ПМТФ, № 3, 1961

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Шестериков

(Москва)

В работе исследуется форма потери устойчивости прямоугольной пластинки в условиях ползучести. Исследование проведено на основе двух критериев устойчивости.

§ 1. Рассмотрим выпучивание прямоугольной пластинки, сжатой в двух противоположных направлениях. Исследование проводится в предположении, что материал пластинки подчиняется соотношениям теории упрочнения в деформационной форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} s_{ij}, \quad \Phi(\sigma_i, p, \dot{p}_i) = 0, \quad p_i = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E} \tag{1.1}$$

Здесь ε_{ij} — девиатор деформаций, s_{ij} — девиатор напряжений, ε_i и σ_i — интенсивность деформаций и напряжений соответственно. Для зависимости вида (1.1) в работе [1] было получено уравнение для прогиба w при обычных предположениях относительно деформирования пластинок

$$\frac{3}{4}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\Lambda w + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\Delta\Delta w - \frac{9\sigma_i}{(2h)^2}\Lambda w = 0 \tag{1.2}$$

Здесь h — толщина пластинки, операторы Λ и Δ определяются так:

$$\Lambda = -\alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

Оператор A означает, что если имеется связь

$$Au = v \tag{1.4}$$

то

$$(E\lambda - \mu)v - \nu\dot{v} + E(\mu u - \nu\dot{u}) = 0$$

$$\left(\lambda = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_i}, \quad \mu = \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}, \quad \nu = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{p}_i}\right)$$

Если в пластинке имеется начальный прогиб w_0, то вместо уравнения (1.2) легко получить уравнение

$$\frac{3}{4}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\Lambda(w - w_0) + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\Delta\Delta(w - w_0) - \frac{9\sigma_i}{(2h)^2}\Lambda w = 0 \tag{1.5}$$

Здесь w — полный прогиб.

Рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластинку, сжатую в двух перпендикулярных направлениях. Тогда

$$\Lambda = -\alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.6}$$

Представим прогиб в виде

$$w = a(t)\sin\frac{\pi x m_1}{l_1}\sin\frac{\pi y m_2}{l_2}, \qquad w_0 = a_0\sin\frac{\pi x m_1}{l_1}\sin\frac{\pi y m_2}{l_2} \tag{1.7}$$

Подставив (1.6) и (1.7) в (1.5) и учитывая (1.4), получим для $a(t)$ линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{da}{dt}\left\{1-\frac{4}{3}\beta-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right\}+a\left\{\mu\left[1-\frac{4}{3}\beta-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right]+\right.$$
$$\left.+E\lambda\left[\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)+\frac{4}{3}\beta\right]+\frac{\dot{p}_i\varepsilon_y}{\varepsilon_i^2}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right\}=$$
$$=a_0\left\{\mu\left[1-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right]+E\lambda\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)+\dot{p}_i\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i^2}\left(1-\frac{4}{3}\lambda^2\right)\right\} \tag{1.8}$$

где

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_i}{E}, \qquad \lambda_1=\frac{(m_1/l_1)^2+(m_2/l_2)^2}{\alpha_{11}(m_1/l_1)^2+\alpha_{22}(m_2/l_2)^2}$$

Условие равенства нулю коэффициента при a соответствует моменту потери устойчивости по квазистатическому критерию.

В этом параграфе проведем исследование по определению количества волн, образующихся при сжатии прямоугольной пластинки в одном направлении. Исследование проводится на основе квазистатического критерия, механический смысл которого достаточно ясно выявлен в работе Ю. Н. Работнова [2].

