

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОНИКНОВЕНИЯ
НАДКРИТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В СВЕРХПРОВОДНИК ВТОРОГО РОДА И ГЕНЕРИРУЕМОГО
ПРИ ЭТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

УДК 537.872.3

А. Б. Прищепенко¹, А. А. Бармин², О. Э. Мельник²

¹ ЦНИИ химии и механики, 115487 Москва

² Институт механики МГУ, 119899 Москва

Традиционные приборы вакуумной СВЧ-электроники обладают довольно ограниченными возможностями по расширению спектра генерируемого излучения (обычно заметные уровни мощности наблюдаются на частотах, отличающихся от основной не более чем на $10 \div 20 \%$). Расширение частотного диапазона генерируемого СВЧ-излучения возможно только на основе принципиально новой элементной базы, причем главную роль играют коммутирующие элементы с высоким быстродействием.

В настоящей работе рассмотрены физические принципы функционирования источника сверхширокополосного излучения, в котором в качестве коммутирующего элемента используется сверхпроводник второго рода — кольцевой слой керамики $YBa_2Cu_3O_7$. Основное электромагнитное излучение имеет место при выходе магнитного поля из сверхпроводника.

Описание этого процесса дается на основе обобщенных уравнений братьев Лондонов [1], но в отличие от классической теории число сверхпроводящих электронов не считается постоянным, а зависит от магнитного поля и температуры. Эта зависимость берется из экспериментальных данных [2]. На основе предложенной модели численно исследуется процесс проникновения магнитного поля в полый цилиндрический сверхпроводник, распространение зоны разрушения сверхпроводящих свойств и выхода поля из сверхпроводника. По распределению токов в сверхпроводнике на основе теории волнового осциллятора [3] дана оценка мощности и спектра генерируемого электромагнитного излучения. Полученные значения сравниваются с экспериментальными.

1. Постановка задачи. В сверхпроводники первого рода, к которым относятся практически все чистые металлы, внешнее магнитное поле при достижении им критического значения B^* проникает мгновенно (толщина переходной области порядка L_0 — характерного размера куперовской пары).

Современные высокотемпературные сверхпроводники относятся ко второму роду. В них магнитное поле проникает постепенно (есть область шириной δ , в которой магнитное поле существует). Если $\delta/L_0 \gg 1$, то имеет место теория [1], которая дает глубину проникновения $\lambda_L = \sqrt{mc^2/(4\pi ne^2)}$, где m , e , n — масса, заряд и плотность электронов. При этом считается, что все электроны находятся в сверхпроводящем состоянии. В реальной ситуации наравне со сверхпроводящими электронами с концентрацией n_s в переходной области присутствуют и нормальные. Их концентрация n_n тем больше, чем напряженность магнитного поля или температура ближе к своим критическим значениям. Таким образом, электрический ток можно рассматривать как два параллельных тока, обусловленных сверхпроводящими и нормальными электронами. В этом случае система уравнений,

обобщающая уравнения братьев Лондонов [1], имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_s, \quad m \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} = e \mathbf{E}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j}_s = \alpha n \mathbf{V}_s, \quad \mathbf{j}_n = \sigma_0 (1 - \alpha) \mathbf{E}, \quad \alpha = n_s / n.$$

Здесь \mathbf{B} и \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического полей; \mathbf{j} — плотность тока; \mathbf{V}_s — скорость сверхпроводящих электронов; индексы n и s относятся к нормальному и сверхпроводящему состояниям соответственно. Соотношения (1.1) представляют уравнения Максвелла, условие параллельности включения токов, законы Ома для нормальных и сверхпроводящих электронов.

Для замыкания системы (1.1) необходимо задать зависимость $\alpha = \alpha(B, T)$. В [2] дана зависимость сопротивления ρ сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ от величины магнитного поля для разных температур, меньших критической. Полагая, что $\rho(B, T) = (1 - \alpha(B, T))\rho_0$, получим $\alpha = 1 - \rho(B, T)/\rho_0$ ($\rho_0 = 0,3 \text{ мОм} \cdot \text{см}$). Характерной особенностью сверхпроводников второго рода является наличие двух критических полей: нижнего B_1^* и верхнего B_2^* . Если напряженность магнитного поля меньше нижней критической, то вещество ведет себя как чистый сверхпроводник, чему соответствует $\alpha = 1$, если поле больше верхнего критического, то $\alpha = 0$, вещество — нормальный проводник. В переходной области зависимость $\alpha(B)$ хорошо аппроксимируется формулой

$$\alpha = \frac{a_1 + a_2(B - b) - (a_2 + 1)(B - b)^2}{a_1 + a_2(B - b) - a_3(B - b)^2},$$

где B — напряженность магнитного поля, отнесенная к верхней критической; b — безразмерное нижнее критическое поле; параметры a_i определяются температурой тела.

