

УДК 533.12

## БАРОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАЗА, МОДЕЛИРУЕМОГО ТВЕРДЫМИ СФЕРАМИ

И. Н. Черепанов, П. В. Краузин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990 Пермь, Россия  
E-mails: cherepanov.in@psu.ru, krauzin@gmail.com

Исследуется распределение частиц газа, моделируемого твердыми сферами и находящегося в поле силы тяжести при постоянной температуре. Модель твердых сфер плохо применима к реальным газам, однако может быть использована для описания распределения наночастиц в коллоидном растворе. Проведено сравнение различных моделей слабонеидеального газа: вириального разложения с точностью до второго коэффициента, уравнения Вертхейма — Тъеля в приближении Перкуса — Йевики, а также приближения Карнагана — Старлинга. В случае вириального разложения получено точное аналитическое решение уравнения для распределения частиц по высоте. Для более сложных моделей решения находились с помощью численных методов. Показано, что учет конечного размера частиц приводит к существенным изменениям их распределения по сравнению с распределением для идеального газа даже при малых значениях объемной доли. Результаты, полученные при использовании вириального разложения, хорошо согласуются с результатами, полученными по более сложным моделям, если объемная доля примеси не превышает 0,1.

Ключевые слова: модель твердых сфер, седиментация, вириальное разложение, уравнение Карнагана — Старлинга.

DOI: 10.15372/PMTF20190604

**Введение.** Модель твердых сфер может быть использована для описания поведения наночастиц в коллоидном растворе. В работе [1] показано, что свободная энергия Гиббса коллоидного раствора зависит от конфигурационного интеграла примесных частиц, определяемого величиной межчастичного взаимодействия. Следовательно, конфигурационный интеграл частиц в жидкой матрице должен быть равен аналогичному интегралу для частиц в вакууме [2]. Таким образом, если несущая среда является несжимаемой, поведение наночастиц примеси аналогично поведению газа в вакууме (без учета взаимодействия молекул носителя) в некотором эффективном поле (поправка на силу Архимеда, действующую на частицы со стороны несущей жидкости).

Начало изучению осаждения коллоидных частиц в гравитационном поле положено Ж. Перреном в 1910 г. [3]. В разбавленной суспензии взаимодействием коллоидных частиц можно пренебречь, что приводит к простому экспоненциальному распределению плотности. В последние годы проводились расчеты с использованием разнообразных математи-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-31-60074).

ческих аппаратов и физических подходов: уравнения состояния Перкуса — Йевики, моделирования жидкости с помощью твердых сфер под действием силы тяжести методом Монте-Карло, а также с использованием интегрального уравнения Орнштейна — Цернике и гиперцепного приближения (обзор работ приведен в [4]). Также представляет интерес исследование суспензий частиц различной формы, которые существуют в многофазных равновесных состояниях, в том числе жидкокристаллических.

Известно, что в коллоидных системах, состоящих из жидкости-носителя и наноразмерной примеси твердых частиц, эффект гравитационного разделения проявляется при сравнительно малой толщине слоя жидкости. Так, в экспериментах по исследованию конвективных течений коллоидных смесей обнаружено влияние гравитационной стратификации смеси даже при размерах полости, составляющих несколько миллиметров [5–9].

Полагается, что в случае слабоконцентрированных растворов поток частиц, обусловленный наличием поля силы тяжести, пропорционален концентрации и обратно пропорционален седиментационной длине:

$$j_s = -(D/l)\varphi. \quad (1)$$

Здесь  $D$  — коэффициент диффузии;  $l$  — седиментационная длина, характеризующая толщину слоя, при которой концентрация примеси меняется в  $e$  раз, и определяемая соотношением [10]

$$l = k_B T / (m_* g), \quad (2)$$

$k_B$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура;  $m_* = v_p(\rho_p - \rho_s)$  — эффективная масса наночастицы в жидкости-носителе;  $v_p$  — объем наночастицы;  $\rho_p, \rho_s$  — плотность наночастиц и жидкости-носителя соответственно.

Диффузионный поток в приближении малых концентраций определяется классическим законом Фика, в одномерном случае имеющим вид

$$j_d = -D \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3)$$

Тогда из закона сохранения концентрации

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (j_s + j_d) = 0$$

следует экспоненциальное барометрическое распределение частиц по толщине слоя. Кинетика процесса седиментации в данном приближении подробно рассмотрена в [11].

