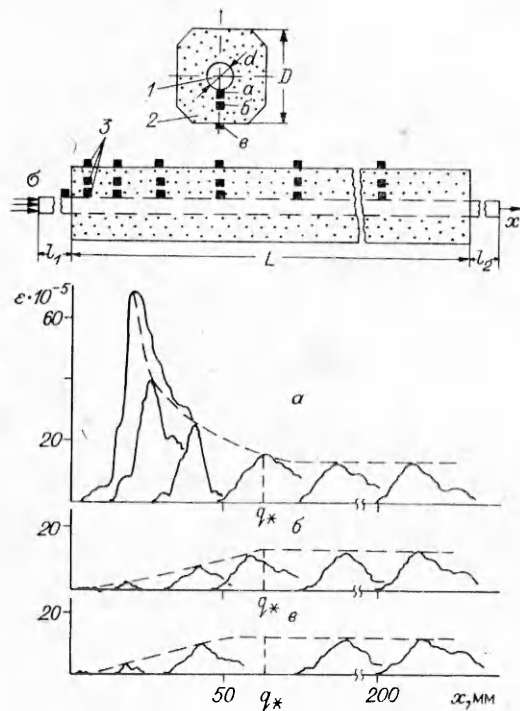
При  $\varepsilon \gg \delta$  величина  $q$  определяется соотношением

$$q = \varepsilon (\ln \alpha - \ln \zeta) / (1 - \alpha_2^2 \omega^2)^{1/2},$$

$$\text{где } \zeta = \frac{A_{13} + 2,5 A_{33} (3y^2 - 1)}{A_{12} + A_{13} + 2,5 A_{33} (3y^2 - 1)}.$$

2. Качественное сопоставление теоретических и экспериментальных результатов. Полученные теоретические оценки для зоны краевого эффекта

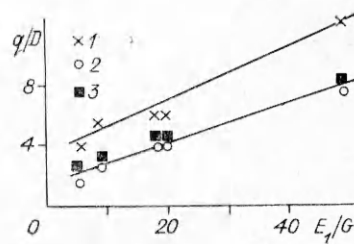
Номер образца	мм						$E_c$	МПа				$\nu_1$	$\nu_2$	$\rho, \text{ г/см}^3$	$\omega^2$	$\varepsilon_1$	$\delta_1$	$\frac{E_1}{G}$	$\frac{q_0}{D}$	$\frac{q_1}{D}$	$\frac{q_2}{D}$	
	$d$	$D$	$L$	$l_1$	$l_2$	$E_2$		$E_1$	$E_2$	$G$	$\chi, \%$											
1	3	20	400	500	480	700	4 700	850	260	2	0,072	1,36	0,03	1,12	0,3	18,0	4,2	4,4	6	6	6	6
2	3	20	400	500	480	2400	7 150	2920	880	2	0,163	1,36	0,02	0,76	0,3	8,1	2,7	2,9	5,6	5,6	5,6	5,6
3	6	42	400	500	480	2700	56 000	4000	1180	20	0,03	2,52	0,002	1,79	0,3	47,5	7,3	7,5	12	12	12	12
4	3	30	400	500	400	2600	5 100	3200	940	1	0,25	1,3	0,05	0,63	0,3	5,4	1,7	2,5	4	4	4	4
5	6	20	400	500	400	2600	18 000	3400	1000	8	0,073	1,7	0,01	1,13	0,3	18,6	4,2	4,4	6	6	6	6



Р и с. 2

[4] способом нагружения образца (в стальном стержне создавался импульс сжатия) и расположением тензодатчиков, которые были наклеены в трех уровнях по сечению и длине композита. На рис. 2 приведены расположение датчиков по сечениям  $a$ — $в$  и типичные осциллограммы, полученные с тензодатчиков для одного из проведенных экспериментов (1 — стальной стержень диаметром  $d$ , 2 — эпоксидное связующее, 3 — тензодатчики). Результаты экспериментов показывают, что амплитуда импульса деформаций на стальном стержне убывает от торца и возрастает в связующем. Начиная с некоторого расстояния  $x = q_*$  от торца  $x = 0$ , по композиту (как по стальному стержню, так и по связующему) распространяется импульс с постоянной амплитудой. Величину  $q_*$  назовем экспериментальной зоной проникновения краевого эффекта. В таблице для всех испытанных образцов приведены геометрические и жесткостные характеристики композитных стержней и их составляющих, а также замеренные зоны проникновения краевого эффекта  $q_*$ . Отметим, что в дополнительно проведенной серии экспериментов с расположением датчиков в трех сечениях была поставлена задача найти изменение  $q_*$  по сечению композита. Однако разброс экспериментальных данных, а также скважность расположения датчиков не позволили определить с достаточной точностью характер этого изменения.