Для оценки возможного повышения температуры, связанного с джоулевым разогревом сверхпроводника, используем уравнение баланса энергии. Без учета процессов теплопроводности (существенно более медленных) оно имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_0 (1 - \alpha) \mathbf{E}^2. \quad (1.2)$$

В процессе расчетов по текущим токам будет оцениваться изменение температуры.

Рассмотрим одномерную задачу. Пусть сверхпроводник представляет собой бесконечный полый цилиндр с внешним радиусом r_e и внутренним r_i . Считаем, что внутри цилиндра распределение электромагнитных полей описывается уравнениями Максвелла в пустоте, а в нем — уравнениями (1.1). На внешней границе цилиндра задано магнитное поле $B = B(t)$, параллельное его оси. В начальный момент поле отсутствовало: $B(r, 0) = 0$ ($0 \leq r \leq r_e$). При $r = r_i$ полагаем непрерывность электрического и магнитного полей, что соответствует отсутствию поверхностных токов и зарядов, поля при $r = 0$ считаем ограниченными.

Задача сводится к интегрированию двух систем одномерных нестационарных уравнений в частных производных, сопрягающихся на неподвижной границе $r = r_i$ условиями непрерывности поля. Система уравнений (1.1) параболическая, а уравнения Максвелла в пустоте гиперболические.

Решение проводилось численно. По консервативной схеме [4] расписывались чисто неявные разностные аналоги систем уравнений, затем в направлениях от границ $r = 0$ и $r = r_e$ вычислялись коэффициенты матричной прогонки, по ним и граничным условиям при $r = r_i$ определялись значения полей на внутренней границе сверхпроводника, затем методом обратной прогонки находилось их распределение во всей расчетной области. Точность разностной аппроксимации порядка $[\tau, h^2]$, при этом схема абсолютно устойчива.

Для характеристики проникновения поля в сверхпроводник введем величины $\lambda_1 =$

$r(B_1^*)$ и $\lambda_2 = r(B_2^*)$ (r — расстояние от границы сверхпроводника), а также среднюю величину проникновения поля λ

$$\Lambda \equiv \lambda(r_0 - (1/2)\lambda)B_0 = \int_{r_1}^{r_e} B(r)r dr.$$

Используя систему (1.1), для Λ при $B_0 < 1$ получим

$$\Lambda(t) = e^{-t} \int_{\tau_0}^t \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)_0 d\tau, \quad \tau - \tau_0 = \int_0^t \frac{\alpha}{1 - \alpha} dt. \quad (1.3)$$

Здесь индекс нуль относится к величине на границе сверхпроводника ($r = r_e$). Величина $d\lambda/dt \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, так что существует предельный профиль, который на больших расстояниях от границы близок к экспоненциальному. Функция λ , согласно (1.3), конечна и растёт с увеличением B_0 .

2. Проникновение магнитного поля в сверхпроводник. Исследуем процесс проникновения магнитного поля в полый цилиндрический сверхпроводник в зависимости от приложенного магнитного поля на границе B_0 и законов его изменения. Если $B_0 > B_2^*$, то образуются три зоны:

- I — зона сверхпроводящего состояния ($r > \lambda_1$),
- II — зона смешанной проводимости ($\lambda_1 > r > \lambda_2$),
- III — зона обычной электропроводности.

Величина λ непрерывно растёт, при $B_0 = B_2^*$ $\lambda \approx \ln t$, а при $B_0 > B_2^*$ $\lambda \approx t^{\gamma(B_0)}$, причем $\gamma \rightarrow 0,5$ с увеличением B_0 . Это показывает, что определяющим процессом является проникновение поля в области обычной электропроводности, где процесс описывается обычным уравнением типа теплопроводности.

