

УДК 532.529

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

И. В. Деревич

Институт высоких температур РАН, 111250 Москва

Представлена статистическая модель столкновения частиц со случайно-шероховатой поверхностью. Получены замкнутые выражения для функций плотности вероятности распределения коэффициентов восстановления импульса. Показано, что коэффициент восстановления нормальной компоненты импульса на шероховатой поверхности при малых углах падения частиц может быть больше единицы.

Пневмотранспорт дисперсных материалов в трубопроводных системах может осуществляться турбулентным потоком в двух принципиально различных режимах: 1) транспортировкой потока мелких частиц, время динамической релаксации которых порядка интегрального временного масштаба турбулентности (дисперсная примесь таких частиц вовлекается в энергоемкие флуктуации скорости несущего газа; двухфазный поток мелких частиц в трубах ведет себя как гомогенная система); 2) транспортировкой крупных частиц со временем динамической релаксации, значительно превосходящим характерное время жизни энергоемких турбулентных вихрей (хаотическое движение примеси обусловлено столкновениями частиц с поверхностью канала и между собой). Отметим, что транспорт примеси крупных частиц может быть экономически более выгодным вследствие уменьшения затрат на размол частиц.

Устойчивость работы пневмотранспортных систем зависит от однородности распределения концентрации дисперсной примеси в сечении. Рост интенсивности хаотического движения частиц приводит к более равномерному профилю концентрации. Для крупных частиц пульсации скорости возникают в основном в результате их соударения со стенками. Случайные компоненты скорости частиц появляются из-за несферичности формы частиц и шероховатости поверхности каналов. В результате взаимодействия частиц со стенкой наблюдается их вращение вокруг точки контакта. Сила тяжести и потеря аксиальной скорости частиц в результате трения о стенку вызывают скоростное скольжение фаз. Отличие в скоростях газа и частиц и их вращение приводят к возникновению силы Магнуса, которая обеспечивает интенсивное перемещение частиц поперек канала. Для прогнозирования движения крупных частиц в каналах необходима модель соударения частиц со случайно-шероховатой поверхностью. В данной работе исследуется столкновение сферических частиц с шероховатой стенкой.

В [1, 2] шероховатость стенки моделируется синусоидальной поверхностью с привлечением метода численного расчета случайных траекторий частиц в переменных Лагранжа. Результаты комплексного экспериментального и теоретического исследования процесса столкновения частиц со случайно-шероховатой поверхностью представлены в [3, 4]. Шероховатая стенка в [3, 4] описывается плоскими поверхностями со случайным углом наклона их к оси канала. На основе прямого численного моделирования стохастических траекторий

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 94-4348) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00353).

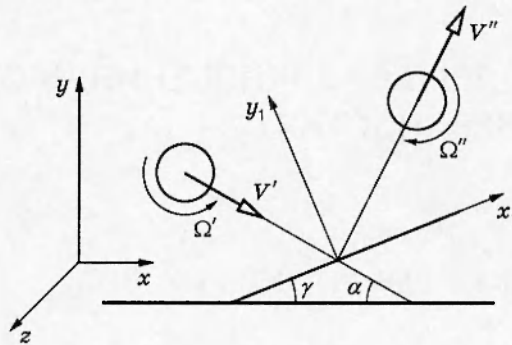


Рис. 1

проведены расчеты столкновения частиц с нерегулярной поверхностью. Однако использование метода прямого численного моделирования, требующего значительных затрат процессорного времени на супермощных компьютерах, в данной задаче не оправданно и не позволяет выделить основные параметры, регулирующие процесс столкновения частиц со случайной поверхностью.

В предлагаемой работе впервые на основе теории стохастических процессов [5] получены аналитические формулы для плотности вероятности распределения коэффициентов восстановления импульса частиц в зависимости от физических свойств материалов частиц и стенки, диаметров частиц и характерного размера шероховатости. Формулы могут использоваться при записи граничных условий для уравнений турбулентного движения дисперсной примеси с учетом вращения частиц в переменных Эйлера [6, 7]. Проведено сопоставление результатов расчета параметров частиц, отраженных от шероховатой стенки, с экспериментальными данными [3, 4].