Критическое состояние наступает при условии

$$A_1\equiv\mu\left[1-\frac{4}{3}\beta-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right]+E\lambda\left[\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)+\frac{4}{3}\beta\right]=0 \tag{1.9}$$

Здесь опущено слагаемое

$$\frac{\dot{p}_i\varepsilon_y}{\varepsilon_i^2}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)$$

так как подробные числовые расчеты показывают, что учет этой величины дает весьма незначительную числовую поправку, не меняя существа исследования. Рассмотрим изменение A_1 с ростом p_i при постоянном σ_i при условии, что имеет место упрочнение. Второе из соотношений (1.1) перепишем в виде

$$\Phi\equiv\dot{p}_i-f(p_i,\sigma_i)=0 \tag{1.10}$$

Тогда $\mu=-\partial f/\partial p_i$ и $\lambda=-\partial f/\partial\sigma_i$. Так как с ростом p_i при упрочнении скорость ползучести уменьшается (при постоянном σ_i), то $\mu>0$. При одинаковом p_i для большего напряжения имеет место бóльшая скорость ползучести, следовательно, $\lambda<0$. Кроме того, предположим, что при малых p_i имеет место быстрое изменение скорости ползучести и

$$\frac{\mu}{E\lambda}\to\infty \qquad \text{при } p_i\to 0 \tag{1.11}$$

При больших деформациях ползучести изменение скорости незначительно с изменением p_i и, следовательно,

$$\frac{\mu}{E\lambda}\to 0 \qquad \text{при } p_i\to\infty \tag{1.12}$$

Большинство известных экспериментальных данных по ползучести при постоянном напряжении хорошо согласуются с введенными предположениями (исключение представляет участок разупрочнения, предшествующий разрушению).

Из решения упругой задачи следует, что

$$\lambda_1>\beta \qquad \text{при } \sigma_i<\sigma_э \tag{1.13}$$

Из (1.11) и (1.13) следует, что $A_1>0$ при $p_i\to 0$ и из (1.12) $A_1<0$ при $p_i\to\infty$, т. е. при некотором p_i, определяемом из (1.9), имеет место переход из устойчивого состояния в неустойчивое (когда коэффициент при $\dot{a}$ больше нуля). Критическое значение p_i, найденное из (1.9), будет зависеть от чисел волн m_1 и m_2. Определим m_1 и m_2 из условия, что истинные значения m_1 и m_2 соответствуют минимальной величине p_i, т. е. что форма потери устойчивости определяется по минимальному времени, необходимому для наступления возможности выпучивания.

Исследование проведем для закона упрочнения в виде

$$\dot{p}_i = p_i^{-\alpha}\psi(\sigma_i) \tag{1.14}$$

Это соотношение удовлетворяет условиям (1.11) и (1.12). Условие (1.9) перепишется в виде

$$c\frac{\varepsilon_y}{p_i}\left[1-\frac{4}{3}\beta-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)\right]-\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\left(1-\frac{4}{3}\lambda_1^2\right)-\frac{4}{3}\beta=0 \tag{1.15}$$

$$c=\frac{\alpha}{n}, \qquad n=\sigma_i\frac{d\ln\psi}{d\sigma_i}$$

Введя обозначение $p_i/\varepsilon_y = y$, получим из (1.15) для y уравнение

$$y^2+y\left[1+c+\frac{3}{4}\,\frac{1}{\beta}(1-c)-\frac{\lambda_1^2}{\beta}\right]+c\left(1-\frac{\lambda_1^2}{\beta}\right)=0 \tag{1.16}$$

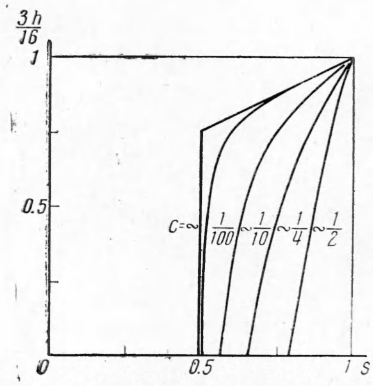
При изменении m_2 меняется только

$$\lambda_1 = 1+\left(\frac{m_2 l_1}{m_1 l_2}\right)^2$$

причем m_2 может принимать целые положительные значения, начиная с единицы. Очевидно, что уравнение (1.16) при условии (1.13) всегда имеет два действительных корня, имеющих разные знаки. Физический смысл имеет только положительный корень. Определим, при каком m_2 этот корень имеет минимальное значение, если m_1 фиксировано. Так как $y'_{m_2} \neq 0$ при $0 \leqslant y < \infty$, то y будет монотонной функцией m_2 и так как $y \to \infty$ при $m_2 \to \infty$, то минимум достигается при $m_2 = 1$.