В качестве закона изменения поля на внешней границе цилиндра примем $B(r_e, t) = (2/\pi)B_0 \operatorname{arctg}(\omega t)$.

Величина $\omega = \infty$ соответствует мгновенному заданию максимального значения поля. Здесь и далее, если не указана размерность, используются безразмерные величины. Напряженность магнитного поля отнесена к верхнему критическому значению, т. е. $B_2^* = 1$, время — к r_i/c , расстояние при $r_i \leq r \leq r_e$, в том числе и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$, — к $\Delta r = r_i - r_e$, а при $r < r_i$, т. е. в пустоте, — к r_i , плотность тока — к $B_2^*c/\Delta r$, а магнитный момент системы токов — к $B_2^*c/\Delta r^4$.

На рис. 1 представлены профили магнитного поля и плотности тока при $\omega = 0,1$ для $B_0 = 2$ (пунктирные линии — профили после отражения волны от центра). Здесь при $0 < r < 1$ имеем пустоту, при $1 \leq r \leq 2$ — проводящий материал. Пока $B(r_e, t) < 1$, значение λ_1 порядка нескольких лондоновских длин и медленно увеличивается с ростом поля, ток протекает в узкой области у границы. Как только $B(r_e, t) > 1$, глубина проникновения резко возрастает, образуются три зоны, указанные выше, основной ток течет по области II, которую можно рассматривать как волну разрушения сверхпроводимости. В области III из-за омических потерь ток быстро затухает. Оценка увеличения температуры, сделанная по уравнению (1.2), показывает, что ее значительное повышение происходит только в области III и заметно не влияет на процесс перехода от сверхпроводящего состояния к нормальному.

Зависимости $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и λ (соответственно сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии) для $\omega = 0,1$ и $B_0 = 1,5; 2; 5$ представлены на рис. 2 (кривые 1-3). С уменьшением B_0 время разрушения сверхпроводимости в цилиндрическом слое возрастает как за счет более позднего достижения на границе значения $B = 1$, так и за счет уменьшения $d\lambda/dt$. Ширина зоны смешанной проводимости при этом увеличивается. К аналогичным результатам приводит и уменьшение ω .

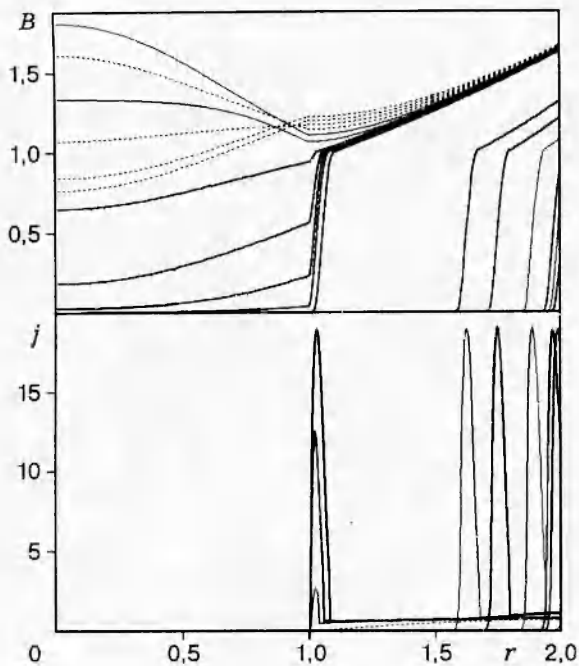


Рис. 1

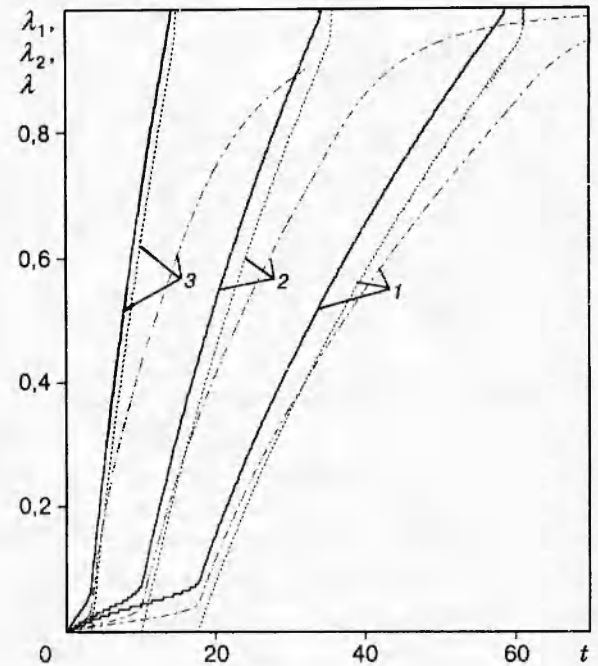


Рис. 2

Глубина проникновения поля на начальном участке меняется в основном за счет распространения фронта волны разрушения сверхпроводимости и при достижении ею границы проводящего материала определяется обычной электропроводностью.

