

УДК 539.69

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭМУЛЬСИИ С ЗАТВЕРДЕВАНИЕМ

А. Г. Петрова, В. В. Пухначев*

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

Предлагается математическая модель процесса затвердевания эмульсии, движущейся под действием термокапиллярных сил и микрогравитации с малой концентрацией дисперсной фазы. Исследуется задача первого приближения, возникающая при представлении решений в виде асимптотических рядов по малому параметру. Найдены условия частичного и полного вытеснения примеси из затвердевшей части, а также условия накопления примеси затвердевшей смесью. Рассматривается задача получения композита с заданным распределением дисперсной фазы. Найдены и исследованы точные решения, достаточно полно отражающие различные особенности качественного поведения решения при различных режимах входных данных.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Основные предположения. 1. Одномерное движение эмульсии под действием термокапиллярных сил и микрогравитации описывается математической моделью, предложенной в [1], искомыми величинами считаются температура T и концентрация дисперсной фазы c , после нахождения которых скорости и давление восстанавливаются из дополнительных уравнений.

2. Процесс затвердевания описывается в рамках классической задачи Стефана, скачком плотности при затвердевании пренебрегаем.

3. Затвердевшая матрица неподвижна, следовательно, среднеобъемная скорость движения смеси равна нулю.

При данных предположениях температура смеси и концентрация дисперсной фазы в жидкой смеси описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} c + \frac{\partial}{\partial x} \left(c(1-c) \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \right) &= 0, \\ \rho_d \lambda_d c \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + (1-c) \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \rho_m \lambda_m (1-c) \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} - c \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} &= \\ &= k_m \frac{\partial}{\partial x} \left((1-Mc) \frac{\partial T}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $M = 3(k_m - k_d)/(2k_m + k_d)$; $K = 2R^2(\rho_d - \rho_m)(\mu_d + \mu_m)/(3\mu_m(2\mu_m + 3\mu_d))$; $L = 2Rk_m\sigma\mu_m/((2\mu_m + 3\mu_d)(2k_m + k_d))$, где ρ_d , ρ_m , λ_d , λ_m , μ_d , μ_m , k_d , k_m обозначают плотность, теплоемкость, динамическую вязкость и теплопроводность в дисперсной (индекс d) и несущей (индекс m) субстанциях (эти коэффициенты считаются положительными и постоянными); R — радиус частиц, являющихся дисперсными включениями; σ —

положительная постоянная, представляющая собой коэффициент линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры; g — постоянное ускорение микрогравитации, которое считается положительным, если ускорение силы тяжести направлено в сторону большей температуры, и отрицательным в противном случае.

В жидкой матрице с затвердевшими включениями отсутствует термокапиллярный эффект, поэтому в уравнениях (1.1) нужно положить $L = 0$. Наконец, в твердой матрице отсутствуют как термокапиллярный эффект, так и сила Архимеда, следовательно, $L = Kg = 0$. Условия на линии сильного разрыва имеют вид

$$[c]D = [c(Kg + LT_x)(1 - c)], \quad [T] = 0, \quad (1.2)$$

$$[U]D = [(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)c(1 - c)(Kg + LT_x)T] - [k_m(1 - Mc)T_x],$$

где символ $[.]$ обозначает разность значений функции по разные стороны линии разрыва, причем скачок внутренней энергии $[U]$ считается постоянным и равным γ ; D — скорость фазовой границы.

Введем в рассмотрение «приведенную концентрацию» $C = c/\varepsilon$, где ε — максимальное значение начальной концентрации ($\varepsilon \ll 1$), сохранив за новой функцией прежнее название и отметив, что ее значения уже не обязаны быть ограниченными сверху единицей.

Уравнения (1.1), (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C + \frac{\partial}{\partial x} \left(C(1 - \varepsilon C) \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \right) &= 0, \\ \rho_d \lambda_d \varepsilon C \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + (1 - \varepsilon C) \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \rho_m \lambda_m (1 - \varepsilon C) \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon C \left(L \frac{\partial T}{\partial x} + Kg \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} &= \\ &= k_m \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - M\varepsilon C) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

а условия сильного разрыва

$$[C]D = [C(Kg + LT_x)(1 - \varepsilon C)], \quad [T] = 0,$$

$$[U]D = [(\rho_d \lambda_d - \rho_m \lambda_m)\varepsilon C(1 - \varepsilon C)(Kg + LT_x)T] - [k_m(1 - M\varepsilon C)T_x].$$