В концентрированных коллоидных растворах формулы для потоков (1), (3) перестают быть справедливыми. В работе [12] это экспериментально и теоретически доказано на примере магнитной жидкости в гравитационном и магнитном полях. При этом использовалась зависимость коэффициента диффузии от локальной концентрации примеси, полученная в работе [2] в случае отсутствия взаимодействия твердых частиц с жидкой матрицей [1]. Однако уравнение диффузии [12] достаточно громоздкое и не имеет аналитического решения, что затрудняет теоретический анализ состояния механического равновесия. При этом границы области применимости более простых выражений для потоков (1), (3) достаточно размыты.

Для модели твердых сфер получено несколько уравнений состояния различной степени сложности и достоверности [13]. С теоретической точки зрения представляет интерес определение границ области применимости различных моделей: вириального разложения, уравнения Вертхейма — Тьеля (в приближении Перкуса — Йевики) и уравнения Карнагана — Старлинга. В реальных экспериментах, как правило, используются коллоидные растворы с объемной долей частиц порядка 0,1, и более сложные модели могут оказаться избыточными. Например, при линейном анализе устойчивости состояния механического

равновесия системы необходимо задавать начальное распределение наночастиц. Использование более простых приближений, имеющих аналитические решения, может значительно упростить исследование свойств стратифицированных сред.

**1. Математическая модель.** Рассмотрим равновесное распределение сферических частиц массой  $m$  с учетом гравитационной стратификации. Пусть замкнутый сосуд с вертикальными стенками высотой  $h$  заполнен газом, моделируемым твердыми сферами. Газ с постоянной температурой  $T$  находится в поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Ось  $Z$  направлена вертикально вверх, противоположно действию силы тяжести.

В случае идеального газа уравнение состояния имеет вид

$$P = nk_B T,$$

где  $P$  — давление газа;  $n$  — число молекул газа в единице объема. В то же время приращение давления, создаваемое собственным весом газа (гидростатическое давление), описывается выражением

$$dP = -nmg dz. \quad (4)$$

Из (4) и уравнения состояния следует дифференциальное уравнение, описывающее распределение частиц по высоте:

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dz}{l}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) с учетом условия постоянства среднего числа частиц в системе

$$\frac{1}{h} \int_0^h n dz = \bar{n}$$

( $\bar{n}$  — средняя концентрация частиц в объеме), получаем известное барометрическое распределение:

$$n_{id} = \frac{\bar{n}h}{l} \frac{e^{-z/l}}{1 - e^{-h/l}}. \quad (6)$$

Выясним, как изменится данное распределение при учете конечного размера частиц. Уравнение состояния слабонеидеального газа в виде вириального разложения с точностью до второго коэффициента в приближении твердых сфер имеет вид [13]

$$P = nk_B T(1 + 4v_p n).$$

Как и при выводе уравнения (5), получаем

$$(1 + 8nv_p) \frac{dn}{n} = -\frac{dz}{l}. \quad (7)$$

Для удобства сопоставления результатов, полученных по различным моделям, введем относительную концентрацию частиц

$$\eta = \frac{n}{\bar{n}} = \frac{\varphi}{\bar{\varphi}},$$

где  $\bar{\varphi}$  — средняя объемная доля примеси. С учетом равенства  $\varphi = nv_p$  уравнение (7) принимает вид

$$(1 + 8\eta\bar{\varphi}) \frac{d\eta}{dz} + \frac{\eta}{l} = 0. \quad (8)$$

Данное дифференциальное уравнение имеет точное решение в виде функции Ламберта [14]

$$\eta = W(8\bar{\varphi}A e^{-z/l})/(8\bar{\varphi}). \quad (9)$$

Константа  $A$  находится из условия сохранения общего количества частиц:

$$\frac{1}{h} \int_0^h \eta dz = 1. \quad (10)$$

В результате интегрирования выражения (10) получаем трансцендентное уравнение относительно константы  $A$ , поэтому для его решения используем условие малости  $\bar{\varphi}$  (при больших значениях данного параметра в вириальном разложении необходимо учитывать слагаемые следующих порядков). Найдем приближенное решение, подставляя (9) в (10) и проводя разложение с точностью до слагаемых порядка  $O(\bar{\varphi}^3)$ :

$$A \approx A_0 + A_1\bar{\varphi} + A_2\bar{\varphi}^2,$$

$$A_0 = \frac{h}{l} \frac{1}{1 - e^{-h/l}}, \quad A_1 = 4(1 + e^{-h/l})A_0^2, \quad A_2 = 32e^{-h/l}A_0^3;$$

$$\eta_{vir} \approx A_0 e^{-z/l} + (A_1 e^{-z/l} - 8A_0^2 e^{-2z/l})\bar{\varphi} + (A_2 e^{-z/l} - 16A_0A_1 e^{-2z/l} + 96A_0^3 e^{-3z/l})\bar{\varphi}^2. \quad (11)$$

