ПМТФ, № 3, 1972

УДК 624.074.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ АПЕРИОДИЧЕСКОМ ИНТЕНСИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. М. Корнев

(Новосибирск)

Установлено, что при действии на упругий стержень апериодических нагрузок большой интенсивности наибольшей скоростью роста прогибов обладают высшие формы потери устойчивости. Указан способ определения номеров этих форм, когда учитывается и не учитывается влияние продольных колебаний на поперечные. Приведено сравнение полученных результатов с результатами других авторов [1–7].

1. Постановка задачи. Система уравнений, учитывающая взаимное влияние продольных и поперечных колебаний неоднородного стержня, имеет вид

$$(EIw,_{xx}),_{xx} + (EFu,_x w,_x),_x + \rho Fw,_{tt} = f^*(x, t) \qquad (1.1)$$

$$(EFu,_x),_x = \rho Fu,_{tt} \qquad (1.2)$$

Здесь w, u — нормальное и продольное перемещения стержня; x, t — продольная координата и время; $E = E(x)$ — модуль Юнга; $I = I(x)$, $F = F(x)$ — изгибная жесткость и площадь сечения; $\rho = \rho(x)$ — плотность материала; предполагается, что $E(x)$, $I(x)$, $F(x)$ и $\rho(x)$ — медленно меняющиеся функции на длине волны потери устойчивости; $f^*(x, t)$ — функция, определяемая начальными возмущениями или несовершенствами.

Рассматривается шарнирно опертый стержень длины l_0 $(0 \leqslant x \leqslant l_0)$. Пусть при $t = 0$ к покоящемуся стержню в сечении $x = 0$ приложена апериодическая нагрузка $N(0, t)$, минимальное значение которой $\min N(0, t) = N_0$ значительно превышает нагрузку Эйлера P_e для стержня. Таким образом, изучается поведение стержня при интенсивном нагружении $N_0 / P_e = \eta^2 \gg 1$. К такого рода задачам кажется естественным применение асимптотических методов исследования.

Предположим пока, что волновым процессом при распространении продольных возмущений можно пренебречь, т. е. функция $N(x, t)$ задана, причем эта функция — достаточно гладкая. Тогда уравнение (1.1) перепишется в виде

$$(EIw,_{xx}),_{xx} + (Nw,_x),_x + \rho Fw,_{tt} = f^*(x, t) \quad (0 \leqslant x \leqslant l_0) \qquad (1.3)$$

Начальные и краевые условия для уравнения (1.3)

$$w = w,_t = 0 \quad (t = 0), \quad w = w,_{xx} = 0 \quad (x = 0, l_0) \qquad (1.4)$$

Перед тем как переходить к асимптотическому анализу задачи (1.3), (1.4), введем безразмерные параметры и оценим порядок отдельных слагаемых, причем $N_0 / P_e = \eta^2 \gg 1$

$$x_1 = x / l_0, \quad t_1 = \frac{c^* t}{l_0}, \quad c^* = \left(\frac{E^*}{\rho^*}\right)^{1/2}, \quad E^* = \frac{1}{l_0}\int\limits_0^{l_0} E(x)\,dx,$$

$$\rho^* = \frac{1}{l_0}\int\limits_0^{l_0} \rho(x)\,dx$$

Здесь c^* — средняя скорость. Далее индекс 1 у новых переменных повсюду опущен. Соотношение (1.3) в новых переменных, если сгруппировать второстепенные члены, примет вид

$$w_{,xxxx} + \eta^2 a(x, t) w_{,xx} + b(x) w_{,tt} + B = f(x, t) \tag{1.5}$$

$$\eta^2 a(x, t) = \frac{N l_0^2}{EI}, \quad b(x) = \frac{\rho(x) E^* l_0^2}{\rho^* E(x) r^2}, \quad f(x, t) = \frac{l_0^4 f^*(x, t)}{EI} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Здесь $\eta \gg 1$ — большой параметр, характеризующий интенсивность нагружения, $r = r(x)$ — радиус инерции сечения стержня, B — второстепенные члены уравнения.

Начальные и краевые условия сохраняют вид (1.4).