1.2. Дополнительные предположения. Предположение о малости концентрации дисперсной фазы дает основание к линеаризации, что и является основным методом исследования задачи в данной работе. В связи с тем что процесс теплопроводности в первом приближении ($\varepsilon = 0$) определяется параметрами несущей фазы (матрицы), будем считать:

— граница затвердевания матрицы $x = s_m(t)$ является границей Стефана для тепловой задачи и на ней выполнены условия сильного разрыва для температуры и концентрации;

— изотерма $T = T^d$, где T^d — температура затвердевания дисперсной фазы, может являться линией сильного разрыва только для концентрации дисперсной фазы ($x = s_d(t)$ будем считать уравнением этой изотермы);

— тепловой поток направлен в сторону возрастания координаты x .

Пусть температура затвердевания матрицы T^m меньше температуры затвердевания дисперсной фазы T^d . Концентрацию твердой дисперсной фазы в затвердевшей матрице (область $x < s_m(t)$) будем обозначать $C^s(x, t)$, концентрацию твердой дисперсной фазы в жидкой матрице (область $s_m < x < s_d$) — $C^{sl}(x, t)$, и, наконец, концентрацию жидкой дисперсной фазы в жидкой матрице (область $x > s_d(t)$) обозначим $C^l(x, t)$. В результате разложения по малому параметру ε задача определения функций первого приближения $C^{sl}(x, t)$, $C^l(x, t)$, $C^s(x, t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C^i + \frac{\partial}{\partial x} \left(C^i \left(L \frac{\partial T^l}{\partial x} + Kg \right) \right) &= 0, \quad x > s_d(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} C^{sl} + \frac{\partial}{\partial x} (C^{sl} Kg) &= 0, \quad s_m(t) < x < s_d(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} C^s = 0, \quad x < s_m(t), \quad \frac{ds_d}{dt} (C^l - C^{sl}) &= C^l \left(L \frac{\partial T^l}{\partial x} + Kg \right) - C^{sl} Kg, \quad x = s_d(t), \\ \frac{ds_m}{dt} (C^{si} - C^s) &= C^{si} Kg, \quad x = s_m(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Температура $T^l(x, t)$ в жидкой смеси и положение свободной границы $s_m(t)$ предварительно находятся из решения классической двухфазной задачи Стефана

$$\begin{aligned} \rho_m^l \lambda_m^l \frac{\partial T^l}{\partial t} = k_m^l \frac{\partial^2 T^l}{\partial x^2}, \quad x > s_m(t), \quad \rho_m^s \lambda_m^s \frac{\partial T^s}{\partial t} = k_m^s \frac{\partial^2 T^s}{\partial x^2}, \quad x < s_m(t), \\ T^l = T^s = T^m, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} \gamma = k_m^s \frac{\partial T^s}{\partial x} - k_m^l \frac{\partial T^l}{\partial x}, \quad x = s_m(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

с некоторыми граничными и начальными условиями, например:

$$\begin{aligned} T^s(0, t) = f^s(t) < T^m, \quad T_x^l(\infty, t) = 0, \quad T^s(x, 0) = \varphi^s(x) < T^m, \quad x \in (0, s(t)), \\ T^l(x, 0) = \varphi^l(x) > T^m, \quad x \in (s(t), \infty), \quad s(0) = s_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Граница $x = s_d(t)$ определяется как изотерма $T^l(s_d(t), t) = T^d$.

Предположим теперь, что температура затвердевания матрицы T^m больше температуры затвердевания дисперсной фазы T^a . Поскольку в затвердевшей матрице дисперсные включения неподвижны, даже если они не затвердели, граница затвердевания дисперсной фазы $x = s_d(t)$ уже не является линией разрыва концентрации. Задача определения концентрации дисперсной фазы в затвердевшей матрице $C^s(x, t)$ и концентрации дисперсной фазы в жидкой матрице $C^l(x, t)$ состоит из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} C^l + \frac{\partial}{\partial x} \left(C^l \left(L \frac{\partial T^l}{\partial x} + Kg \right) \right) = 0, \quad x > s_m(t); \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} C^s = 0, \quad x < s_m(t) \quad (1.7)$$

и условия

$$\frac{ds_m}{dt} (C^l - C^s) = C^l \left(L \frac{\partial T^l}{\partial x} + Kg \right), \quad x = s_m(t). \quad (1.8)$$

Функции $T^l(x, t)$ и $s_m(t)$ также являются решением классической двухфазной задачи Стефана (1.4), (1.5).