Перейдем к определению m_1. При условии $m_2 = 1$ из (1.16) получим

$$y^2+y\left[1+c+\frac{3}{16}\,\frac{1-c}{\beta_1 S}-\frac{1}{\beta_1 S}(1+S)^2\right]+$$
$$+\,c\left[1-\frac{1}{4\beta_1 S}(1+S)^2\right]=0 \tag{1.17}$$



Фиг. 1

Здесь

$$\sigma_э=\frac{E\pi^2(2h)^2\,4}{9l_2^2}, \qquad \beta_1=\frac{\sigma_i}{\sigma_э}, \qquad S=\frac{l_1^2}{m_1^2 l_2^2}$$

При l_1/l_2 — целом напряжение $\sigma_э$ — равно критической нагрузке для упругой пластинки. Из (1.17) следует, что

$$y \approx \frac{S}{4\beta} \to \infty \qquad \text{при } S\to\infty \ (m_1\to 0)$$

$$y \approx \frac{1+3c}{16\beta S} \to \infty \quad \text{при } S\to 0 \ (m_1\to\infty) \tag{1.18}$$

Из (1.18) следует, что существует m_1, соответствующее минимуму для y. Беря производную от y по S и приравнивая ее нулю, получим

$$\frac{S^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}c\right)}{2\beta_1(1-c)}=\frac{S^2-\frac{1}{4}}{S+1} \tag{1.19}$$

Уравнение (1.19) записано в форме, удобной для исследований и численного нахождения корней.

Для различных c на фиг. 1 построены зависимости S от β_1. Из условия, полученного в работе [3], следует, что $c < 1$. Для $c = 1$ решение (1.19) имеет вид $S \equiv 1$, для $c \to 0$ получаем предельную ломаную. Следовательно, всегда $^1/_2 < S < 1$. Для числа волн получим условие

$$m_1 = \frac{l_1}{l_1 \sqrt{S}} \tag{1.20}$$

Для упругой задачи $m_1 = l_1 / l_2$ (равенства здесь надо понимать в смысле ближайшего целого значения, как это делается для упругих пластинок). Видно, что согласно квазистатическому критерию и введенному принципу определения формы выпучивания число волн для пластинки при выпучивании в условиях ползучести больше, чем для упругой пластинки.

§ 2. Рассмотрим случай равномерного сжатия. Уравнение, определяющее амплитуду прогиба a пластинки при выпучивании, имеет вид

$$\frac{da}{dt}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i} - \frac{4}{3}\beta\right) + a\left[\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i^2}\dot{\varepsilon}_i + \mu - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}(F\lambda - \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\beta(E\lambda - \mu)\right] \quad \left[\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i^2}\dot{\varepsilon}_i + \mu - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i}(E\lambda - \mu)\right] \tag{2.1}$$

Перейдем к безразмерному прогибу

$$u = \frac{a}{a_{00}(1-\beta)} \tag{2.2}$$

Одновременно от переменной t перейдем к переменной p_i при помощи зависимости

$$\dot{p}_i = \chi(\sigma)\varphi(p_i) \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.1) запишется в виде

$$\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y/\varepsilon_i - \beta}{1-\beta}\right)\frac{du}{dp_i} + \left[-\left(1 + \frac{1}{3}\frac{(\varepsilon_y/\varepsilon_i) - \beta}{1-\beta}\right)\frac{d\ln\varphi}{dp_i} - \right. \tag{2.4}$$

$$\left. - \frac{n}{3\varepsilon_y}\frac{4p - \varepsilon_y/\varepsilon_i}{1-\beta}\right]u = -\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_i}\right)\frac{d\ln\varphi}{dp_i} + \frac{n}{3\varepsilon_i} \qquad \left(n = \sigma\frac{d\ln\psi}{d\sigma_i}\right)$$

