ПМТФ, № 5, 1967

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДИМОСТИ

К. Г. Валеев, Ю. В. Ракитский

(Киев, Ленинград)

Рассматриваются способы численного решения краевой задачи. Один способ связан с методом последовательных приближений, другой использует метод коллокации [1]. Указана связь последнего метода с методами Ритца и Галеркина [2]. Дается применение метода коллокации к нестационарной задаче. Приближенное решение представляется в аналитической форме. Указывается путь отыскания абсолютной погрешности приближенного решения.

1. Некоторые неравенства, связанные с решением краевой задачи. Рассматривается нелинейное уравнение в частных производных, приведенное к безразмерной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-F(u, x, y) \tag{1.1}$$

Ищется решение в односвязной области D с границей Γ с заданными начальными и граничными условиями

$$u|_\Gamma=0; \qquad u|_{t=0}=\psi(x, y), \qquad (x, y)\in D \tag{1.2}$$

Нелинейная непрерывная функция $F(u, x, y)$ предполагается возрастающей по u при закрепленных x, y. Она характеризует потери тепла за счет теплообмена с окружающей средой.

Рассмотрим сначала стационарную задачу

$$\Delta u = F(u, x, y), \quad (x, y)\in D, \qquad u|_\Gamma=0 \tag{1.3}$$

и отметим некоторые неравенства. Из физических соображений очевидно существование и единственность решения краевой задачи (1.3).

Лемма 1. Если $F(0, x, y)\leqslant 0$ при $(x, y)\in D$, то $u(x, y)\geqslant 0$ при $(x, y)\in D$.

Доказательство. Пусть, напротив, в некоторой области D^* ($D^*\subset D$) с границей Γ^* выполнено неравенство

$$u(x, y)<0, \qquad (x, y)\in D^*; \qquad \text{и} \quad (x, y)=0, \qquad (x, y)\in\Gamma^* \tag{1.4}$$

Из формулы Грина

$$\int_{\Gamma^*} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds=\iint_{D^*}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy \tag{1.5}$$

Находим при $v\equiv u$ равенство

$$\iint_{D^*}[uF(u, x, y)+(\operatorname{grad} u)^2]\,dx\,dy=0 \tag{1.6}$$

В силу предположения, что

$$F_u'(u, x, y)\geqslant 0, \qquad (x, y)\in D \tag{1.7}$$

имеем неравенство

$$\iint_{D^*} uF(u, x, y)\,dx\,dy\geqslant 0 \tag{1.8}$$

Это противоречит (1.6), так как $u \not\equiv 0$ в D^*, и, следовательно,

$$\iint\limits_{D^*} (\operatorname{grad} u)^2 \, dx\, dy > 0 \tag{1.9}$$

Лемма доказана. Очевиден ее физический смысл. Если при $u = 0$ имеется приток тепла, то в области D температура u неотрицательна для стационарного решения.

Замечание 1. Можно доказать следующее. Если $F(0, x, y) < 0$ при $(x, y) \in D$, $F_u'(u, x, y) \geqslant 0$, то $u(x, y) > 0$ при $(x, y) \in D$.

Будем сравнивать теперь решения (1.3) с различными правыми частями. Наряду с (1.3) имеем решение граничной задачи

$$\Delta v = \Phi(v, x, y), \quad (x, y) \in D, \quad v|_\Gamma = 0 \tag{1.10}$$

Лемма 2. Если в области D выполнено неравенство

$$\Phi(v, x, y) \geqslant F(u, x, y) \quad \text{при } v \geqslant u \tag{1.11}$$

то имеет

$$u(x, y) \geqslant v(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in D \tag{1.12}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть в некоторой области $D^* \subset D$ с границей Γ^* имеет

$$u(x, y) < v(x, y), \quad (x, y) \in D^*, \quad u(x, y) = v(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma^* \tag{1.13}$$

Заменив в (1.5) функции v на $u - v$ и u на $u - v$, из (1.3), (1.10) получим

$$\iint\limits_{D^*} (u - v)(F(u, x, y) - \Phi(v, x, y))\, dx\, dy < 0 \tag{1.14}$$

Это противоречит предположению (1.13) и условию (1.11). Лемма доказана.