1. Модель столкновения частиц с шероховатой поверхностью. Рассматривается поверхность со случайной песочной шероховатостью, которая характеризуется двумя параметрами: высотой случайных бугорков и расстоянием между бугорками. Исследуется поверхность с характерной высотой бугорков меньше диаметра частиц. Если диаметр частицы меньше характерного расстояния между случайными выступами на поверхности, то параметры отраженных от поверхности частиц зависят от детальной микроструктуры поверхности. Частицы, диаметр которых превосходит характерный размер между бугорками, сталкиваются с несколькими случайными выступами на поверхности, что приводит к «осреднению» случайной структуры. При этом эффективная высота случайных элементов шероховатости для таких частиц понижается по сравнению со случаем более мелких частиц.

Элемент шероховатости представляется плоской поверхностью, наклоненной под случайным углом γ к оси канала (рис. 1). Угол падения частиц α и случайный угол наклона плоскости γ отсчитываются от гладкой поверхности, параллельной стенке канала. Одним штрихом обозначены компоненты линейной скорости V и скорости углового вращения частиц вокруг своей оси Ω до столкновения, двумя штрихами — после.

Компоненты скорости в системе координат наклонной плоскости (x_1, y_1) выражаются через компоненты скорости в системе координат, связанной со стенкой (x, y) канала, в виде

$$V'_x(\gamma) = V'_x \cos \gamma - V'_y \sin \gamma, \quad V'_y(\gamma) = V'_y \cos \gamma + V'_z \sin \gamma. \quad (1.1)$$

Здесь V'_x , V'_y и $V'_z(\gamma)$, $V'_y(\gamma)$ — компоненты скорости частицы до столкновения относительно систем координат (x, y) и (x_1, y_1) .

После соударения со случайной поверхностью компоненты скорости относительно стенки канала выражаются через компоненты скорости частицы, отраженной от случайной наклонной поверхности:

$$V_x'' = V_x''(\gamma) \cos \gamma - V_y''(\gamma) \sin \gamma, \quad V_y'' = V_y''(\gamma) \cos \gamma + V_x''(\gamma) \sin \gamma. \quad (1.2)$$

Здесь V_x'' , V_y'' и $V_x''(\gamma)$, $V_y''(\gamma)$ — компоненты скорости частицы по отношению к стенке канала и случайной плоскости после удара.

Частицы сталкиваются только со случайными плоскостями, угол наклона которых удовлетворяет соотношению $\gamma \geq -\alpha$. В предположении о песочной шероховатости стенки канала угол наклона случайных плоскостей аппроксимируется нормальным распределением с нулевым средним значением и дисперсией Δ . Вероятность удара частицы о случайную поверхность зависит от угла ее падения. Угол наклона плоскости к стенке канала γ , при котором возможно соударение частицы со случайной поверхностью, является случайным углом столкновения. В работе на основе теории случайного броуновского движения [5] конструируется функция условной плотности вероятности распределения угла столкновения

$$P(\gamma, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\Delta} \right) \right]^{-1} \left[\exp \left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta^2} \right) - \exp \left(-\frac{(2\alpha + \gamma)^2}{2\Delta^2} \right) \right], \quad (1.3)$$

$$P(\gamma, \alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma \leq -\alpha.$$

Здесь $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ — стандартный интеграл вероятности. Плотность функции

распределения (1.3) удовлетворяет условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} P(\gamma, \alpha) d\gamma = 1$.

Для углов падения частиц, значительно превосходящих дисперсию случайного угла столкновения $\alpha \gg \Delta$, функция (1.3) превращается в обычное нормальное распределение $P(\gamma, \alpha) = 1/(\sqrt{2\pi}\Delta) \exp(-\gamma^2/(2\Delta^2))$.

Для малых углов падения частиц $\alpha \ll \Delta$ условная вероятность (1.3) соответствует функции плотности вероятности Рэлея [5] $P(\gamma, \alpha) = \gamma/\Delta^2 \exp(-\gamma^2/(2\Delta^2))$.