Оценивается порядок отдельных слагаемых в (1.5), следуя [1]. Положим

$$a(x, t) = c_1, \; b(x) = c_2, \; B \equiv 0$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, тогда решение однородного уравнения (1.5) можно разыскивать в виде

$$w^* = A \exp(i\eta\mu_0 x + \eta^2 \mu_{00} t) \tag{1.6}$$

если выделить одну степень свободы у системы с распределенными параметрами. Выбирается та степень свободы, которой соответствует максимум показателя в экспоненте (см. [1]). Следовательно

$$\mu_0^2 = c_1 / 2, \quad \mu_{00}^2 = c_1 / 4c_2 \tag{1.7}$$

Постоянные $\eta\mu_0$ и $\eta^2\mu_{00}$ характеризуют изменяемость решения по координатам x и t. Отметим, что решение (1.6) имеет разный порядок производных по x и t относительно η

$$\left|\frac{\partial^j w^*}{\partial x^j}\right| = \eta^j O(w^*), \quad \frac{\partial^j w^*}{\partial t^j} = \eta^{2j} O(w^*) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

2. Асимптотический анализ системы с одной степенью свободы. Следуя обычно применяемым подходам при асимптотическом интегрировании уравнений, обыкновенных и в частных производных [8, 9], решение однородного уравнения (1.5) с переменными, но слабо меняющимися коэффициентами разыскивается в виде

$$w = Q(t, x, \eta) W(x, t, \eta) \tag{2.1}$$

$$W = z(x, t, \eta) \exp \int\limits_0^x i\eta\mu_1(x, t)\,dx$$

$$Q = C_1 Z(t, x, \eta) \exp \int\limits_0^t [\eta^2 \mu_{22}(t, x) + \eta\mu_{21}(t, x)]\,dt$$

Здесь $\eta\mu_1$, $\eta^2\mu_{22} + \eta\mu_{21}$ — функции, характеризующие изменяемость решения по x и t соответственно, z и Z — медленно меняющиеся функции, C_1 — произвольная постоянная. Для функции $\mu_1(x, t)$ основная переменная есть x, а для функций $\mu_{22}(t, x)$ и $\mu_{21}(t, x)$ основная переменная — t (см. (1.6)), т. е.

$$\frac{\partial^j\mu_1}{\partial t^j} \ll \mu_1 \quad (j = 1,2), \qquad \frac{\partial^j\mu_{2k}}{\partial x^j} \ll \mu_{2k} \quad (j = 1,2,3,4, \ k = 1,2) \tag{2.2}$$

Порядок изменяемости решения (2.1) по x и t для неоднородного стержня при апериодическом интенсивном нагружении

$$\left|\frac{\partial^j w}{\partial x^j}\right| = \eta^j O(w), \quad \frac{\partial^j w}{\partial t^j} = \eta^{2j} O(w), \quad j = 1,2,\ldots, \quad \eta \gg 1 \tag{2.3}$$

согласован с изменяемостью решения по x и t для однородного стержня при постоянном нагружении (см. (1.8)).

Асимптотическое представление решения (2.1) подставляется в однородное уравнение (1.5). Используются неравенства (2.2) и оценки (2.3). Группируются члены при соответствующих степенях большого параметра η. Например, сравнивая члены при старшей степени большого параметра, т. е. при η^4, получаем следующее уравнение:

$$\mu_1^4 - a(x, t)\mu_1^2 + b(x)\mu_{22}^2 = 0 \tag{2.4}$$

В соотношение (2.4) входят две неизвестные функции μ_1 и μ_{22}. Как и при получении решения уравнения с постоянными коэффициентами, потребуем, чтобы функция $\mu_1(x, t)$ при произвольных x и t доставляла максимум выражению

$$\mu_1^4 - a(x, t)\mu_1^2$$

Тогда

$$\mu_1^2 = {}^1/_2\, a(x, t) \tag{2.5}$$

Из (2.4) имеем

$$\mu_{22}^2 = a^2(x, t) / 4b(x) \tag{2.6}$$

Легко заметить, что (2.5), (2.6) очень напоминают (1.7).

Переходим к определению медленно меняющейся функции $z(x, t, \eta)$, характеризующей изменение амплитуды формы потери устойчивости стержня в процессе движения. Полагаем

$$z(x, t, \eta) = z_0(x, t) + \eta^{-1}z_1(x, t) + \eta^{-2}z_2(x, t) + \ldots \tag{2.7}$$

В этом пункте всеми членами, кроме первого, пренебрегаем.