Физический смысл леммы состоит в том, что при большем оттоке тепла температура v в стационарном решении меньше.

Замечание 2. Можно доказать, что при выполнении условия

$$\Phi(v, x, y) > F(u, x, y), \quad (x, y) \in D \quad \text{при } v \geqslant u \tag{1.15}$$

имеем строгое неравенство $u(x, y) > v(x, y)$, $(x, y) \in D$. Изложенные неравенства близки по смыслу к принципу максимума [3].

2. Отыскание ошибки приближенного решения. Пусть известно приближенное решение $u = u_0(x, y)$ задачи (1.3), удовлетворяющее граничному условию

$$u_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{2.1}$$

Оценим величину

$$z = u - u_0 \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение функцию-невязку приближенного решения

$$\delta(x, y) = -\Delta u_0(x, y) + F(u_0, x, y) \tag{2.3}$$

Уравнения для z принимают вид

$$\Delta z = F(z + u_0, x, y) - \Delta u_0(x, y), \quad z|_\Gamma = 0 \tag{2.4}$$

Из (1.7) следует возможность представления

$$F(z + u_0, x, y) - \Delta u_0(x, y) = \delta(x, y) + \lambda(z, x, y)\, z \tag{2.5}$$

$$\lambda(z, x, y) \geqslant 0, \quad (x, y) \in D \tag{2.6}$$

Введем, наряду с $\delta(x, y)$, вспомогательные функции

$$\delta_1(x, y) = \min\{0, \delta(x, y)\}, \quad \delta_1(x, y) \leqslant 0 \tag{2.7}$$

$$\delta_2(x, y) = \max\{0, \delta(x, y)\}, \quad \delta_2(x, y) \geqslant 0 \tag{2.8}$$

и рассмотрим краевые задачи

$$\Delta z_1 = \delta_1(x, y) + \lambda(z_1, x, y)\, z_1, \quad z_1|_\Gamma = 0 \tag{2.9}$$

$$\Delta z_2 = \delta_2(x, y) + \lambda(z_2, x, y)\, z_2, \quad z_2|_\Gamma = 0 \tag{2.10}$$

Из леммы 2 и очевидного неравенства $\delta_1(x, y) \leqslant \delta(x, y) \leqslant \delta_2(x, y)$ имеем оценку для z

$$z_2 \leqslant z \leqslant z_1, \qquad (x, y) \in D \tag{2.11}$$

Из (2.7), (2.8) и леммы 1 следует, что $z_1 \geqslant 0$, $z_2 \leqslant 0$. Пользуясь леммой 2 и положительностью z_1, можно завысить z_1, отбросив положительное слагаемое в (2.9). Получим, что

$$z_1(x, y) \leqslant w_1(x, y), \qquad (x, y) \in D \tag{2.12}$$

где $w_1(x, y)$ — решение краевой задачи

$$\Delta w_1 = \min\{0, \delta(x, y)\}, \qquad w_1|_\Gamma = 0 \tag{2.13}$$

Аналогично найдем решение краевой задачи

$$\Delta w_2 = \max\{0, \delta(x, y)\}, \qquad w_2|_\Gamma = 0 \tag{2.14}$$

и приходим к теореме

Теорема 1. Ошибка $z(x, y)$ (2.2) приближенного решения $u_0(x, y)$ краевой задачи (1.3) оценивается неравенством

$$w_2(x, y) \leqslant z(x,y) \leqslant w_1(x, y), \quad (x,y) \in D \tag{2.15}$$

где w_1, w_2 — решения краевых задач (2.13), (2.14), а функция $\delta(x, y)$ определяется в (2.3).