В табл. 1 даны значения времени разрушения сверхпроводимости в рассматриваемом кольце в зависимости от скорости нарастания напряженности на границе поля и его максимального значения. Времена t_1 и t_2 соответствуют достижению верхнего критического поля на внешней и внутренней границе сверхпроводника соответственно.

При исчезновении области II происходит резкое возрастание напряженности магнитного поля на внутренней границе до $\sim B_2^*$. Это изменение поля распространяется в непроводящей области в виде электромагнитных волн, которые отражаются от центра проводящего цилиндра. В выбранной геометрии время резкого изменения поля на границе равняется 2–3 единицам безразмерного времени.

На рис. 3 представлено изменение напряженности в центре $B(0)$ в зависимости от t для $\omega = 0,1$ и $B_0 = 5; 2; 1,5$ (кривые 1–3). Вначале имеет место колебательный процесс, инициированный отражением волн с асимптотическим выходом на приложенное внешнее поле B_0 . Максимальное значение в первом пике превосходит $B(r_i)$ в 1,5–3 раза в зависи-

Таблица 1

B_0	ω							
	0,05		0,1		1,0		∞	
	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
1,5	34,7	89,7	17,4	61,1	1,7	28,2	0	21,6
2	20,0	52,6	10,0	35,8	1,0	16,2	0	12,2
5	6,5	21,3	3,3	14,8	0,4	6,7	0	4,8

Таблица 2

B_0	ω			
	0,05	0,1	1,0	∞
	S, МВТ			
1,5	0,26	0,27	0,31	0,33
2	0,76	0,85	0,92	1,03
5	2,77	4,21	8,93	9,32

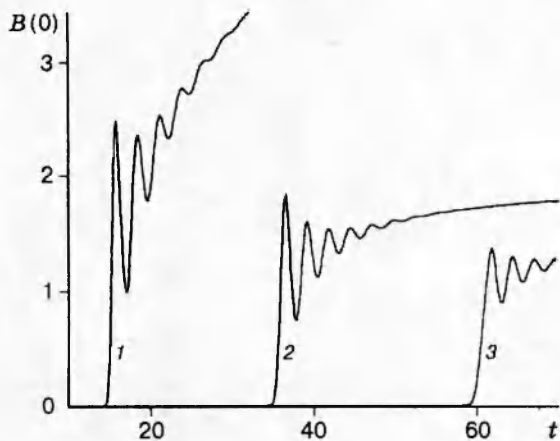


Рис. 3

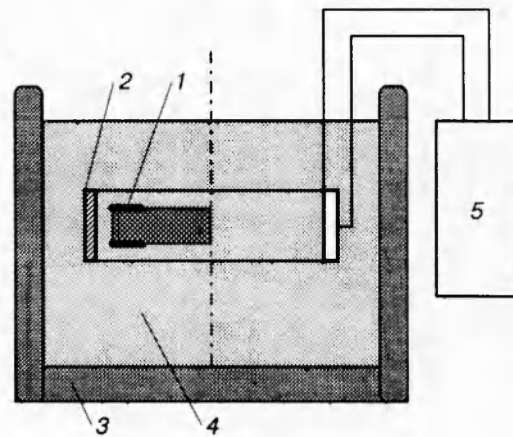


Рис. 4

мости от ω и может быть меньше B_0 , что связано с задержкой проникновения поля через проводящий слой. Отсюда следует, что сильное сжатие поля из-за разрушения сверхпроводимости невозможно.

3. Сверхширокополосный источник СВЧ-излучения. Проведенные расчеты были использованы для объяснения принципов работы источника сверхширокополосного СВЧ-излучения с непрерывным частотным спектром, охватывающим частоты от долей до десятков гигагерц.