Равенство (2.5) определяет форму потери устойчивости, которая наиболее быстро растет. Для этой формы потери устойчивости справедливо уравнение

$$W_{,xxxx} + \eta^2\mu_1^2(x, t)W_{,xx} + B' = 0 \tag{2.8}$$

Здесь B' — младшие члены уравнения.

Краевые условия для этого уравнения не ставятся. Потребуем только, чтобы функция W была почти периодической функцией

$$W(x, t, \eta) = z_0(x, t)\exp\left\{ i\eta\int_0^x \mu_1(x, t)\, dx\right\} \tag{2.9}$$

Вторая и четвертая производные функции W (2.9) подставляются в (2.8), приравниваются члены при η^4 и η^3, получаются два уравнения, первое из которых удовлетворяется тождественно, а второе после преобразований примет вид

$$\frac{dz_0}{z_0} = -\frac{5}{2}\frac{\mu_{1,x}}{\mu_1}dx \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) справедливо, если в (2.8) пренебречь младшими членами. Это уравнение, когда t — параметр, интегрируется в квадратурах

$$\ln|z_0| = -\frac{5}{2}\int\limits_0^x \frac{\mu_{1,x}}{\mu_1}dx \tag{2.11}$$

Таким образом, распределение амплитуд выбранной формы потери устойчивости как бы зависит от местных условий нагружения упругой конструкции: местной жесткости и местной интенсивности нагружения. Если $\mu_1 = \mu_1(x, t)$, то распределение амплитуд быстро осциллирующей функции $W(x, t, \eta)$ зависит от координаты x и момента времени t.

Теперь в решении (2.1) осталось определить сомножитель $Z_1(x, t, \eta)$, характеризующий изменение скорости роста уже определенной формы потери устойчивости от точки к точке и в процессе движения. Система с распределенными параметрами подменяется системой с одной степенью свободы (см. (2.9) и (2.1)).

Выражение (2.1) подставляется в однородное уравнение (1.5)

$$b(t, x)Q'' - \eta^4 a(t, x)Q + B^* = 0. \tag{2.12}$$

Здесь $b(t, x)$, $a(t, x)$ — достаточно гладкие функции, $\eta \gg 1$, B^* — второстепенные члены.

Уравнение (2.12) — уравнение ранга два (см. [8]). После обычных выкладок, если $Z(t, x, \eta)$ представить в виде асимптотического ряда

$$Z(t, x, \eta) = Z_0(t, x) + \eta^{-1}Z_1(t, x) + \eta^{-2}Z_2(t, x) + \ldots$$

для $Q(t, x, \eta)$ справедливо соотношение

$$Q(t, x, \eta) = C_1\left\{Z_0(t, x)\exp\int\limits_0^t \eta^2\mu_{22}(t, x)\,dt + \ldots\right\},\quad Z_0 = (b/a)^{1/4} \tag{2.13}$$

Формула (2.14) для Z_0 имеет место при $B^* \equiv 0$ в (2.12).

Окончательно после переобозначений получается формула (2.1), в которой первый член под интегралом характеризует быструю осцилляцию решения по продольной координате (основная переменная — x), а второй член — скорость нарастания прогиба (основная переменная — t), сомножители $z_0(x, t, \eta)$ и $Z_0(t, x, \eta)$ соответственно характеризуют распределение амплитуд формы потери устойчивости и интенсивность роста этой формы в зависимости от времени и продольной координаты. Постоянная C_1 подбирается из неоднородного уравнения, когда в правой части выделена заданная форма потери устойчивости.

Отметим некоторые особенности полученного решения для w (см. (2.1)). Функция w, вообще говоря, не удовлетворяет начальным и краевым условиям (1.4) рассматриваемой задачи. Начальные условия не удовлетворяются, так как в w отсутствуют составляющие, соответствующие экспоненте с отрицательным показателем по времени и ограниченной относительно η функции. Однако при $\eta \gg 1$ и больших t эти составляющие имеют второстепенное значение. Краевые условия из (1.4) не удовлетворяются, потому что функция μ_1 определяется из (2.5). Напомним, что решение w — основная часть решения системы с одной степенью свободы; в п. 3, где рассматриваемая система с распределенными параметрами заменяется системой с несколькими степенями свободы, приведено более точное решение задачи (1.5), (1.4), которое в отличие от (2.1) удовлетворяет краевым условиям. Полученное решение (2.1) правильно отражает качественную картину явления: наиболее быстро меняется вполне определенная форма потери устойчивости, причем сама эта форма зависит от времени.