Следствие 1. Можно упростить оценку. Введем число M

$$M \geqslant |\Delta u_0(x, y) - F(u_0(x, y), x, y)|, \qquad (x, y) \in D + \Gamma \tag{2.16}$$

и решим краевую задачу в области D

$$\Delta w = -1, \qquad w|_\Gamma = 0 \tag{2.17}$$

Ошибка решения задачи (1.3) оценивается по формуле

$$|u(x, y) - u_0(x, y)| \leqslant Mw(x, y) \tag{2.18}$$

Замечание 3. Из теоремы 1 следует, что чем меньше $|\delta(x, y)|$ в D, тем в общем случае меньше ошибка приближенного решения $u_0(x, y)$. Естественна мысль — применить метод коллокации, т. е. выбрать $u_0(x, y)$ так, чтобы невязка $\delta(x, y)$ обращалась в нуль в заданных точках (x_k, y_k) в области D.

Замечание 4. Теорему 1 можно обобщить на трехмерный (n-мерный) случай. Сформулируем ее без доказательства.

Теорема 2. Рассматривается краевая задача

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 + \partial^2 u / \partial z^2 - F(u, x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in D \tag{2.19}$$

с граничным условием

$$u(x, y, z) = 0, \qquad (x, y, z) \in \Gamma \tag{2.20}$$

где D — односвязная трехмерная область с границей Γ.

Функция F непрерывна и не убывает при возрастании u

$$F_u'(u, x, y, z) \geqslant 0, \quad (x, y, z) \in D \tag{2.21}$$

Пусть найдено приближенное решение $u_0(x, y, z)$, удовлетворяющее граничному условию. Найдем

$$M = \max|\Delta u_0(x, y, z) - F(u_0(x, y, z), x, y, z)| \, (x, y, z) \in D + \Gamma \tag{2.22}$$

Для оценки приближенного решения имеем неравенство

$$|u(x, y, z) - u_0(x, y, z)| \leqslant Mw(x, y, z) \tag{2.23}$$

где $w(x, y, z)$ — решение краевой задачи

$$\Delta w + 1 = 0, \quad w(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \tag{2.24}$$

Замечание 5. Если уже известны границы $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ изменения u в решении (1.3) и между этих значений u имеем

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant F_u'(u, x, y) \leqslant \lambda_2, \quad (x, y) \in D \tag{2.25}$$

то при отыскании ошибки приближенного решения можно вместо уравнения Пауссона (2.13), (2.14), (2.17), (2.24) решить уравнение Гельмгольца, которое, например, в случае (2.17) принимает вид $\Delta w - \lambda_1 w = -1$.

3. Отыскание ошибки решения краевой задачи в единичном круге. Пусть областью D будет внутренность единичного круга. Ищется решение $u(\rho, \varphi)$ краевой задачи

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=F(u,\rho,\varphi),\quad u(1,\varphi)=0 \tag{3.1}$$

где функция $F(u, \rho, \varphi)$ предполагается возрастающей по u при закрепленных ρ, φ. Пусть каким-то путем найдено приближенное решение

$$u=u_0(\rho,\varphi),\qquad u_0(1,\varphi)=0 \tag{3.2}$$

Вычислим наибольшее значение невязки при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$M=\max_{\rho,\varphi}\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\rho^2}-F(u_0,\rho,\varphi)\right| \tag{3.3}$$

Ошибка приближенного решения оценивается по формуле

$$|u(\rho,\varphi)-u_0(\rho,\varphi)|\leqslant 0.25\,(1-\rho^2)\,M\leqslant 0.25\,M \tag{3.4}$$

Это следует из решения вспомогательного уравнения (2.17) и использования следствия 1.