Схема такого источника, разработанного А. Б. Прищепенко, приведена на рис. 4, где 1 — кольцевой слой сверхпроводящей керамики $YBa_2Cu_3O_7$, 2 — катушка для создания импульсного магнитного поля, 3 — теплоизолированная ювета, 4 — жидкий азот, 5 — генератор импульсного электрического тока. Осциллограмма тока в катушке показана на рис. 5. Расстояние между точками по времени 50 нс, максимальная амплитуда 25 кА. Изменение магнитного поля внутри катушки пропорционально протекающему току.

Важной характеристикой процесса, существенной для понимания механизма излучения, является момент тока, протекающего в сверхпроводнике. Для единицы длины цилин-

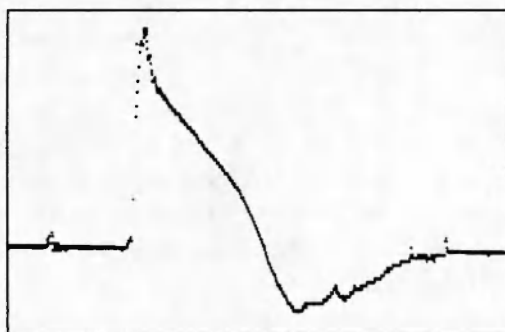


Рис. 5

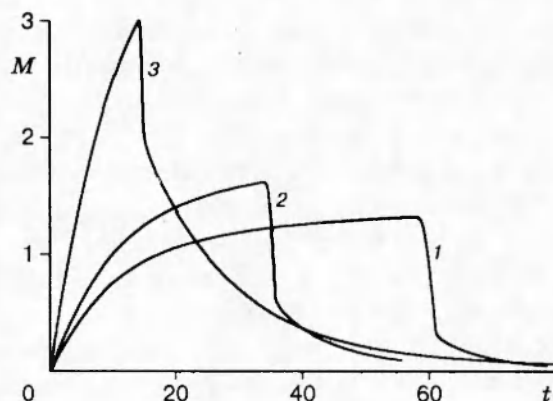


Рис. 6

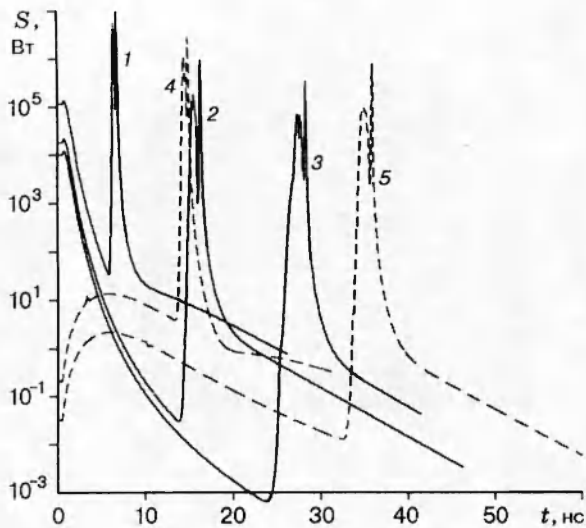


Рис. 7

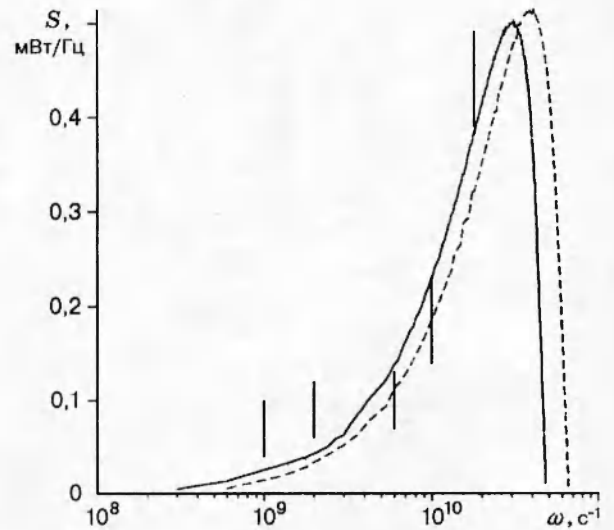


Рис. 8

дрического образца он может быть записан в виде

$$M(t) = \int_{r_i}^{r_0} r^2 \frac{\partial P}{\partial r} dr = (r_0 - \lambda)^2 B(r_0) - r_i^2 B(r_i).$$

На рис. 6 представлено изменение момента тока M от времени t для $\omega = 0, 1$ и $B_0 = 1, 5; 2; 5$ (кривые 1–3). На начальной стадии рост M происходит за счет изменения B_e , так как значение λ/r_0 мало, а $B(r_i) = 0$. Когда зона II достигает r_i , второй член начинает быстро расти, что приводит к резкому падению $M(t)$.