3. Асимптотический анализ системы с несколькими степенями свободы. Полученное выше выражение (2.1) для основной части решения системы с одной степенью свободы позволяет разумно подойти к аппроксимации системы с распределенными параметрами системой с несколькими степенями свободы, а именно число перемен знака осциллирующей составляющей решения

$$\sin\left\{\eta\int\limits_0^x \mu_1(x,\, t^\circ)\,dx\right\}$$

в фиксированный момент t° указывает номер $m(t^\circ)$ формы потери устойчивости, которая наиболее интенсивно растет при $t = t^\circ$. При изменении t получается некоторая функция $m(t)$.

Пусть функция $m(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (t_0 — некоторая постоянная) пробегает целочисленные значения $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ ($k \geqslant 1$). Эти целочисленные значения — номера форм потери устойчивости, которые наиболее интенсивно растут в некоторые моменты времени. Поэтому для аппроксимации системы с распределенными параметрами выбираются формы потери устойчивости $W_m(x)$, решение задачи (1.5), (1.4) представляется в виде

$$w = \sum_{j=1}^{k} q_m(t)\, W_m(x), \quad m = m(j) \quad (k \geqslant 1) \tag{3.1}$$

Здесь m — целочисленная функция целочисленного аргумента j, т. е. $m = m(j)$ при $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, $W(x)$ — некоторые осредненные формы потери устойчивости. Эти формы — асимптотические представления решений следующей задачи о собственных функциях и числах (напомним, что $\lambda \sim \eta^2$ — большой параметр):

$$W_{,xxxx} + \lambda a^*(x)\, W_{,xx} + B^\circ = 0, \quad W = W_{,xx} = 0 \quad (x = 0,\, 1) \tag{3.2}$$

$$a^*(x) = \frac{1}{t_0}\int\limits_0^{t_0} a(x,\, t)\,dt$$

Здесь B° — младшие члены уравнения. Краевые условия задачи (3.2) могут иметь и более сложный вид.

После выбора соответствующих степеней свободы (форм потери устойчивости) переходим к определению амплитуд q_m. Выражение (3.1) подставляется в уравнение (1.5) и начальные условия (1.4), применяется процедура Бубнова — Галеркина. Для q_m получается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$q_m'' - \eta^4 \sum_{i=1}^{k} c_{im} q_i + B_m = f_m, \quad q_m(0) = q_m' \,|\, 0 \,| = 0$$

$$c_{mm} \gg c_{im} \quad \text{при} \quad i \neq m, \quad m = m(j) \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k) \tag{3.3}$$

Здесь B_m — второстепенные члены, их относительный порядок не больше второго, т. е. $B_m \sim \eta^2$ (см. (2.2)); второстепенные члены имеют такой порядок, когда характер нагружения и жесткостные характеристики стержня мало меняются. В системе (3.3) каждое m уравнение содержит в старших членах только одну производную второго порядка q_m'', это является следствием простых краевых условий задачи (3.2). Если краевые условия для уравнения задачи (3.2) отличны от условий

$$W = W_{,xx} = 0 \quad \text{или} \quad W_{,x} = W_{,xxx} = 0 \quad (x = 0,1) \tag{3.4}$$

то система, аналогичная (3.3), имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} \overset{*}{c}_{im} q_i'' - \eta^4 \sum_{i=1}^{k} c_{im} q_i + B_m = f_m, \; q_m(0) = q_m'(0) = 0, \; m = m(j)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.5}$$
$$c_{mm} \gg c_{im} \quad \text{при} \quad i \neq m; \; \overset{*}{c}_{mm} \gg \overset{*}{c}_{im} \quad \text{при} \quad i \neq m, \quad m \gg 1$$

Отметим, что система (3.5) превращается в распадающуюся систему, когда рассматривается однородный стержень при постоянном нагружении, если граничные условия имеют вид (3.4).