4. Метод последовательных приближений. Для решения стационарной задачи (1.3) можно применить метод последовательных приближений, состоящий в последовательном решении ряда краевых задач для уравнения Пауссона вида

$$\Delta u_{j+1}=F(u_j,x,y),\quad (x,y)\in D,\quad u_j|_\Gamma=0\quad (j=0,1,2,\ldots) \tag{4.1}$$

В качестве u_0 можно взять произвольную функцию, например $u_0\equiv 0$. Из теоремы 1 следует, что последовательность $u_j(x, y)$ равномерно сходится в области D к решению, если выполнено условие

$$|w(x,y)\,F_u'(u,x,y)|<1,\quad (x,y)\in D,\quad u^{(1)}\leqslant u\leqslant u^{(2)} \tag{4.2}$$

Здесь $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — заранее известные границы изменения u. В частности, для решения задачи (3.1) условие сходимости последовательных приближений принимает вид

$$\max_{\rho,\varphi,u}|(1-\rho^2)\,F_u'(u,\rho,\varphi)|<4\quad (0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad u^{(1)}\leqslant u<u^{2}) \tag{4.3}$$

Для улучшения сходимости $u_j(x, y)$ можно выделить из $F(u, \rho, \varphi)$ линейную по u часть, например, пользуясь условием выполнения

$$\min_\lambda \max_{\rho,\varphi,u}|F_u'(u,\rho,\varphi)-\lambda| \tag{4.4}$$

где ρ, φ, u определены в (4.3). Последовательные приближения приводят к решению ряда краевых задач для уравнения Гельмгольца

$$\begin{gathered}\Delta u_{j+1}-\lambda u_{j+1}=F(u_j,x,y)-\lambda u_j(x,y),\quad (x,y)\in D\quad u_j|_\Gamma=0,\\ u_0\equiv 0\quad (j=0,1,2,\ldots)\end{gathered} \tag{4.5}$$

Пример. Решая указанным приемом краевую задачу при $u \geqslant 0$

$$\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2=-1+0.1\,u^2,\quad u=0\quad (x^2+y^2=1) \tag{4.6}$$

получим, используя полярные координаты

$$\begin{gathered}u_0=0,\quad u_1(x,y)=0{,}25-0.25\,(x^2+y^2)\\ u_2(x,y)=0.2454-0.2438\,(x^2+y^2)-0.0016\,(x^2+y^2)^2\end{gathered} \tag{4.7}$$

Из оценки (3.4) находим, что ошибка приближенного решения $u_2(x, y)$ не превышает 0.0003.

5. О решении неоднородного уравнения Гельмгольца. При методе последовательных приближений приходится решать краевые задачи для неоднородных линейных уравнений. Для круговой области для уравнегия Гельмгольца часто встречается задача отыскания $u(\rho, \varphi)$, где

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\lambda u=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\rho)\cos 2k\varphi, \qquad u(1, \varphi)=0 \tag{5.1}$$

$$f_k(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{kn}\rho^{2(k+n)} \tag{5.2}$$

Предполагаем, что ряды в (5.1), (5.2) сходятся абсолютно и равномерно при $|\rho| \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Ищем решение $u(\rho, \varphi)$ в виде ряда

$$u(\rho, \varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\rho)\cos 2k\varphi, \qquad w_k(1)=0 \tag{5.3}$$

Для отыскания $w_k(\rho)$ получим уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw_k(\rho)}{d\rho}\right)-\frac{4k^2}{\rho^2}w_k(\rho)-\lambda w_k(\rho)=f_k(\rho) \tag{5.4}$$

Это — неоднородное уравнение Бесселя. Непосредственными вычислениями авторы убедились, что удобнее сразу искать решение $w_k(\rho)$ в форме специального ряда

$$w_k(\rho)=\rho^{2k}\left[a_0\frac{\rho^2-1}{2(4k+2)}+a_1\frac{\rho^4-1}{4(4k+4)}+a_2\frac{\rho^6-1}{6(4k+6)}+\ldots\right] \tag{5.5}$$

Для коэффициентов a_n получим уравнения

$$a_0+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(4k+2n+2)}a_n=f_{k0} \tag{5.6}$$

$$a_n-\lambda\left[\frac{1}{2n(4k+2n)}\right]a_{n-1}=f_{kn} \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{5.7}$$

При неопределенном a_0 из (5.7) последовательно определяются a_1, a_2,... Подставив их значения в (5.6), получим a_0. При многократных итерациях оказалось удобным найти сначала частные решения, соответствующие одночленной правой части вида

$$f_k(\rho)=\rho^{2k+2n} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

6. Оценки нестационарных решений. Пусть $u(t, x, y)$ — решение уравнения (1.1).