Здесь сделано предположение, что член мал по сравнению

$$\frac{1}{3}\frac{y}{\varepsilon_i^2}\varepsilon_i$$

с остальными слагаемыми. Можно и не отбрасывать это слагаемое, но, как показывают расчеты, оно вносит весьма незначительную числовую поправку. Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u = \varphi\left(\exp\int R_i\right)\left[\int_0^{p_i}\exp\left(-\int R dp_i\right)\frac{(4\beta + 3p_i)(1-\beta)}{4(1-\beta)\beta + (3-4\beta)p_i}\, d\frac{1}{\varphi} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{p_i}\varphi^{-1}\exp\left(-\int R dp_i\right)\frac{n(1-\beta)\,dp_i}{4(1-\beta)\beta + (3-4\beta)p_i}\right] \tag{2.5}$$

где под p_i понимается отношение предыдущего p_i к $\varepsilon_э$. Для случая $\varphi = p_i^{-\alpha}$ и когда $\alpha = 1$ соотношение (2.5) примет вид

$$u = \frac{1}{p_i}e^{\zeta}\left[(1-\beta)\beta + \left(\frac{3}{4} - \beta\right)p_i\right]^{-\eta}\int_0^{p_i}e^{-\zeta}\left[(1-\beta)\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{4} - \beta\right)p_i\right]^{\eta-1}(1-\beta)\left(\beta + \frac{3}{4}p_i + \frac{n}{4}p_i\right)dp_i \tag{2.6}$$

$$\left(\zeta = \frac{4np_i}{3-4\beta}, \quad \eta = \frac{3n}{(3-4\beta)^2}\right)$$

Соотношение (2.6) верно для $\beta \neq {}^3/_4$. Случай $\beta = {}^3/_4$ будет рассмотрен особо.

Остановимся на особенностях уравнения (2.6). В данном случае значение $\beta = {}^3/_4$ будет характерным значением. При $\beta < {}^3/_4$ зависимость $u(t)$ носит качественно тот же характер, что и для стержня. При $\beta > {}^3/_4$ из (2.6) видно, что $u \to \infty$ при

$$p_i \to \frac{(1-\beta)\beta}{\beta - {}^3/_4} \qquad (2.7)$$

В отличие от стержня на кривой $u \sim t$ имеется вторая характерная точка — момент обращения u в бесконечность. Это время можно считать верхней оценкой для несущей способности пластинки.

В общем виде получить решение $\ddot{u} = 0$ для u, определяемого из (2.6), невозможно. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Пусть $\beta = {}^1/_4$, $n = {}^8/_3$. Из (2.6) найдем

$$u = \frac{4}{16}\,\frac{58\,e^x - (58 + 42\,x + 8.5\,x^2)}{x\,(2+x)^2} \qquad (2.8)$$

Из условия $d^2u\,/\,dt^2$ получим уравнение

$$e^x = \frac{1 + 2x + \frac{100}{696}\,x^2 + \frac{268}{696}\,x^3 + \frac{51}{1392}\,x^4}{1 + x - \frac{1}{12}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^3 + \frac{1}{12}\,x^4} \quad \left(x = \frac{16}{3}\,p_i\right) \qquad (2.9)$$

Уравнение (2.9) имеет корень $x = 1.88$, $p_i = 0.353$. По квазистатическому критерию для этих же значений параметров получим $p_i = 0.375$.

2°. Пусть $\beta = 1 - \Delta$, где Δ — мало; $n = {}^8/_3$. Для этого случая (2.6) имеет вид

$$u = x^{-1}e^{-x}(1 - bx)^{-8}\int_0^x e^x(1 - bx)^7\left(1 + \frac{51}{4}\,bx\right)dx \qquad \left(b = \frac{3}{128\,\Delta}\,,\quad x = \frac{32}{3}\,p_i\right)$$

Рассмотрим случай, когда Δ достаточно мало, тогда, пренебрегая изменением e^x и e^{-x}, получим выражение для u

$$u = \frac{1 - (1 - bx)^8}{x\,(1 - bx)^8} + c \qquad (2.10)$$

Условие $\ddot{u} = 0$ приводит к значению $bx = 0.123$. Откуда получим значение $p_i \approx 0.5\,\Delta$. По квазистатическому критерию значение p_i для этого случая равно

$$p_i = {}^4/_9\,\Delta$$

Так как в этом случае $\beta > {}^3/_4$, то имеет место бесконечный рост прогибов за конечное время. Критическая деформация ползучести определяется из условия $p_i = 4\Delta$.