Предельным случаем разложения (11) является модель идеального газа (6):

$$\lim_{\bar{\varphi} \rightarrow 0} (\bar{n}\eta_{vir}) = n_{id}.$$

Как известно, область сходимости разложения функции Ламберта  $W(x)$  в ряд Тейлора определяется условием  $x < 1/e$  [14]. Оценим нижнюю границу радиуса сходимости:

$$8\bar{\varphi}A e^{-z/l} < 8\bar{\varphi}A < 1/e.$$

Таким образом, область сходимости определяется функцией  $\bar{\varphi}(h/l)$ , заданной неявно:  $8\bar{\varphi}A(\bar{\varphi}, h/l) = 1/e$  (рис. 1).

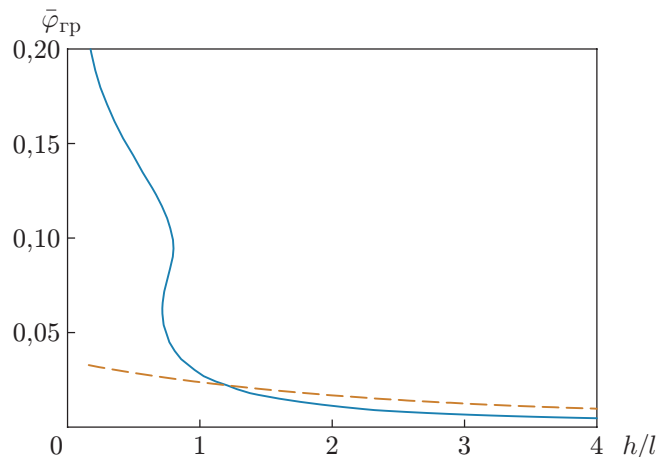


Рис. 1. Область применимости разложения барометрического распределения (11):

штриховая линия — граница области сходимости разложения функции Ламберта в ряд Тейлора, сплошная — среднеквадратичное отклонение (12)  $\varepsilon_{vir} = 0,05$

С помощью выражения (11) можно вычислить среднеквадратичное отклонение от точного решения (9):

$$\varepsilon_{vir} = \left( \frac{1}{h} \int_0^h (\eta_{vir} - \eta)^2 dz \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Разрешая (12) относительно средней концентрации  $\bar{\varphi}$ , получаем границу области применимости разложения (11). Зависимость  $\bar{\varphi}_{гр}$  от относительной высоты сосуда  $h/l$  при  $\varepsilon = 0,05$  (соответствующая правилу двух сигм) приведена на рис. 1. При заданном  $\varepsilon$  максимально допустимая средняя объемная доля резко уменьшается при увеличении  $h/l$ . Для сосуда, высота которого равна седиментационной длине ( $h/l = 1$ ), формула (11) справедлива при  $\bar{\varphi} < \bar{\varphi}_{гр} = 0,03$ . Из рис. 1 также следует, что более строгим критерием применимости разложения (11) является сходимость ряда Тейлора. Это объясняется тем, что в выражении (11) удержаны слагаемые до второго порядка включительно, в то время как расходимость степенного ряда проявляется при учете следующих порядков.

Уравнения состояния газа твердых сфер Вертхейма — Тьеля (в приближении Перкуса — Йевика) и Карнагана — Старлинга соответственно имеют вид [13]

$$\frac{P}{nk_B T} = \frac{1 + \bar{\varphi}\eta + (\bar{\varphi}\eta)^2}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^3}; \quad (13)$$

$$\frac{P}{nk_B T} = \frac{1 + \bar{\varphi}\eta + (\bar{\varphi}\eta)^2 - (\bar{\varphi}\eta)^3}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^3}. \quad (14)$$

Проводя аналогичную процедуру для вириального ряда, получаем искомые дифференциальные уравнения распределения концентрации частиц по высоте для уравнений Вертхейма — Тьеля и Карнагана — Старлинга:

$$\frac{(2\bar{\varphi}\eta + 1)^2}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^4} \frac{d\eta}{dz} + \frac{\eta}{l} = 0; \quad (15)$$

$$\left( 1 + \frac{2\bar{\varphi}\eta(4 - \bar{\varphi}\eta)}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^4} \right) \frac{d\eta}{dz} + \frac{\eta}{l} = 0. \quad (16)$$

Отметим, что уравнения распределения частиц газа, моделируемого твердыми сферами, выведенные из условия равенства дифференциалов давлений, могут быть получены строго для коллоидных растворов. В соответствии с [1] химический потенциал примеси в коллоидном растворе определяется конфигурационным интегралом взаимодействия частиц примеси в вакууме. Из конфигурационного интеграла соответствующих приближений следуют уравнения, аналогичные (7), (15), (16). Подобный подход для приближения Карнагана — Старлинга рассмотрен в [2]. Таким образом, если разложения [1] справедливы, то результаты, полученные с помощью модели твердых сфер, применимы также к коллоидным растворам.