Для описанных систем поставим две задачи: задачу нахождения распределения концентрации в затвердевшей части по заданному начальному распределению концентраций $C^{sl}(x, 0) = C_0^{sl}(x) > 0$, $C^l(x, 0) = C_0^l(x) > 0$ в жидкой матрице, которую назовем прямой, и задачу нахождения начального распределения концентрации в жидкой матрице по заданному распределению концентрации $C_0^s(x) \geq 0$ в затвердевшей части, которую условно назовем обратной. Будем искать классическое решение поставленных задач с неотрицательными ограниченными функциями C^s , C^{sl} , C^l . Для простоты предполагается, что функции $C_0^l(x)$ и $C_0^s(x)$ заданы на полубесконечных интервалах.

2. УСЛОВИЯ ЧАСТИЧНОГО И ПОЛНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ПРИМЕСИ

Нас будет интересовать процесс «направленного затвердевания», т. е. решения задачи Стефана, удовлетворяющие неравенству $\frac{ds_m}{dt}(t) > 0$ для всех значений времени t . Это требование легко обеспечивается в терминах входных данных задачи Стефана [2]. При этом в силу принципа максимума $T_x^i(x, t) \geq 0$, $T_{xx}^i(x, t) \leq 0$, $i = s, l$, а значит, и $\frac{ds_d}{dt}(t) \geq 0$ для всех значений времени t .

Рассмотрим соотношение концентраций дисперсной фазы по разные стороны от границы затвердевания матрицы в задаче с одним фронтом (случай $T^m > T^d$). Принимая во внимание условие (1.8), видим, что необходимым условием однозначной разрешимости прямой и обратной задач является выполнение неравенства

$$\frac{ds_m}{dt} \geq L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

которое обеспечивает «правильный» наклон характеристик $x = x(t)$, определяемых из задачи Коши

$$\frac{dx}{d\tau} = L \frac{\partial T^l}{\partial x}(x(\tau), \tau) + Kg, \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad x(t) = s_m(t), \quad (2.2)$$

и неотрицательность концентраций на границе затвердевания. Неравенство (2.1) означает, что скорость переноса примеси в жидкости, вызванного термокапиллярным эффектом и микрогравитацией, должна быть не больше скорости продвижения границы затвердевания. При этом в случае

$$L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg \geq 0$$

(рис. 1, а) имеет место неравенство $C^s(x) \leq C^l(x, s_m^{-1}(x))$, означающее, что примесь оттесняется в жидкую фазу. Если же

$$L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg < 0$$

(рис. 1, б), то $C^s(x) > C^l(x, s_m^{-1}(x))$, т. е. примесь забирается затвердевшей частью.

В случае выполнения тождественного равенства

$$\frac{ds_m}{dt} = L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg$$

примесь полностью вытесняется из твердой фазы, т. е. прямая задача может иметь лишь тривиальное решение, а обратная теряет смысл.

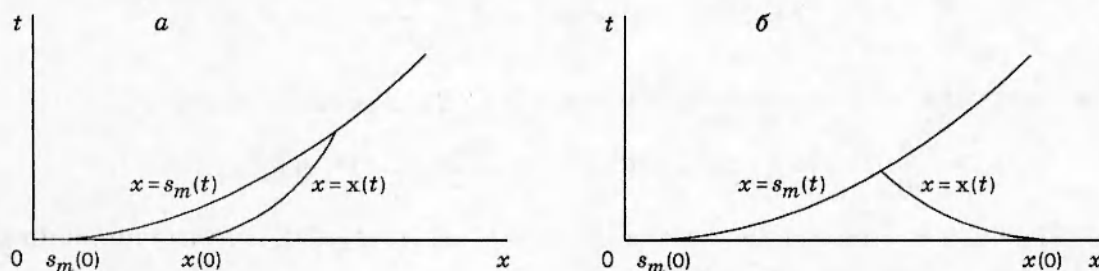


Рис. 1

Наконец, рассмотрим случай

$$\frac{ds_m}{dt} < L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg, \quad t > 0,$$

когда скорость, обусловленная термокапиллярным эффектом и микрогравитацией, превышает скорость продвижения границы затвердевания матрицы. Тогда в силу (1.8) не только $C^s(x) \equiv 0$, но и $C^l(s(t), t) \equiv 0$ для всех значений времени t .