Для случая малых β из условий $\ddot{u} = 0$ легко получить для $n = 3$ значение $p_i = 0.425$. По квазистатическому критерию имеем $p_i = 0.5$.

3°. Исследуем случай $\beta = {}^3/_4$. Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$u = \frac{1}{p_i}\exp\left[\frac{8n}{3}(p_i + p_i^2)\right]\int_0^{p_i}\left(1 + p_i + \frac{n}{3}\,p_i\right)\mathrm{xp}\left[-\frac{8n}{3}(p_i + p_i^2)\right]dp_i \qquad (2.11)$$

Соотношение (2.11) можно проинтегрировать в конечном виде в случае $n = 3$. Тогда для u получим выражение

$$u = \frac{1}{8p_i}\,[\exp\{-8\,(p_i + p_i^2)\} - 1] \qquad (2.12)$$

Условие $\ddot{u} = 0$ даст значение для $p_i \approx 0.15$. По квазистатическому критерию при тех же значениях параметров имеем $p_i = 0.10$.

На фиг. 2 представлена зависимость для p_1 из условия $\ddot{u} = 0$, зависимость p_2 из условия $u \to \infty$ и зависимость p_3 по квазистатическому критерию как функция от β для случая $n / \alpha \approx 3$. Видно, что $p_1 < p_3$ только в области малых β. В остальном результат аналогичен случаю стержня [2]. Новой будет кривая для p_2, которая не имеет места для стержня. Очевидно, что p_1 даст нижнюю оценку, а p_2 верхнюю для критического времени.

§ 3. Проведем исследование выпучивания прямоугольной свободно опертой пластинки при сжатии ее с двух противоположных сторон. В уравнении (1.8) перейдем к переменной p_i согласно условию (2.3), одновременно заменив $a = a_0 u$. Тогда для u получим уравнение

$$u_x' \left(q + \frac{r}{1+x}\right) + \left[-\left(q + \frac{r}{1+x}\right)\frac{d \ln \varphi}{dx} + \frac{rn}{1+x} - (1-q)\, n\right] u =$$
$$= -\left(1 + \frac{r}{1+x}\right)\frac{d \ln \varphi}{dx} + \frac{rn}{1+x} \tag{3.1}$$

При этом сделано предположение, что производными от ε_i можно пренебречь. Здесь

$$x = \frac{Ep_i}{\sigma}, \quad r \quad \frac{4}{3}(1 + Sm_2^2)^2 - 1, \qquad q = 1 - \frac{16}{3}\beta_1 S \tag{3.2}$$

где S и β_1 совпадают с введенными после формулы (1.17). В этом параграфе определим значение S и m_2 по минимуму p_i (или x, что одно и то же при $\sigma_i = \mathrm{const}$), определяемому из условия $\ddot{u} = 0$, и проведем сравнение с результатами, полученными в первом параграфе. Для закона ползучести вида (1.14) решение уравнения (3.1) запишется в форме (3.3)

$$u = x^{-\alpha} e^{\frac{n(1-q)x}{q}} (r+q+qx)^{-\frac{nr}{q^2}} \int_0^x e^{-\frac{n(1-q)}{q}} (1+x)(r+q+qx)^{\frac{nr}{q^2}-1} Q(x)\, x^{\alpha-1} dx$$

где

$$Q(x) = \alpha(1+r) + (rn + \alpha)\, x \tag{3.4}$$

В общем виде нельзя проинтегрировать выражение (3.3). Проведем исследование для двух предельных случаев, когда $\beta_1 \ll 1$ и $1 - \beta_1 \ll 1$.