Рассмотрим интеграл

$$\Omega(t)=\iint_D u^2(t, x, y)\,dx\,dy \tag{6.1}$$

Из (1.10), дифференцируя (6.1), получаем

$$\frac{d\Omega(t)}{dt}=2\iint_D u\Delta u\,dx\,dy-2\iint_D uF(u, x, y)\,dx\,dy \tag{6.2}$$

Обозначим через A наибольшее значение w, где w — решение краевой задачи (2.17),

$$\Delta w=-1, \qquad w|_\Gamma=0, \qquad A=\max_{x, y} w(x, y), \ (x, y)\in D \tag{6.3}$$

Величина A зависит лишь от области D. Из замечания 1 имеем, что $w(x, y) > 0$ при $(x, y) \in D$.

Введем собственные значения и собственные функции краевой задачи ([1], стр. 671)

$$\Delta u + \mu u = 0, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{6.4}$$

Собственные функции обозначим через $v_1(x, y)$, $v_2(x, y), \ldots$

Соответствующие собственные значения μ обозначим через $\mu_1, \mu_2, \ldots$ При нумерации предполагаем, что

$$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \tag{6.5}$$

Пользуясь экстремальным свойством собственных значений и функций, получим, что минимум интеграла

$$-\iint\limits_D u \Delta u \, dx\, dy = \iint\limits_D \operatorname{grad}^2 u \, dx\, dy \tag{6.6}$$

для функций u, непрерывных в D вместе со вторыми производными и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_D u^2 \, dx\, dy = 1, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{6.7}$$

достигается при $u = v_1$ и имеет значение μ_1. Имеем

$$\mu_1 \iint\limits_D u^2 \, dx\, dy \leqslant -\iint\limits_D u \Delta u \, dx\, dy \tag{6.8}$$

Из теоремы 1 при $\delta(x, y) = -1$ в (2.14) для уравнения

$$\Delta v_1 + \mu_1 v_1 = 0 \tag{6.9}$$

и условия (6.3) получим оценку

$$v_1(x, y) \leqslant \max v_1(x, y)\, \mu_1 A_1 \tag{6.10}$$

Отсюда имеем оценку снизу для первого собственного μ_1 числа

$$A^{-1} \leqslant \mu_1 \tag{6.11}$$

Пусть выполнено условие (2.25). При $u \geqslant 0$ получим неравенство при произвольном α

$$uF(u, x, y) \geqslant \lambda u^2 + F(0, x, y)\, u \geqslant (\lambda - {}^1/_2\, \alpha^2)\, u^2 - {}^1/_2\, \alpha^{-2} F^2(0, x, y) \tag{6.12}$$

Из неравенств (6.8), (6.11), (6.12) приходим в (6.2) к дифференциальному неравенству

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} \leqslant -\left(\frac{2}{A} + 2\lambda - \alpha^2\right)\Omega(t) + \frac{1}{\alpha^2}\iint\limits_D F^2(0, x, y)\, dx\, dy \tag{6.13}$$

Интегрируя (6.13), получим интегральную оценку решения

$$\iint\limits_D u^2(t, x, y)\, dx\, dy \leqslant e^{-\varkappa t} \iint\limits_D u^2(0, x, y)\, dx\, dy + \\ + \frac{1 - e^{-\varkappa t}}{\varkappa \alpha^2} \iint\limits_D F^2(0, x, y)\, dx\, dy, \qquad \varkappa = 2A^{-1} + 2\lambda - \alpha^2 > 0 \tag{6.14}$$