Отметим, что условия «правильного» наклона характеристик для задачи (1.3) имеют следующий вид:

$$\frac{ds_m}{dt} \geq Kg, \quad \left(\frac{ds_a}{dt} - LT_x^l(s_a(t), t) - Kg \right) \left(\frac{ds_d}{dt} - Kg \right) \geq 0.$$

3. О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ

Найдем достаточные условия разрешимости прямой и обратной задач для системы (1.6)–(1.8).

Утверждение 3.1. Если

$$-A \frac{ds_m}{dt}(t) \leq L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t), t) + Kg \leq a \frac{ds_m}{dt}(t) \quad (3.1)$$

для всех значений времени t и некоторых постоянных A и a , удовлетворяющих условиям $A \geq 0$, $0 \leq a < 1$, и существует неотрицательная константа N , такая что для всех значений времени t

$$\left| \int_0^t \left(L \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(\tau), \tau) + Kg \right) \frac{\partial T^l}{\partial x}(s_m(t)(1-a) + s_m(\tau)a, \tau) d\tau \right| \leq N,$$

то решение $C^s(x)$ задачи (1.6)–(1.8) с начальным условием $C^l(x, 0) = C_0^l(x) > 0$, $x > s_m(0)$ неотрицательно и ограничено сверху величиной

$$\max C_0^l(x) \exp \{ Lk_m^{-1} ((\varphi^l(x) - T^m) + N) \rho_m^l \lambda_m^l \} (1 + A).$$

Утверждение 3.2. Пусть выполнено условие (3.1). Тогда решение $C^l(x, 0) = C_0^l(x)$ задачи (1.5)–(1.8) с условием $C^s(x, s_m^{-1}(x)) = C_0^s(x)$ неотрицательно и ограничено сверху величиной $\max C_0^s(x) \exp \{ Lk_m^{-1} N \rho_m^l \lambda_m^l \} / (1 - a)$.

Для доказательства утверждений 1 и 2 заметим, что в силу (1.8)

$$C^l(s_m(t), t) \left(\frac{d}{dt} s_m(t) - LT_x^l(s_m(t), t) - Kg \right) = C^s(s_m(t)) \frac{d}{dt} s_m(t),$$

а в силу уравнения (1.6)

$$C^l(s_m(t), t) = C^l(x(0), 0) \exp \left\{ - \int_0^t L \frac{\partial^2 T^l}{\partial x^2}(x(\tau), \tau) d\tau \right\},$$

где характеристики $x(\tau)$ определяются из задачи (2.2). Учитывая равенство

$$\frac{d}{d\tau} T^l(x(\tau), \tau) = \frac{\partial}{\partial x} T^l(x(\tau), \tau) \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} T^l(x(\tau), \tau),$$

первое из уравнений (1.4), неравенства $T_x^l(x, t) \geq 0$, $T_{xx}^l(x, t) \leq 0$, а также принцип максимума для $C^l(x, t)$, получим требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Рассмотрим предельный случай тождественного равенства в условии (2.1), т. е. ситуацию, когда линия $s_m(t)$ является характеристикой. Тогда, для того

чтобы решение задачи (1.6)–(1.8) с начальным условием $C^l(x, 0) = C_0^l(x) > 0$, $x > s_m(0)$ было ограниченным, необходимо, чтобы интеграл $\int_{s_m(0)}^x T_x^l(\xi, s_m^{-1}(\xi)) d\xi$ был ограничен равномерно по x . При этом имеет место полное вытеснение примеси из твердой фазы. Обратная задача в этом случае теряет смысл. Отметим, что это достаточно жесткое условие не выполнено, в частности, для автомодельного и типа бегущей волны режимов затвердевания.

Как сказано выше, условие направленного затвердевания можно сформулировать в терминах входных данных задачи Стефана (1.4), (1.5). Используя сравнение решения задачи Стефана с подходящим решением типа бегущей волны, можно сформулировать достаточные (весьма грубые) условия на входные данные общей задачи, при которых выполняются условия утверждений 1, 2 и прямая и обратная задачи имеют классическое решение. Между тем качественная картина поведения решения задачи (1.6)–(1.8) достаточно хорошо представлена случаями, когда функции T^l и s_m берутся из решения типа бегущей волны или автомодельного (при $g = 0$) решения соответствующей задачи Стефана. Отметим, что тогда достаточные условия разрешимости, сформулированные в утверждениях 1 и 2, являются весьма точными. Исследуем эти решения.

4. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

4.1. Бегущая волна. Пусть $C^l(x, t) \rightarrow C_\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда задача (1.4), (1.6)–(1.8) имеет решение вида

$$\begin{aligned} T^l(x, t) &= A^l(1 - \exp\{-V\alpha^l(x - Vt)\}) + T^*, \\ T^s(x, t) &= A^s(1 - \exp\{-V\alpha^s(x - Vt)\}) + T^*, \quad s(t) = Vt; \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$C^l(x, t) = \frac{C_\infty(V - Kg) \exp\{V\alpha^l x\}}{(V - Kg) \exp\{V\alpha^l x\} - B \exp\{V^2\alpha^l t\}}, \quad C^s(x, t) = C_\infty \left(1 - \frac{Kg}{V}\right), \tag{4.2}$$

где $\alpha^i = \rho_m^i \lambda_m^i / k_m^i$ ($i = s, l$), $B = LVA^l\alpha^l$, постоянные A^l, A^s связаны условием Стефана из (1.4); V — произвольная положительная константа, не равная Kg , причем неотрицательное решение задачи (1.6)–(1.8) такого вида существует в том и только том случае, когда $V \geq B + Kg$ (условие (2.1)). Отметим, что выписанное решение соответствует

$$C^l(x, 0) = \frac{C_\infty(V - Kg)V \exp\{V\alpha^l x\}}{(V - Kg) \exp\{V\alpha^l x\} - B}.$$

В предельном случае $V = B + Kg$, когда граница затвердевания является характеристикой, возможно лишь тривиальное решение $C^l = C^s \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В отсутствие микрогравитации ($g = 0$) формулы (4.2) приобретают вид

$$C^l(x, t) = \frac{C_\infty V \exp\{V\alpha^l x\}}{V \exp\{V\alpha^l x\} - B \exp\{V^2\alpha^l t\}}, \quad C^s(x, t) = C_\infty$$

и дают решение задачи в случае $V > B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Отметим, что в случае $Kg + B \geq 0$, т. е. если ускорение микрогравитации направлено в ту же сторону, что и градиент температуры, или в противоположную сторону, но при этом скорость переноса, обусловленная микрогравитацией, по абсолютной величине не превосходит скорости, обусловленной термокапиллярным эффектом, примесь оттесняется в жидкость, т. е. $C^l(Vt, t) \geq C^s(Vt)$. В частности, примесь оттесняется в жидкость в отсутствие микрогравитации.

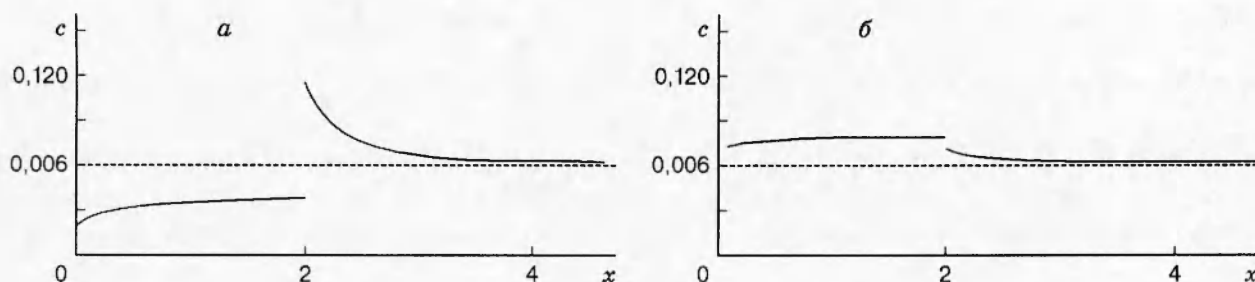


Рис. 2

В случае $Kg + B < 0$, т. е. если ускорение микрогравитации направлено в сторону, противоположную направлению градиента температуры, и скорость переноса, обусловленная микрогравитацией, по абсолютной величине меньше скорости, обусловленной термокапиллярным эффектом, примесь отгоняется в твердое вещество, т. е. $C^l(Vt, t) < C^s(Vt)$.