Системы (3.3) и (3.5) с переменными коэффициентами содержат естественный большой параметр η. Решение однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) или (3.5) ранга два [8] (старшая степень большого параметра — четвертая) разыскивается в виде асимптотического ряда. Например, для одного из частных решений этих однородных систем справедливо представление

$$q_m = Z_m \exp \int_0^t [\eta^2 \mu_{22m}(t) + \eta \mu_{21m}(t)]\, dt, \quad Z_m = Z_{0m}(t) + \eta^{-1} Z_{1m}(t) + \ldots \tag{3.6}$$

При получении решения неоднородной системы уравнений применяется общий метод вариации произвольных постоянных.

Представление решения системы (3.4) в виде (3.6) справедливо, если при изменении t в рассматриваемом интервале времени $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ ни один корень «характеристического» полинома, соответствующего системе (3.4), не обращается в нуль, или интенсивность нагружения меняется не очень существенно. Совпадающие действительные корни характеристического полинома, соответствующего (3.3), не вызывают осложнений, так как матрица $c = \| c_{im} \|$ имеет простые элементарные делители, а следовательно, сохраняется вид асимптотического представления решения (3.6) (см. [8]). Ни один из корней характеристического полинома, соответствующего (3.3), не обращается в нуль, если функции c_{mm} не меняют знака, т. е. $C_{mm}(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

При существенном изменении интенсивности нагружения $c_{mm}(\overset{*}{t}_{mm}) = 0$ при $0 \leqslant \overset{*}{t}_{mm} \leqslant t_0$. В этом случае надо принять во внимание точки поворота (некоторая из функций q_m может из экспоненциально возрастающей превратится в колеблющуюся функцию; например, показатель экспоненты больше нуля при $t < \overset{*}{t}_{mm}$, показатель экспоненты — чисто мнимая функция при $t > \overset{*}{t}_{mm}$). При наличии точек поворота возникает проблема построения «сквозных» асимптотик.

Пример. Рассмотрим однородный стержень при неравномерном продольном нагружении. Пусть в (1.5)

$$a = 2(1+\alpha x)^2,\ b = b_0 = \text{const},\ \alpha = \text{const},\ B \equiv 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Тогда в формуле (2.1) функции μ_1, μ_{22}, z_0, Z_0 имеют вид

$$\mu_1 = 1+\alpha x;\ \mu_{22} = \frac{2(1+\alpha x)}{2b_0^{1/2}};\ z_0 = \frac{1}{(1+\alpha x)^{5\alpha^2/2}};\ Z_0 = \frac{(b_0/2)^{1/4}}{(1+\alpha x)^{1/2}}$$

Очевидно, что в зависимости от величины α могут существенно меняться осцилляция решения по продольной координате, быстрота нарастания прогиба и распределение амплитуд.

4. Выпучивание неоднородного стержня при ударе («одна» степень свободы). В предыдущих двух пунктах изучалось поведение стержня при предположении, что скорость распространения возмущений вдоль оси x-в бесконечна. Откажемся от этого допущения. Пусть при $t = 0$ к стержню приложена в сечении $x = 0$ интенсивная нагрузка $N(0, t)$, т. е.

$$N = N(0, t),\ x = 0,\ t > 0 \tag{4.1}$$

Здесь $N(0, t)$ — достаточно гладкая функция.

Задача (1.2), (4.1) есть задача о распространении краевого режима ($0 \leqslant x \leqslant 1$). Отражение от опоры $x = 1$ пока не рассматривается. Считается что решение этой задачи для волнового уравнения (1.2) уже получено каким-либо методом. Итак, известно сжимающее усилие $N_0(x, t)$, известна скорость $c(t)$ $(c(x))$, с которой перемещается фронт усилия вдоль стержня

$$N_0(x, t) = N(x, t)\ (x < l(t)),\ N_0(x, t) \equiv 0\ (x \geqslant l(t)),\ l(t) = \int_0^t c(\zeta)\,d\zeta \tag{4.2}$$

Здесь c — безразмерная скорость, для неоднородного стержня.

Отметим, что функция $N_0(x, t)$ имеет сложный вид, при $x = l$ эта функция разрывна: $N_0(l-\varepsilon, t) \neq N_0(l+\varepsilon, t)$ ($\varepsilon > 0$ — малая положительная величина).