Из формулы (6.14) можно вывести много разнообразных неравенств для решения уравнения (1.1). Пусть, например, $u_0(x, y)$ — стационарное решение задачи (1.1), (1.2). Положим

$$z(t, x, y) = u(t, x, y) - u_0(x, y) \tag{6.15}$$

Для отыскания z имеем уравнения

$$\partial z / \partial t = \Delta z - [F(z + u_0, x, y) - \Delta u_0]$$

$$z|_\Gamma = 0, \qquad z|_{t=0} = \varphi(x, y) - u_0(x, y) \tag{6.16}$$

Из (6.14) получим неравенство

$$\iint_D [u(t, x, y) - u_0(x, y)]^2 \, dx\, dy \leqslant e^{-\varkappa t} \iint_D [\varphi(x, y) - u_0(x, y)]^2 \, dx\, dy \tag{6.17}$$

$$\varkappa = 2A^{-1} + 2\lambda$$

где A определено в (6.3), λ в (2.25). Можно получить оценки для разности решений задачи (1.1), (1.2) с различными начальными условиями. Из п. 3 получим, что для единичного круга $A^{-1} = 4$.

7. Метод Галеркина в нестационарной задаче. Выберем семейство ортогональных нормированных функций $\psi_j(x, y)$ (7.1)

$$\iint_D \psi_j(x, y)\, \psi_k(x, y)\, dx\, dy = 0 \quad (j \neq k), \qquad \iint_D \psi_j^2(x, y)\, dx\, dy = 1, \qquad \psi_j|_\Gamma = 0$$

Будем искать приближенное решение задачи (1.1) — (1.3) в виде конечной суммы

$$u^*(t, x, y) = a_1(t)\psi_1(x, y) + \ldots + a_n(t)\psi_n(x, y), \qquad u^*|_\Gamma = 0 \tag{7.2}$$

подставив $u^*(t, x, y)$ в (1.1), получим невязку — $\delta(t, x, y)$

$$\delta(t, x, y) \equiv \partial u^* / \partial t - \Delta u^* + F(u^*, u, y) \tag{7.3}$$

Выберем коэффициенты $a_j(t)$ из условия ортогональности $\delta(t, x, y)$ к функциям $\psi_j(x, y)$ $(j = 1, \ldots, n)$ в области D. Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{da_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ji} a_i - f_j(a_1, \ldots, a_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{7.4}$$

$$\beta_{ij} = \iint_D \psi_j \Delta\psi_i \, dx\, dy, \qquad f_j = \iint_D F(u^*, x, y)\, \psi_j \, dx\, dy \tag{7.5}$$

Начальные условия для a_j находим при помощи (1.2.), из уравнений

$$a_j(0) = \iint_D \psi_j(x, y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy \tag{7.6}$$

Решая (7.4), например при помощи моделирующих устройств, находим приближенное решение $u^*(t, x, y)$. Для оценки погрешности можно применить формулу (6.14). Покажем, что система дифференциальных уравнений (7.4) асимптотически устойчива. Сначала докажем ограниченность решений. Умножая j-е уравнение (7.4) на a_j и суммируя, находим

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{da_j}{dt} \iint_D u^* \Delta u^* \, dx\, dy - \iint_D F(u^*, x, y)\, u^* \, dx\, dy \tag{7.7}$$

Из неравенств (6.6), (6.12), (7.7) получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \leqslant -(2A^{-1} + 2\lambda - \alpha^2) \iint_D (u^*)^2 \, dx\, dy + \alpha^{-2} \iint_D F^2(0, x, y)\, dx\, dy \tag{7.8}$$

Здесь α — произвольное число. Выберем его из условия

$$\varkappa = 2A^{-1} + 2\lambda - \alpha^2 > 0 \tag{7.9}$$

Так как имеем

$$\iint\limits_D (u^*)^2\, dx\, dy = \iint\limits_D \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \psi_i \psi_j\, dx\, dy = \sum_{j=1}^n a_j^2 \tag{7.10}$$