4.2. Общее решение задачи переноса в случае, когда решение задачи Стефана — бегущая волна. Пусть решение задачи (1.4) имеет вид (4.1). Тогда общее решение уравнения (1.6) в случае $V \geq B + Kg$ (условие (2.1)) дается формулой

$$C^l(x, t) = \exp\{V\alpha^l(x - Kg t)\} F\left(\frac{-B + (V - Kg) \exp\{V\alpha^l(x - Vt)\}}{\exp\{V\alpha^l(Kg - V)t\}}\right), \quad x > Vt,$$

где $F(z)$ — произвольная гладкая функция для $z > V - B - Kg$, определяемая в случае прямой задачи из начального условия $C^l(x, 0) = C_0^l(x) > 0$, $x > s_m(0)$ по формуле

$$F(z) = \frac{V - Kg}{z + B} C_0^l\left(\frac{1}{V\alpha^l} \ln \frac{z + B}{V - Kg}\right).$$

При этом распределение примеси в затвердевшей части находится из условий (1.7), (1.8): $C^s(x) = C^l(x, x/V) (1 - (B + Kg)/V)$. В случае обратной задачи $F(z)$ определяется из условия $C^s(x) = C_0^s(x)$ по формуле

$$F(z) = \frac{V}{z} C^s\left(\frac{1}{(V - Kg)\alpha^l} \ln \frac{z}{V - Kg - B}\right).$$

Замечание 4.2 о соотношении концентраций на границе со стороны затвердевшей и жидкой частей справедливо и в этом случае. На рис. 2 представлен профиль концентрации в твердой (область $0 < x < 2$ см) и жидкой (область $x > 2$ см) частях в момент времени $t = 2$ с для эмульсии Al-Pb с начальным профилем $C_0 = 0,006$ в условиях: *a* — отгонения примеси в жидкость; *b* — накопления примеси твердым веществом.

В предельном случае $V = Kg + B$ концентрация в твердом веществе $C^s(x) = 0$, а решение $C^l(x, t)$ с постоянным начальным распределением $C^l(x, 0) = C_0^l$, $x > s_m(0)$ имеет неограниченный рост на границе: $C^l(Vt, t) = C_0^l \exp\{V\alpha^l B t\}$, что можно рассматривать как эффект линеаризации; в аналогичном предельном случае для нелинеаризованной задачи концентрация в жидкости будет неограниченно приближаться к единице.

4.3. Автомодельное решение. Пусть $g = 0$. Тогда, используя стандартное автомодельное решение задачи Стефана (1.4) (выписанное, например, в [3]) с условиями $T^l(\infty, t) = T^\infty$, $T^s(0, t) = T^0$, найдем автомодельное решение задачи (1.6)–(1.8), удовлетворяющее условию $C^l \rightarrow C_\infty$ при $x \rightarrow \infty$:

$$C^l = C_\infty \exp\left\{-\int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{LT_{\xi\xi}^l}{\xi\beta^2/2 - LT_{\xi}^l}\right) d\xi\right\}, \quad \xi \geq 1, \quad (4.3)$$

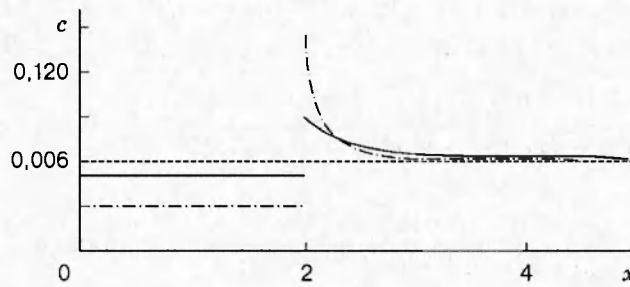


Рис. 3

где $\xi = x/(\beta\sqrt{t})$ — автомодельная переменная; β — корень уравнения

$$\gamma\beta^2/2 = k_m^s \frac{\partial T^s}{\partial \xi}(1) - k_m^l \frac{\partial T^l}{\partial \xi}(1).$$

Формула (4.3) имеет смысл лишь в случае строгой положительности знаменателя подынтегрального выражения при $\xi \geq 1$. Для этого, очевидно, достаточно потребовать выполнения неравенства $\beta^2/2 > LT_\xi^l(1)$, соответствующего условию (2.1) и допускающего выражение в терминах входных данных. Максимальное значение C^l достигается на границе $\xi = 1$:

$$C^l(1) = C_\infty \exp \left\{ - \int_1^\infty \left(\frac{LT_\xi^l}{\xi\beta^2/2 - LT_\xi^l} \right) d\xi \right\}.$$

При этом $C^s \equiv \text{const} = C^l(1)(1 - 2LT_\xi^l(1)/\beta^2) < C^l(1)$. Более того, ясно, что $C^s < C_\infty$.