На основе функции условной вероятности (1.3) определяются среднее значение и дисперсия случайного угла столкновения

$$\langle \gamma \rangle = \alpha \frac{1 - \operatorname{erf}(A)}{\operatorname{erf}(A)}, \quad A = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\Delta}; \quad (1.4)$$

$$D(\gamma) = (\langle \gamma^2 \rangle - \langle \gamma \rangle^2)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Среднее значение квадрата случайного угла γ равно

$$\langle \gamma^2 \rangle = \Delta^2 [\operatorname{erf}(A)]^{-1} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} A \exp(-A^2) - 4A^2 [1 - \operatorname{erf}(A)] \right\}. \quad (1.6)$$

Из (1.4)–(1.6) следует, что для достаточно больших углов падения частиц $\alpha \gg \Delta$ среднее значение случайного угла $\langle \gamma \rangle \rightarrow 0$, а его дисперсия принимает максимальное значение $D(\gamma) = \Delta$. Для малых углов падения $\alpha \ll \Delta$ получаем максимальное значение средней величины угла и минимальную дисперсию $\langle \gamma \rangle \rightarrow \sqrt{\pi/2}\Delta$, $D(\gamma) \rightarrow \Delta(2 - \pi/2)^{1/2}$.

Из (1.1)–(1.3) следует, что для определения связи между скоростями падающих и отраженных частиц необходима модель, описывающая процесс их столкновения с плоской поверхностью.

2. Модель столкновения частиц с поверхностью. Эффективные коэффициенты восстановления импульса. Рассматривается столкновение частиц с поверхностью при сравнительно небольших скоростях, характерных для режима пневмотранспорта дисперсной примеси (порядка десяти метров в секунду). В этом случае можно не учитывать пластическую деформацию материалов частиц и канала.

Преобразование линейной скорости и скорости углового вращения частицы в результате удара о плоскость описывается в рамках модели, полученной из баланса импульса в процессе соударения [1, 8]. Различают два режима столкновения: с проскальзыванием относительно поверхности и без проскальзывания частицы. Условие отсутствия проскальзывания имеет вид [1, 8]

$$\left| V'_x(\gamma) + \frac{d_p}{2} \Omega'_z(\gamma) \right| \leq \frac{7}{2} \mu_0 (1 + e) |V'_y(\gamma)|, \quad (2.1)$$

где d_p — диаметр частицы; μ_0 — коэффициент статического трения; e — коэффициент восстановления нормальной компоненты импульса.

После столкновения без проскальзывания компоненты скорости частицы преобразуются к виду

$$V''_x(\gamma) = \frac{5}{7} V'_x(\gamma) - \frac{1}{7} d_p \Omega'_z(\gamma), \quad V''_y(\gamma) = -e V'_y(\gamma), \quad \Omega''_z(\gamma) = -2 \frac{V'_x(\gamma)}{d_p}. \quad (2.2)$$

В случае нарушения неравенства (2.1) реализуется режим с проскальзыванием, и компоненты частицы скорости после удара равны

$$V''_x(\gamma) = \frac{\varepsilon}{7} V'_x(\gamma) + \mu_d \varepsilon_0 (1 + e) V'_y(\gamma), \quad V''_y(\gamma) = -e V'_y(\gamma), \quad (2.3)$$

$$\Omega''_z(\gamma) = \Omega'_z(\gamma) + 5 \mu_d (1 + e) \varepsilon_0 \frac{V'_y(\gamma)}{d_p},$$

где μ_d — коэффициент динамического трения; ε_0 — индекс, принимающий значения ± 1 в зависимости от направления относительной скорости между частицей и стенкой:

$$\varepsilon_0 = \text{sign} \left(V'_x(\gamma) + \frac{d_p}{2} \Omega'_z(\gamma) \right). \quad (2.4)$$

Определим эффективные коэффициенты восстановления импульса и преобразования угловой скорости частицы по отношению к стенке канала:

$$k_t = \frac{V''_x}{V'_x}, \quad k_n = \left| \frac{V''_y}{V'_y} \right|, \quad k_\Omega = \frac{d_p \Omega''_z}{2 V'_x}. \quad (2.5)$$

Используя преобразования компонент скорости (1.1) и (1.2) и соотношения между параметрами частицы после удара о случайную поверхность (2.1)–(2.4), получим замкнутые выражения для коэффициентов восстановления импульса (2.5) относительно стенки канала.