Как известно, изгибные возмущения, определяемые уравнением (1.1) при $x > l(t)$, несущественны. Кроме того, при более точной постановке задачи получаются уравнения типа динамических уравнений балки Тимошенко, из которых следует, что скорость распространения изгибных возмущений $c_*(t)$ конечна и меньше $c(t)$ для любого момента времени ($c_*(t) < c(t)$). Поэтому изучение уравнения

$$w_{,xxxx} + \eta^2 a(x, t)\, w_{,xx} + b(x)\, w_{,tt} + B = f(x, t) \tag{4.3}$$

проводится на переменном интервале [4] $0 \leqslant x \leqslant l(t)$, как в [5] (обозначения см. в п.1). Начальные и краевые условия для уравнения (4.3)

$$w = w_{,t} = 0\ (t = 0),\ w = w_{,xx} = 0\ (x = 0),\ w = w_{,x} = 0\ (x = l(t)) \tag{4.4}$$

Пусть $a(x, t)$ и $b(x)$ — функции, слабо меняющиеся на длине волны потери устойчивости.

Введем преобразование координат [5]

$$x = x,\ \tau = t - \int_0^x \frac{d\xi}{c(\xi)} \tag{4.5}$$

Здесь τ — истинное время действия сжимающей нагрузки большой интенсивности.

Уравнение (4.3) в новых переменных сохраняет свой вид (t заменяется на τ), если пренебречь второстепенными членами; оценка этих второстепенных членов для однородного стержня приведена в п. 1 работы [5]. В рассматриваемом случае принципиальные осложнения при оценке их не возникают для неоднородного стержня с плавно меняющимися жесткостями. Второстепенными членами можно пренебречь, если $\max\ r(x) / \min L(x) \ll 1$ (здесь x, r и L — размерные величины, L — длина волны потери устойчивости).

Решение преобразованного уравнения (4.3) разыскивается в виде

$$w = Q(\tau, x, \eta) W(x, \tau, \eta); \tag{4.6}$$

$$W = z_0(x, \tau) \exp \int_0^x i\eta\mu_1(x, \tau)\, dx, \quad Q = C_1 Z_0(\tau, x) \exp\left\{\int_0^\tau [\eta^2\mu_{22}(\tau, x) + \right.$$

$$\left. + \eta\mu_{21}(\tau, x)]\, d\tau\right\} + C_2 Z_0(\tau, x) \exp\left\{-\int_0^\tau [\eta^2\mu_{22}(\tau, x) + \eta\mu_{21}(\tau, x)]\, d\tau\right\} + Q^*(\tau)$$

Здесь функции μ_1, μ_{22}, μ_{21}, z_0, Z_0 имеют тот же смысл, что и в п.2, C_1 и C_2 — постоянные, Q^* — частное решение неоднородного уравнения для Q. Последнее уравнение получается после подстановки (4.6) в преобразованное уравнение (4.3) и соответствующих преобразований, если считать, что форма потери устойчивости W уже задана. Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий

$$Q(0, x, \eta) = Q_{,\tau}(0, x, \eta) = 0 \qquad (Q^* = Q_{,\tau}{}^* = 0 \text{ при } \tau = 0)$$

Построенное решение (4.6) не удовлетворяет краевым условиям (3.4), как и решение (2.1).

Для определения функций $\mu_1(x, \tau)$, $\mu_{22}(\tau, x)$, $z_0(x, \tau)$, $Z_0(x, \tau)$ справедливы формулы (2.5), (2.6), (2.11), (2.14), если в последних заменить t на τ (предположения, при которых получены эти формулы, сохраняются)

$$\mu_1{}^2 = \frac{a(x, \tau)}{2}, \quad \mu_{22}{}^2 = \frac{a^2(x, \tau)}{4b(x)}, \quad \ln|z_0| = -\frac{5}{2}\int_0^x \frac{\mu_{1,x}\, dx}{\mu_1}, \quad Z_0 = \left(\frac{b(x, \tau)}{a(x, \tau)}\right)^{1/4} \tag{4.7}$$

Получение частного решения Q^* неоднородного уравнения второго порядка очевидно, когда известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения [8].