На рис. 3 представлено два профиля концентрации — сплошная и штрихпунктирная линии для эмульсии Al-Pb в различные моменты времени; оба соответствуют значению $C_\infty = 0,006$ и положению фронта $x = 2$ см. Профиль, обозначенный сплошной линией, отвечает большей скорости затвердевания, степень очистки смеси при этом увеличивается, а значение концентрации на границе со стороны жидкости существенно возрастает.

4.4. Решение задачи переноса с автомодельной температурой. Прежде всего, заметим, что если отказаться от ограничения $g = 0$, то в силу (2.1) необходимое условие существования нетривиального решения задачи (1.6)–(1.8) с автомодельной температурой примет вид

$$\beta^2/2 > LT_\xi^l(1) + Kg\beta\sqrt{t}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. $g > 0$. Условие (4.4), очевидно, не может быть выполнено для произвольных значений времени t , т. е. C^l может быть только нулевой при $x \geq \beta\sqrt{t^*}$, где $t^* = (\beta^2/2 - LT_\xi^l(1))^2 / (Kg\beta)^2$.

2. $g < 0$. Условие (4.4) выполнено при $\beta^2/2 \geq LT_\xi^l(1)$. Если же $\beta^2/2 < LT_\xi^l(1)$, то, начиная с момента времени $t^* = (\beta^2/2 - LT_\xi^l(1))^2 / (Kg\beta)^2$, условие (4.4) выполнено, но вопрос существования классического решения требует дополнительного исследования.

В случае отсутствия микрогравитации ($g = 0$) общее решение задачи (1.6)–(1.8) с автомодельной температурой может быть выписано явно, подобно тому как это сделано в п. 4.2. Также при соответствующих условиях нетрудно выписать решения прямой и обратной задач.

4.5. Общее решение двухфронтной задачи в случае, когда решение задачи Стефана — бегущая волна. Пусть в задаче (1.3) $T^l(x, t) = A^l(1 - \exp\{-Vx^l(x - Vt)\}) + T^d$, $B = LVA^l\alpha^l > 0$, $V > B + Kg$, $s_d(t) = Vt$, $s_m(t) = Vt - Vt_0$, т. е. считаем, что матрица

начинает затвердевать в момент $t_0 = (V^2 \alpha^l)^{-1} \ln(1 + (T^d - T^m)/A^l)$. Выпишем решение, удовлетворяющее начальному условию $C^l(x, 0) = C_0^l \equiv \text{const}$, $x > 0$. Тогда

$$C^{sl}(x) = \frac{(V - B - Kg)C_0^l(V - Kg)}{(-B + V - Kg + B \exp\{-V\alpha^l(x - Kgt_0)\})V}, \quad 0 < x < Vt - Vt_0,$$

$$C^{sl}(x, t) = \frac{(V - B - Kg)C_0^l}{-B + V - Kg + B \exp\{-V\alpha^l(x - Kgt)\}}, \quad \max\{0, Vt - Vt_0\} < x < Vt,$$

$$C^l(x, t) = \frac{(V - Kg)C_0^l \exp\{V\alpha^l x\}}{-B \exp\{V^2 \alpha^l t\} + (V - Kg) \exp\{V\alpha^l x\} + B \exp\{V\alpha^l Kgt\}}, \quad x > Vt.$$

Отметим, что наличие второй линии разрыва концентрации и промежуточного слоя, представляющего собой жидкую матрицу с затвердевшими включениями, не оказывает существенного влияния на качественную картину поведения решения в жидкой эмульсии и полностью затвердевшей части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pukhnachov V. V., Voinov O. V. Mathematical model of motion of emulsion under effect of thermocapillary forces and microacceleration // Abstracts of Ninth European Symposium on Gravity Dependent Phenomena in Physical Sciences. Berlin, 1995. P. 32, 33.
2. Петрова А. Г. Монотонность свободной границы в двухфазной задаче Стефана // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 97-99.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 26/1 1998 г.