Данные уравнения не могут быть решены аналитически в общем виде, поэтому исходная стационарная задача (13), (14) сводится к нестационарной (метод установления) и затем решается с использованием метода конечных разностей. Таким образом, распределение концентрации частиц удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

с граничными условиями

$$j(t, 0) = j(t, h) = 0,$$

где  $j$  — суммарный поток частиц, определяемый соответствующим приближением

$$j_{WT} = -\frac{(2\bar{\varphi}\eta + 1)^2}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^4} \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\eta}{l}, \quad j_{CS} = -\left(1 + \frac{2\bar{\varphi}\eta(4 - \bar{\varphi}\eta)}{(1 - \bar{\varphi}\eta)^4}\right) \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\eta}{l}$$

и начальным условием

$$\eta(0, z) = 1.$$

При данном подходе можно не решать дополнительное уравнение сохранения массы примеси (10), так как нестационарная задача (17) имеет форму закона сохранения массы. Однако заметим, что уравнение (17) не описывает реальную динамику концентрации частиц, а является одним из способов решения дифференциального уравнения. Расчеты проводились с пространственным шагом  $h_z = h/200$ . Алгоритм реализован на языке Fortran и скомпилирован в виде подключаемого модуля для языка Python. Этот подход позволяет настраивать параметры расчета для различных моделей.

**2. Барометрическое распределение слабонеидеального газа.** Сравним профили распределения относительной концентрации частиц по высоте для идеального (6) и слабонеидеального (9) газа. В случае идеального газа полагается, что частицы имеют нулевой объем, следовательно, распределение не зависит от их объемной доли. Учет размера частиц в линейном вириальном разложении приводит к существенному изменению профиля  $\eta(z)$  даже при малой объемной доле частиц  $\bar{\varphi}$ . Распределение, описываемое выражением (9) при различных значениях  $\bar{\varphi}$ , приведено на рис. 2.

Стерическое взаимодействие молекул приводит к уменьшению градиента концентрации частиц. В случае, если высота сосуда приблизительно равна седиментационной длине  $h = l$ , разности концентраций

$$\delta\eta \equiv \eta|_{z=0} - \eta|_{z=1}$$

для идеального и слабонеидеального газов различаются почти в два раза при  $\bar{\varphi} = 0,1$  (рис. 2).

С увеличением объемной доли частиц характерная разность концентраций  $\delta\eta$  уменьшается. Зависимость  $\delta\eta(\bar{\varphi})$ , полученная из уравнений (8), (13), приведена на рис. 3. В случае идеального газа параметр  $\delta\eta = 1$  и не зависит от  $\bar{\varphi}$ . Численное решение уравнения в приближении Перкуса — Йефика (15) показано сплошной линией, вириальное разложение (8) — штриховой. При  $\bar{\varphi} > 0,4$  разность концентраций  $\delta\eta$  практически равна нулю. Заметим, что приближения Перкуса — Йефика и Карнагана — Старлинга имеют ограничения по объемной доле и применимы в области  $\bar{\varphi} < 0,47$  [13].

Как и предполагалось, значительные отклонения результатов, полученных при линейном вириальном разложении, от результатов, полученных по более точным моделям, наблюдаются в области  $\bar{\varphi} > 0,1$ . При  $\bar{\varphi} = 0,1$  значение параметра  $\delta\eta$ , полученное в линейном приближении, приблизительно на 20 % больше, чем в приближении Перкуса — Йефика.

Распределения относительной концентрации частиц при различных значениях объемной доли приведены на рис. 4. В области  $\bar{\varphi} < 0,1$  распределения, полученные в вириальном разложении и приближении Карнагана — Старлинга, достаточно близки, в то время как распределение в идеальном газе значительно отличается. Следовательно, необходим учет стерического взаимодействия, однако можно ограничиться линейным вириальным разложением.

В задачах устойчивости состояния механического равновесия важным параметром является градиент концентрации, характеризующий градиент плотности. Зависимость градиента концентрации от высоты для рассматриваемых приближений приведена на рис. 5.