Комбинируя частное решение и экспоненциально растущее и затухающее решения, получаем после перехода к старым координатам громоздкую формулу, которая аналогична формуле (1.10) из работы [5]. Таким образом, построено асимптотическое решение системы с распределенными параметрами (см. задачу (4.3), (4.4) как системы с одной условной степенью свободы. Ранее (в п.2) система с распределенными параметрами заменялась системой с одной медленно меняющейся степенью свободы. Теперь же полная система заменяется системой с одной медленно меняющейся степенью свободы, но на переменном интервале. Рассматриваемая одна степень свободы может так называться только условно, так как одна степень свободы на переменном интервале не совпадает с обычным понятием о степени свободы некоторой колебательной системы.

Построенное решение позволяет разумно подойти к аппроксимации системы с бесконечным числом степеней свободы системой с конечным числом степеней свободы. Однако теперь в отличие от п.3 определяющей величиной является длина волны потери устойчивости, а не число нулей формы потери устойчивости. Это связано с тем, что ранее рассматривались только достаточно гладкие функции. Вообще, говоря, функция $N(x, t)$ может быть разрывной функцией.

Среди форм потери устойчивости, аппроксимирующих исходную систему, обязательно должны быть формы потери устойчивости с такой местной длиной волны $L = L(x)$, которой соответствует максимум показателя в экспоненциально возрастающем решении (4.6) в любой момент времени.

Отметим, что экспериментальные результаты из [6, 7] достаточно хорошо согласуются с построенным решением, а именно при постоянном нагружении однородного стержня нули функции прогиба мало смещаются, а распределение амплитуд имеет экспоненциальный характер; при бесконечно большой скорости распространения напряжений стержень можно рассматривать как систему с одной степенью свободы, причем этой степени свободы соответствует максимум показателя в экспоненте (см. п.2. и [1]).

5. О критическом времени и критической интенсивности нагружения при выпучивании стержней. Выше (см. п.2, 4) был проведен асимптотический анализ выпучивания, когда система с распределенными параметрами заменялась системой с одной степенью свободы. В каждый момент времени при апериодическом интенсивном нагружении выбиралась та форма потери устойчивости, которая имеет наибольшую скорость роста (см. (2.1), (4.6)). Перемещения (амплитуды нормального прогиба) системы оказываются завышенными по сравнению с действительно имеющими место. А раз так, то простые аналитические зависимости (2.1), (4.6) естественно применить к получению оценок критического времени и критической интенсивности нагружения при выпучивании, причем, что особенно важно, полученная оценка этого времени и этой интенсивности будет оценкой снизу. Однако необходимо подчеркнуть, что формулы (2.1), (4.6) выводились при предположении об активном нагружении, т. е. имеется только сжимающая интенсивная нагрузка, действующая вдоль стержня.

Под критическим временем или критической интенсивностью нагружения понимается нижняя оценка таковых, если поведение всей системы в любой момент времени (в том числе и после снятия нагрузки) определяется активным участком нагружения.

Критическое время при выпучивании t_* или критическая интенсивность нагружения η_* определяются из соотношений, если за определяющую величину выбрать максимум прогиба

$$\max|w(x, \eta, t_*)| = w_*, \quad \max|w(x, \eta_*, t_0)| = w_* \tag{5.1}$$

или коэффициент усиления (см. [3])

$$\frac{\max|w(x, \eta, t_*)|}{\max|w_0(x)|} = w_{**}, \quad \frac{\max|w(x, \eta_*, t_0)|}{\max|w_0(x)|} = w_{**} \tag{5.2}$$

Здесь t_* — критическое время; t_0 — некоторый фиксированный момент времени; η_* — критическая интенсивность нагружения; w_* — максимально допустимое отклонение упругой системы при заданных возмущениях, имеющих место при интенсивном нагружении; w_{**} — критический коэффициент усиления, этот коэффициент есть отношение максимальной величины дополнительного прогиба в конечный момент времени $\max|w(x, \eta, t)|$ к максимальной величине начального прогиба $\max|w_0(x)|$; $w_0(x)$ — функция, характеризующая начальные несовершенства стержня.

При использовании первой формулы оценки для t_* и η_* получаются конечными, когда отсутствует начальный прогиб стержня $w_0(x) \equiv 0$, но существуют некоторые возмущения при нагружении (например, малая нагрузка, перпендикулярная оси стержня). Вторыми формулами (5.2) пользоваться нельзя, когда $w_0(x) \equiv 0$. После очевидных преобразований и переобозначений (5.2) сводится к (5.1), если $w_0(x) \not\equiv 0$. Далее рассматриваются соотношения (5.1). Предлагаемые критерии следуют из определения, принятого в технической теории устойчивости движения на конечном интервале времени $t \in [0, t_*]$ или $t \in [0, t_0]$.