В случае отсутствия проскальзывания (условие (2.1)) имеют место соотношения

$$|\cos \gamma - z \sin \gamma + A_\Omega| \leq \frac{7}{2} \mu_0 (1 + e) |z \cos \gamma + \sin \gamma|,$$

$$k_t = \left[\frac{5}{7} (\cos \gamma - z \sin \gamma) - \frac{2}{7} A_\Omega \right] \cos \gamma - e (z \cos \gamma + \sin \gamma) \sin \gamma,$$

$$k_n = e \left(\cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{z} \right) \cos \gamma + \left[\frac{5}{7} \left(\frac{\cos \gamma}{z} - \sin \gamma \right) - \frac{2}{7} A_\Omega \right] \sin \gamma, \quad (2.6)$$

$$k_{\Omega} = -\frac{5}{7}(\cos \gamma - \sin \gamma) + \frac{2}{7} A_{\Omega},$$

где $z = \operatorname{tg} \alpha = V'_y/V'_x$ — тангенс угла падения частицы на стенку; $A_{\Omega} = d_p \Omega'_z / (2V'_x)$ — параметр, связанный с угловым вращением частицы до соударения.

Эффективные коэффициенты восстановления импульса при столкновении с проскальзыванием имеют вид

$$\begin{aligned} k_t &= [(\cos \gamma - z \sin \gamma) - \mu_d(1+e)\varepsilon_0(\sin \gamma + z \cos \gamma)] \cos \gamma - e(z \cos \gamma + \sin \gamma) \sin \gamma, \\ k_n &= e\left(\frac{\sin \gamma}{z} + \cos \gamma\right) \cos \gamma + \left[\left(\frac{\cos \gamma}{z} - \sin \gamma\right) - \mu_d(1+e)\varepsilon_0\left(\frac{\sin \gamma}{z} + \cos \gamma\right)\right] \sin \gamma, \\ k_{\Omega} &= A_{\Omega} - \frac{5}{2} \mu_d(1+e)\varepsilon_0(\sin \gamma + z \cos \gamma), \quad \varepsilon_0 = \operatorname{sign}(\cos \gamma - z \sin \gamma + A_{\Omega}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Соотношения (2.6), (2.7) и выражение для функции плотности распределения условной вероятности угла столкновения (1.3) позволяют определить функции распределения вероятности эффективных коэффициентов восстановления импульса частиц по отношению к стенке канала

$$\Phi(k, \alpha) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(\gamma, \alpha) \varphi'(\gamma) d\gamma \right]^{-1} P(\gamma, \alpha) \varphi'(\gamma). \quad (2.8)$$

Здесь $k = \varphi(\gamma)$, $\varphi'(\gamma)$ — монотонная зависимость коэффициента восстановления от случайного угла и ее производная. Плотность вероятности (2.8) нормирована на единицу.

3. Результаты расчетов. Для иллюстрации предложенной модели привлекаются экспериментальные данные, полученные на стеклянных шариках в горизонтальном плоском канале со стальной поверхностью [4]. Средняя высота случайных выступов на поверхности составляет 25 мкм со среднеквадратичным отклонением 5 мкм. На рис. 2, а, б показаны зависимости осредненных коэффициентов восстановления импульса соответственно в продольном и нормальном направлениях от угла падения частиц. Коэффициенты статического и динамического скольжения и коэффициент восстановления нормальной компоненты импульса при ударе стекла о сталь принимаются равными $\mu_0 = \mu_d = 0,4$, $e = 0,8$ [9] (треугольники и квадраты на рис. 2 — экспериментальные данные [4]). Кривые 1 и 2 соответствуют диаметрам частиц $d_p = 110$; 460 мкм. Дисперсии угла наклона случайных плоскостей для мелких и более крупных частиц выбирались равными $\Delta = 8^\circ$ и $\Delta = 5^\circ$. Видно, что средний коэффициент восстановления импульса в нормальном направлении в отличие от продольного заметно зависит от угла падения, причем для малых углов падения $\alpha < 15^\circ$ величина $k_n > 1$. Это связано с преобразованием продольной компоненты скорости частицы после удара со случайной поверхностью в нормальную компоненту отраженных частиц. С ростом размера частиц влияние шероховатости на коэффициенты восстановления ослабевает.

На рис. 3 представлены результаты расчетов функций плотности распределения вероятностей коэффициентов восстановления импульса в сравнении с экспериментальными данными [4] при различных углах падения частиц $d_p = 110$ мкм. Рис. 3, а, б соответствуют нормальному и продольному коэффициентам восстановления импульса частиц. Экспериментальные значения в диапазоне от 0 до 15° показаны ступенчатыми функциями, квадраты соответствуют результатам расчетов. При малых углах падения частиц шероховатость поверхности приводит к появлению широкого спектра значений нормальной и аксиальной компонент скорости отраженных частиц. Отметим, что представленные в [4] экспериментальные данные по функциям распределения при других углах падения и диаметрах частиц удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по предлагаемой модели.