Для нахождения осредненных характеристик  $E_1, E_2, G, \nu_1, \nu_2$  испытываемых образцов использовалось правило смесей [5]. При определении  $\omega$  (частоты возбуждения) выберем характерное время, в течение которого в эксперименте существенно меняется деформация, и отождествим этот отрезок времени с полупериодом некоторого стационарного динамического воздействия, причем выбор сделаем на достаточном удалении от торца композитного стержня, когда все динамические краевые эффекты успевают исчезнуть. В таблице приведены оценка  $\omega$  для каждого эксперимента и результаты теоретических расчетов и экспериментов. В расчетах принималось: для смолы  $\rho_c = 1,2$  г/см<sup>3</sup>, для стали  $\rho_a = 7,8$  г/см<sup>3</sup>,  $E_a = 2,1 \cdot 10^5$  МПа. Здесь  $E_c$  — модуль упругости смолы,  $\chi$  — объемное содержание стали в композитном стержне,  $q_0$  — теоретическая величина краевого эффекта при  $a_{21} = a_{32} = 0$ ,  $q_1$  — то же, но с учетом коэффициен-



Р и с. 3

(1.16) сопоставим с результатами экспериментов, проведенных на композитных стержнях [4]. В [4] экспериментально определялось поле продольных деформаций в однонаправленном композите, состоящем из стального стержня и эпоксидного связующего. К торцу стального стержня прикладывалась динамическая нагрузка. В дополнение к опубликованным экспериментальным результатам проведена серия экспериментов, отличающаяся от

тов  $a_{21}$  и  $a_{32}$ ,  $q_*$  — экспериментальная величина краевого эффекта. Разница между значениями  $q_0$  и  $q_1$  увеличивается с возрастанием коэффициента  $a_{21}$ , который определяется  $\nu_2$ . При росте  $\nu_2$  в проведенных вычислениях с 0,03 до 0,25 разница между  $q_0$  и  $q_1$  возрастает с 3 до 30 %. Для наглядности теоретические и экспериментальные величины краевых эффектов показаны на рис. 3, где 1 — экспериментальное значение  $q_*$ , 2 — теоретическое значение  $q_0$ , 3 — теоретическое значение  $q_1$  при  $a_{21} \neq a_{32} \neq 0$ .

Анализ полученных результатов показывает, что с возрастанием параметра анизотропии  $E_1/G$  как в экспериментах, так и в теоретических расчетах зона проникновения краевого эффекта увеличивается, по численные значения для  $q$  и  $q_*$  различаются. Экспериментальные значения  $q_*$  в 1,2—1,6 раза больше, чем теоретические.

Возвращаясь к рассматриваемой задаче и качественному сопоставлению теоретических расчетов с результатами экспериментов, отметим, что это сопоставление не совсем корректно. Во-первых, в расчетах не учитывалась нагрузка, реализованная в эксперименте. Во-вторых, расчет проводился для плоской деформации, в эксперименте реализовывалось осесимметрическое нагружение. В-третьих, предлагаемая теория не отражает ярко выраженной структуры испытываемых образцов. Однако качественное совпадение предлагаемой теории для определения глубины проникновения краевого эффекта и результатов экспериментов получено. С увеличением параметра анизотропии  $E_1/G$  как в теоретических расчетах, так и в эксперименте зона краевого эффекта возрастает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. — Л., 1972.
2. Корнев В. М. Уточненные теории растяжения и изгиба ортотропной арматуры // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1982. — Вып. 51.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.; Л., 1974.
4. Демешкин А. Г., Корнев В. М. О распространении импульса деформаций по композитным стержням // Механика композит. материалов. — 1984. — № 1.
5. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетере Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. — Рига, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 2/XI 1989 г.

УДК 539.3

Н. С. Астапов, В. М. Корнев

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЛОКА УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В рамках плоской динамической задачи теории упругости рассматривается деформирование блока упругого материала при динамическом нагружении. Численное решение основано на конечно-разностном методе С. К. Годунова [1] и его модификаций [2—4] для расчета разрывных течений. Изучается напряженно-деформированное состояние блока при разных системах нагружения, моделирующих воздействие на блок высокоэнергетического ударника различных конфигураций. При специальной конфигурации тупого инструмента впереди него образуется клин из разрушаемого материала, т. е. инструмент как бы самозатачивается при каждом ударе, а впереди этого клина имеется область растягивающих напряжений, что может привести к появлению трещины отрыва.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Определяются функции  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $\sigma_1(x, y, t)$ ,  $\sigma_2(x, y, t)$ ,  $\tau_{12}(x, y, t)$ , удовлетворяющие для  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq T_*$  системе уравнений (см. [2—4])

$$(1) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$