Соотношения (5.1) могут быть значительно упрощены, если принять во внимание порядок величин в зависимостях (2.1) и (4.6)

$$\eta \gg 1,\ z_0(x, t) = O(1),\ z_0(x, \tau) = O(1),\ Z_0(t, x) = O(1) \tag{5.3}$$

$$Z_0(\tau, x) = O(1),\ \mu_{22}(t, x) = O(1),\ \mu_{22}(\tau, x) = O(1)$$

Поэтому вместо функций z_0, Z_0, μ_{22} в упрощенных соотношениях (5.1) используются величины

$$z_{00} = \max |z_0(x, \zeta_1)|,\quad Z_{00} = \max |Z_0(\xi_1, x)|,\quad \mathring{\mu}_{22} = \max |\mu_{22}(\xi_1, x)| \tag{5.4}$$

Здесь $\xi_1 = t$, когда скорость распространения продольных возмущений принимается бесконечной; $\xi_1 = \tau$, когда скорость распространения продольных возмущений конечна.

Если воспользоваться постоянными z_0, Z_{00}, μ_{22}° вместо функций в формулах (2.1) и (4.6), то соотношения (5.1), как правило, удается разрешить относительно критических параметров t_* и η_* (разумеется, в (2.1) и (4.6) $\max |\sin \xi| = 1$).

Отметим отличие предлагаемой методики определения критического времени и критической интенсивности по формулам, следующим из соотношений (5.1), от методики работы [3]. Д. Л. Андерсон и Х. Е. Линдберг предлагают вычислять коэффициент усиления для всех форм потери устойчивости, причем эти формы выбираются, вообще говоря, без достаточного обоснования (см. формулы (5) и (6) из [3]); а затем по максимуму коэффициента усиления для некоторой из форм предложено судить о поведении всей системы. Здесь же форма потери устойчивости подбирается специально — преднамеренно завышается скорость роста прогибов, чтобы получить нижние оценки для критического времени t_* и критической интенсивности η_* при активном нагружении. Кроме того, практические расчеты по предлагаемой методике проводить проще, чем вычислять всю кривую усиления. В частном случае, когда нагружение постоянное, критические параметры подсчитываются особенно просто. По сути дела получаются те же результаты, что и в [1], так как выбрана та форма, которой «соответствует наибольший коэффициент в показателе экспонент функции времени» (см. [1], стр. 780).

Пример. Пусть прогибы стержня, когда скорость распространения продольных возмущений принята бесконечной, удовлетворительно описываются формулой (2.1). Тогда, принимая во внимание (5.3) и (5.4), имеем

$$\eta^2 t \mu_{22}^0 = \ln w_* - \ln C_1 - \ln z_{00} - \ln Z_{00} \tag{5.5}$$

Пусть разность $(\ln w_* - \ln C_1)$ не близка к нулю. Опускаются второстепенные члены в (5.5) (см. (5.3)). Для критического времени t_* и критической интенсивности нагружения η_* получаются простые фомулы

$$t_* = \frac{ln\, w_* - \ln C_1}{\eta^2 \mu_{22}^\circ}, \quad \eta_* = \left(\frac{\ln w_* - \ln C_1}{\mu_{22}^\circ t_0} \right)^{1/2} \tag{5.6}$$

Полученные простые зависимости (5.6) очень устойчивы по отношению к ошибкам, возможным при определении w_* и C_1.

Поступила 19 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
3. Anderson D. L., Lindberg H. E. Dynamic pulse bucklіny of cylindrical shells under transient luteral pressure. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 4. (Рус. перев.: Динамическое выпучивание цилиндрических оболочек под действием нестационарного бокового давления. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 4).
4. Слепян Л. И. Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
5. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе. ПМТФ, 1968, № 3.
6. Lindberg H. E. Buckling of a very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 2. (Рус. перев.: Изгиб очень тонкой цилиндрической оболочки под действием импульсного давления. Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Сер. Е., 1964, т. 31, № 2.)
7. Малышев Б. М. Устойчивость стержней при ударном сжатии. Инж. ж., МТТ, 1966, № 4.
8. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
9. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехтеоретиздат, 1953.