то из (7.8) находим оценку для приближенного решения

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \leqslant e^{-\varkappa t} \iint [u^*(0, x, y)]^2\, dx\, dy + \frac{1 - e^{-\varkappa t}}{\varkappa \alpha^2} \iint\limits_D F^2(0, x, y)\, dx\, dy \tag{7.11}$$

Отметим, что из (6.8), (6.11) следует неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n \beta_{ji} a_i a_j \leqslant -\mu_1 \sum_{j=1}^n a_j^2 \leqslant -\frac{1}{A} \sum_{j=1}^n a_j^2 \tag{7.12}$$

Рассмотрим, наряду с решением системы (7.4) $a_i(t)$ другое решение $b_i(t)$ с начальными значениями, отличными от (7.6). Имеем

$$\frac{db_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \beta_{ji} b_i - f_j(b_1, \ldots, b_n) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{7.13}$$

Из (7.4), (7.13) получаем

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2 = 2 \sum_{i,j=1}^n \beta_{ji} (a_j - b_j)(a_i - b_i) - Q(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \tag{7.14}$$

Здесь

$$Q(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = 2 \sum_{j=1}^n (a_j - b_j)[f_j(a_1, \ldots, a_n) - f_j(b_1, \ldots, b_n)] =$$

$$= 2 \iint\limits_D (u^* - u^\circ)(F(u^*, x, y) - F(u^\circ, x, y))\, dx\, dy \tag{7.15}$$

$$u^\circ = b_1(t)\psi_1(x, y) + \ldots + b_n(t)\psi_n(x, y) \tag{7.16}$$

В силу предположения (1.7) под знаком интеграла в (7.15) стоит неотрицательная функция. Поэтому из (7.12), (7.14) следует дифференциальное неравенство

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2 \leqslant -2A^{-1} \sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2 \tag{7.17}$$

Интегрируя (7.17), находим оценку

$$\sum_{j=1}^n [a_j(t) - b_j(t)]^2 \leqslant \exp\{-2A^{-1}t\} \sum_{j=1}^n [a_j(0) - b_j(0)]^2, \; A > 0, \tag{7.18}$$

Из (7.11), (7.18) следует существование единственного стационарного решения системы (7.4). Это решение равномерно асимптотически устойчиво.

8. Применение метода коллокации к нестационарной задаче. Рассмотрим какую-либо квадратурную формулу с узлами в точках $M_i(x_i, y_i)$ для вычисления определенного интеграла в области D

$$\iint_D \delta(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \delta(x_i, y_i), \qquad M_i \in D \tag{8.1}$$

Уравнения (7.4) приближенно представляются в форме (8.2)

$$\iint_D \delta(t, x, y)\, \psi_j(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \delta(t, x_i, y_i)\, \psi_j(x_i, y_i) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Уравнения (8.2) могут быть, в свою очередь, удовлетворены, если положить

$$\delta(t, x_i, y_i) \equiv \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{da_j}{dt} \psi_j(x_i, y_i) - a_j \Delta\psi_j(x_i y_i)\right] + F(u_i^*, x_i, y_i) = 0 \tag{8.3}$$

$$u_i^* = a_1(t)\, \psi_1(x_i, y_i) + \ldots + a_n(t)\, \psi_n(x_i, y_i) \tag{8.4}$$

Основное достоинство уравнений (8.3) — в простоте их составления. Указанное преимущество метода коллокации перед методом Галеркина или методом Ритца (для стационарной задачи) становится очевидным при нелинейных уравнениях. В этом случае точное вычисление интегралов в (7.5) во многих случаях становится невозможным. Применение квадратурных формул приводит к уравнениям (8.2) — равносильным уравнениям метода коллокации. При применении квадратурной формулы повышенной точности в случае, когда точки коллокации являются узлами квадратурной формулы, результаты метода коллокации и метода Галеркина становятся практически равносильными.