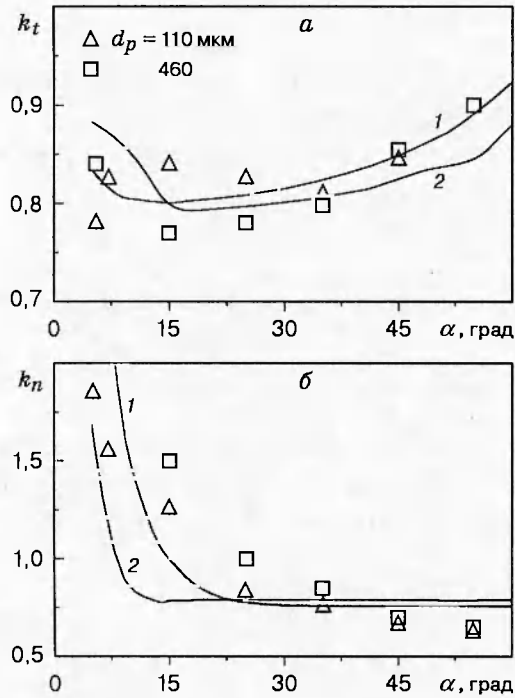


Рис. 2

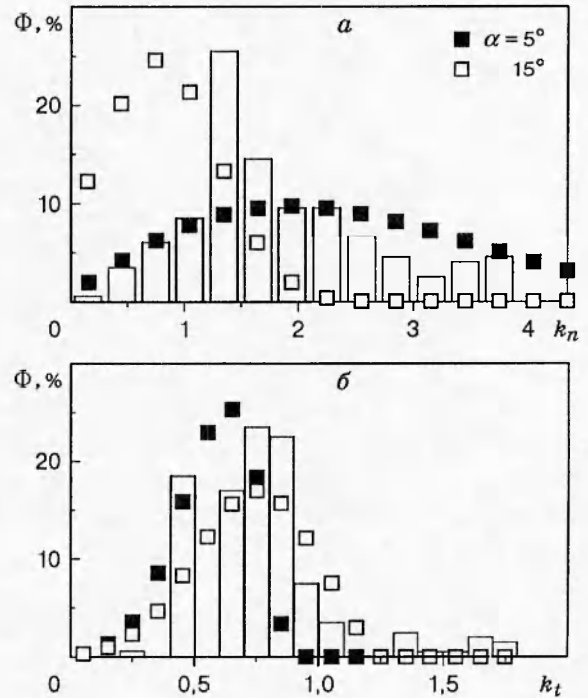


Рис. 3

Заключение. Из проведенного исследования следует, что коэффициент восстановления нормальной компоненты импульса на шероховатой поверхности при малых углах падения частиц может быть больше единицы.

С ростом угла падения распределение функции плотности вероятности сужается, а среднее значение коэффициента восстановления становится меньше единицы. В случае продольного коэффициента восстановления импульса наибольший вклад шероховатости в параметры отраженных частиц реализуется при больших углах падения частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Matsumoto S., Saito S. Monte-Carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model // J. Chem. Engng Japan. 1970. V. 3, N 2. P. 223-230.
2. Matsumoto S., Saito S., Maeda S. Simulation of gas-solid two-phase flow in horizontal pipe // J. Chem. Engng Japan. 1976. V. 9, N 1. P. 23-28.
3. Sommerfeld M. Modeling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows // Intern. J. Multiphase Flow. 1992. V. 18, N 6. P. 905-926.
4. Sommerfeld M. Particle-wall collisions: experimental studies and numerical models // ASME. 1993. V. 166. P. 183-191.
5. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.
6. Деревич И. В. Расчет турбулентного течения газозвеси частиц, интенсивно взаимодействующих со стенками канала // ПМТФ. 1992. № 6. С. 73-81.
7. Деревич И. В. Статистическое описание турбулентного потока газозвеси крупных частиц, соударяющихся со стенками канала // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 4. С. 387-397.

8. Циркунов Ю. М., Панфилов С. В., Клычников М. Б. Полуэмпирическая модель ударного взаимодействия дисперсной частицы примеси с поверхностью, обтекаемой потоком газозвеси // Инж.-физ. журн. 1995. Т. 67, № 5/6. С. 379–386.
9. **Физические** величины: Справ. / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

Поступила в редакцию 13/1 1998 г.