Характерно, что это падение определяется в основном скоростью изменения B_i , что, как указывалось выше, слабо зависит от скорости изменения поля на внешней границе. После того как сверхпроводимость полностью исчезнет, процессы определяются обычной диффузией, и изменение $M(t)$ резко замедляется. Обратим внимание, что $M''(t)$ меняет знак. Такое поведение $M(t)$ позволяет объяснить, почему данная система является эффективным излучателем электромагнитных волн.

Для оценки мощности возникающее электромагнитное излучение было рассчитано как излучение магнитного диполя с заданным магнитным моментом [3]. Графики зависимости мощности излучения $S(t)$ приведены на рис. 7 для $\omega = 1$, $B_0 = 5; 2; 1,5$ (кривые 1–3) и $\omega = 0, 1$, $B_0 = 5; 2$ (кривые 4 и 5).

Максимальная мощность излучения падает с уменьшением B_0 , а скорость нарастания внешнего поля ω влияет более слабо (см. кривые 1 и 4 и табл. 2). Провал в пике излучения соответствует изменению знака $M''(t)$. Длительность основного токового импульса излучения составляет $\approx 0,8$ нс для $B_0 = 5$ и $2,7$ нс для $B_0 = 1,5$. Она увеличивается с уменьшением B_0 , что связано со снижением скорости токовой волны. Излучение, обусловленное нарастанием внешнего поля, определяется скоростью его изменения и для рассматриваемых процессов на несколько порядков меньше максимума. Так, для $\omega = 1$, $B_0 = 5$ (кривая 1) он составляет 1 % от основного максимума.

В табл. 2 приведены значения максимальной мощности излучения S для рассмотренных выше вариантов. Для $\omega = \infty$ приводится значение, соответствующее процессу выхода токовой волны из проводника. Более сильная зависимость мощности излучения от ω для $B_0 = 5$ связана с тем, что в момент выхода токовой волны из сверхпроводника в пустоту значение поля на его внешней границе тем больше, чем больше ω .

Проведенные расчеты дают основание считать, что излучение, генерируемое кольцевым сверхпроводящим коммутатором, обусловлено резким изменением его магнитного момента при исчезновении сверхпроводимости во всем объеме проводника.

Подтверждением рассматриваемому механизму излучения служит сопоставление расчетных значений спектра с экспериментальными, полученными на описанной выше установке (рис. 8). Спектральная плотность мощности излучения измерялась с помощью четырехканального спектрометра, изготовленного в лаборатории, с полосами пропускания каждого канала 70 МГц. Характерное время измерения пиковых детекторов 10 нс. Оценка точности измерения $\pm 25\%$.

На рис. 8 представлен спектр излучения для $\omega = 0, 1$ и $B_0 = 2; 5$ (сплошная и штриховая кривые). Совпадение расчетных и экспериментальных данных (показаны вертикальными отрезками) вполне удовлетворительное, если учитывать модельный характер расчетной схемы. Частотный диапазон смещается в область более высоких значений ω при увеличении B_0 .

Таким образом, на основании феноменологической модели, являющейся обобщением теории Лондонов с учетом экспериментальной зависимости числа сверхпроводящих электронов от напряженности магнитного поля, дано объяснение механизма электромагнитного излучения, наблюдаемого в экспериментах при разрушении сверхпроводимости импульсом магнитного поля в источнике сверхширокополосного СВЧ-излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роуз-Инс А., Родерик Е. Введение в физику сверхпроводимости. М.: Мир, 1972.
2. Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Под ред. Д. М. Гинзбурга. М.: Мир, 1990.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1984.
4. Проблемы высокотемпературной сверхпроводимости / Под ред. В. Л. Гинзбурга, Д. А. Киржница. М.: Наука, 1977.
5. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 12/II 1996 г.