Пусть квадратурная формула (8.1) дает точный ответ при вычислении интегралов вида

$$\iint_D \psi_j(x, y)\, \psi_k(x, y)\, dx\, dy = \delta_{jk} \tag{8.5}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Если в качестве нормированных ортогональных функций $\psi_j(x, y)$ выберем собственные функции $v_j(x, y)$ краевой задачи (6.4) с различными собственными значениями μ_j (6.5), то разрешение уравнений (8.3) относительно производных приводит к уравнениям

$$\frac{da_j}{dt} + \mu_j a_j + \sum_{i=1}^{n} A_i v_j(x_i, y_i)\, F\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k(x_i, y_i), x_i, y_i\right) = 0 \tag{8.6}$$

Другой путь в методе коллокации состоит в выборе функций $\psi_j(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\psi_j(x_i, y_i) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \psi_j|_\Gamma = 0 \tag{8.7}$$

Уравнения (8.3) принимают вид

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j \Delta\psi_j(x_i, y_i) - F(a_i, x_i, y_i) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8.8}$$

Заметим, что в системе (8.6) простой будет линейная часть, в системе (8.8) будут простыми нелинейные функции, зависящие лишь от одной из переменных a_j. Система (8.8) имеет единственное равномерно асимптотически устойчивое решение в силу близости к системе (7.4).

Пример. Найдем решение краевой задачи

$$\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2 + 1, \quad u\,|_{t=0} = 0, \quad u\,|_{x=0} = u\,|_{x=1} = 0 \tag{8.9}$$

Используем лишь одну точку коллокации $x = 0.5$ Ищем решение в виде функции

$$u\,(t,\ x) = a\,(t)\,x\,(1 - x), \quad a\,(0) = 0 \tag{8.10}$$

которая удовлетворяет граничным и начальным условиям.
Подставляя $u\,(t,\ x)$ в (8.9) при $x = 0.5$, имеем уравнение

$$0.25\, da\,(t) / dt = -2a\,(t) + 1, \qquad a\,(0) = 0 \tag{8.11}$$

Находим приближенное решение

$$u_0\,(t,\ x) = 0.5\ (x - x^2)\,(1 - e^{-8t}) \tag{8.12}$$

Точное решение имеет вид

$$u\,(t,\ x) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\,(2n + 1)\pi x\,\{1 - \exp\,[-(2n + 1)^2\,\pi^2 t]\} \tag{8.13}$$

Наибольшее отклонение приближенного решения от точного составляет 0.008 при $t \approx 0.12$, $x = 0.5$. Стационарное решение находится точно.

9. О решении стационарной краевой задачи. При отыскании стационарного решения задачи (1.1), (1.2) методом Ритца, Галеркина или методом коллокации получаем систему нелинейных уравнений. Например, при координатных функциях $\psi_j\,(x,\ y)$, удовлетворяющих условиях (8.7), из метода коллокации получим уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \Delta\psi_j\,(x_i,\ y_i) - F\,(a_i,\ x_i,\ y_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{9.1}$$

Для их решения можно использовать метод последовательных приближений, который вытекает из системы (8.8)

$$a_{i,\ m+1} = a_{im} + h\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{jm} \Delta\psi_j\,(x_i,\ y_i) - F\,(a_{im},\ x_i,\ y_i)\Big]$$
$$(i = 1, \ldots, n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots, h > 0) \tag{9.2}$$

В качестве a_{i0} берем произвольные значения. При достаточно малых значениях $h > 0$, в силу асимптотической устойчивости решений системы (8.8), решение a_i системы (9.1) находим из (9.2)

$$a_i = \lim a_{im} \text{ при } m \to \infty \tag{9.3}$$

В заключение отметим, что метод коллокации для нестационарной задачи (1.1), (1.2) оказался во много раз менее трудоемким метода сеток.

Поступила 19 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд. иностр. лит., 1953.
2. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Изд-во «Наука», 1966.
3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Изд. «Мир», 1966.