Фиг. 2

1) *Случай* $1 - \beta_1 \ll 1$. Тогда $q < 0$ и определяющим оказывается множитель $(r + q + qx)$, так как при этом $r + q$ мало и x находится в пределах

$$\frac{r+q}{-q} \geqslant x \geqslant 0 \tag{3.5}$$

равенство

$$x_2 = \frac{r+q}{-q} \tag{3.6}$$

оказывается аналогичным условию (2.7) и соответствует неограниченному возрастанию прогибов.

Исследование проведем для случая $\alpha = 1$. Предполагая малость x, получим из (3.3)

$$\frac{rnu}{(r+q)\,q} = \frac{1-(1-y)^b}{y\,(1-y)^b} \qquad \left(y = \frac{qx}{r+q}, \quad b = \frac{nr}{q^2}\right) \tag{3.7}$$

Из условия $\ddot{u} = 0$ получим для y уравнение

$$(1-y)^{b+2} = 1-(b+2)\,y + \left(1+\frac{4}{3}\,b+\frac{1}{3}\,b^2\right)y^2 \qquad (3.8)$$

Предполагая малость y, получим приближенные значения

$$y = \frac{1}{b+2}, \qquad \text{или} \qquad x = \frac{r+q}{(b+2)\,q} \qquad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что при $q < 0$ имеем $x_r' > 0$; откуда следует, что величина x_1 будет минимальна при $m_2 = 1$, так как $r+q > 0$, q от m_2 не зависит и $r_{m_2}' > 0$.

Вернемся к (3.8), принимая $m_2 = 1$. Очевидно, что условия $x = 0$, $r+q = 0$, $\beta_1 = 1$, $S = 1$, соответствующие мгновенной потере устойчивости в упругой области, выполнены. Рассмотрим близкое состояние

$$\beta_1 = 1 - \triangle, \qquad S = 1 + k\triangle \qquad (3.10)$$

Параметр k определим из условия минимума x по S. Уравнения (3.7) и (3.8) дают

$$x = y\,(b)\,\frac{r+q}{q} \qquad (3.11)$$

где $y\,(b)$ определяется из (3.8). Для определения S из условия $x_S' = 0$ получим уравнение

$$r_S'q - rq_S' = [-q\,(r+q)\,y_b'b_S' \,/\, y] \qquad (3.12)$$

Отметим, что условие $r_S'q - rq_S' = 0$ соответствует равенству (3.6). Подсчеты дают следующий результат:

$$k = 0.1 \ \text{ для } n = 2, \qquad k = 0.01 \ \text{ для } n = 3, \qquad k < 0 \ \text{ для } n \geqslant 4 \qquad (3.13)$$

Если воспользоваться вместо уравнения (3.1) более точным уравнением

$$u_x'\left(q+\frac{r}{1+x}\right) + u\left[-\left(q+\frac{r}{1+x}\right)\frac{d\ln\varphi}{dx} + \frac{rn}{1+x} - \frac{r}{(1+x)^2} - \right.$$
$$\left. -(1-q)\,n\right] = -\left(1+\frac{r}{1+x}\right)\frac{d\ln\varphi}{dx} + \frac{rn}{1+x} - \frac{r}{(1+x)^2} \qquad (3.14)$$

которое получается из (1.8) с учетом всех членов, то получим, что в (3.8) параметр b надо заменить на $b+1$. Тогда числовые подсчеты показывают, что k возрастает по сравнению с (3.13).

Приведенное исследование показывает, что значение параметра k, получаемое по квазистатическому критерию и условию $\ddot{u} = 0$, при малых $1 - \beta_1$ различно. При этом, если по квазистатическому критерию k всегда меньше 0, то в рассматриваемом случае $k \geqslant 0$ при $n < 4$ и $k < 0$, но больше значения, определяемого по квазистатическому критерию, для $n > 4$.

2) *Случай* $\beta_1 \ll 1$. Так как в этом случае $1 > q > 0$, то $r + q + qx$ всегда положительное, монотонно возрастающее, следовательно, для больших x определяющей будет экспоненциальная функция. (Необходимо отметить, что $r + q + qx$ стоит в знаменателе, и поэтому истинное критическое значение x будет больше, чем определяемое при пренебрежении этим выражением. Используя данное положение, легко получить условие $m_2 = 1$.) Для u получим выражение

$$\frac{k_1 u}{n_1} = \frac{e^{n_1 x} - 1}{n_1 x} \qquad \left(n_1 = \frac{n\,(1-q)}{q}\right) \qquad (3.15)$$

Здесь k_1 — постоянная, зависящая от r и q таким образом, что $k_1 u$ представляет собой $a \,/\, a_0$ для чисто упругой задачи. Из работы [4] имеем критическое значение

$$n_1 x = 1.36, \qquad \text{или} \qquad x = \frac{1.36}{n}\,\frac{q}{1-q} \qquad (3.16)$$

Из условия минимума x легко получить, что S должно быть максимальным.

Так как $S = l_1^2 / m_1^2 l_2^2$, то получим условие $m_1 = 1$.

Промежуточные значения β_1 можно оценить числовыми расчетами.

Остановимся на условии (3.6), соответствующем $u \to \infty$. Из условия минимума x_2 по m_2 сразу следует $m_2 = 1$, тогда (3.6) представим в виде

$$x_2 = \frac{\frac{4}{3}(1+S)^2 - \frac{16}{3}\beta_1 S}{\frac{16}{3}\beta_1 S - 1} \tag{3.17}$$

Минимальное значение x_2 соответствует S, определяемому из соотношения

$$S = \frac{3}{16\beta_1} + \sqrt{\left(\frac{3}{16\beta_1}\right)^2 + \frac{3}{8\beta_1} + \frac{1}{4}}, \quad \text{или} \quad \beta_1 = \frac{3}{8}\,\frac{S+1}{S^2 - 1/4} \tag{3.18}$$

Для заданной пластинки $S \leqslant l_1^2 / l_2^2$. Поэтому при $\beta_1 < \beta_{10}$, определяемым условием (3.18), когда вместо S подставлено значение l_1^2 / l_2^2, имеем условие $m_1 = 1$. Кроме того, имеется условие

$$\tfrac{16}{3}\beta_1 S > 1 \tag{3.19}$$

которое должно выполняться для того, чтобы x_2 было положительным. Очевидно, что условие (3.19) выполняется, когда S определяется из (3.18). Это означает, что при β_{10} условие (3.19) выполнено. Предельное значение β_{11} получим из условия $x \to \infty$

$$\beta_{11} = \frac{3}{16}\,\frac{l_2^2}{l_1^2} \tag{3.20}$$

При $\beta_1 \leqslant \beta_{11}$ u не стремится к бесконечности при конечном времени. Окончательно получим, что всегда $m_2 = 1$, а для m_1 имеем условие

$$m_{11} > m_{12} \geqslant m_{13} \tag{3.21}$$

где m_{11} означает число волн, определяемое на основе квазистатического критерия; m_{12} — число волн, найденное из решения задачи при критерии $\ddot{u} = 0$ и m_{13} — из условия $u \to \infty$ при конечном времени. При этом всегда $m_{11} \geqslant m_0$ и $m_{13} \leqslant m_0$, где m_0 — число волн, соответствующее упругой задаче. В частности, при $n = 3$, $\alpha = 1$ также и $m_{12} < m_0$. При малых значениях β (когда нагрузка много меньше критической нагрузки, определяемой упругим решением) различие в числе волн существенно. В этом случае

$$m_0 \leqslant m_{11} \leqslant m_0 \sqrt{2}, \qquad m_{12} = 1 \tag{3.22}$$

Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что выпучивание длинных сжатых в продольном направлении пластинок происходит при $m_1 = 1$, что соответствует условию $m_{12} = 1$, найденному из соотношения $\ddot{u} = 0$.

Аналогично можно провести исследование общего случая сжатия прямоугольной пластинки.

Поступила
14 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Rabotnov Y. N. The theory of creep and its applications. «Plasticity». Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1960, 338—346.
3. Шестериков С. А. Об одном условии для законов ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
4. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.