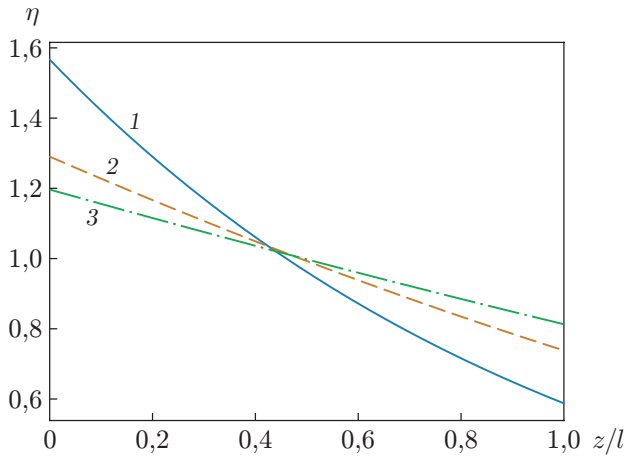


Рис. 2

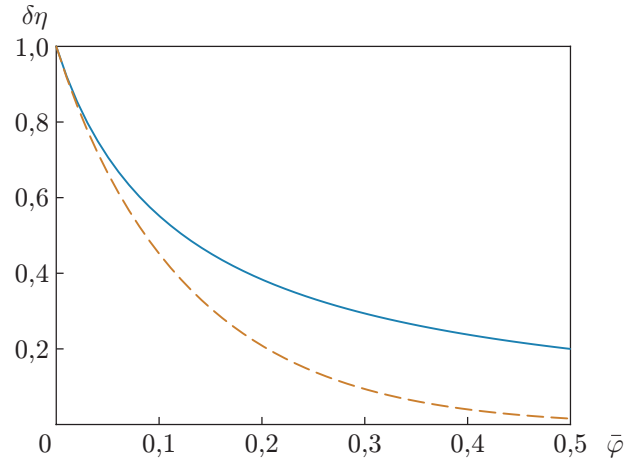


Рис. 3

Рис. 2. Распределение относительной концентрации частиц для линейного вириального разложения при  $h = l$  и различных значениях объемной доли: 1 —  $\bar{\varphi} = 0,05$ , 2 —  $\bar{\varphi} = 0,10$ , 3 —  $\bar{\varphi} = 0,20$

Рис. 3. Зависимость разности относительных концентраций  $\delta\eta$  от средней концентрации частиц  $\bar{\varphi}$ : штриховая линия — линейное приближение по объемной доле, сплошная линия — приближение Перкуса — Йевики

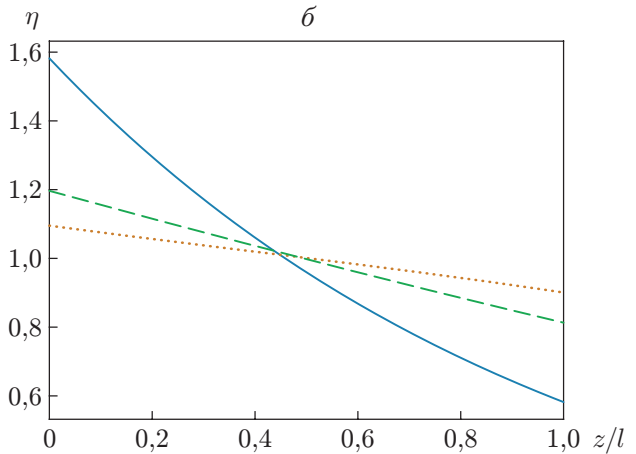
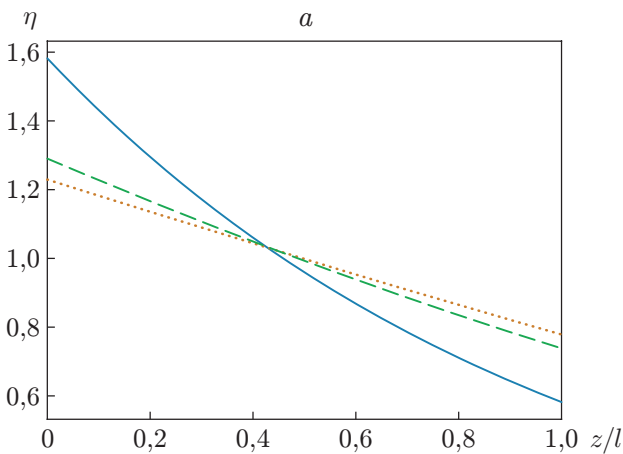


Рис. 4. Распределения относительной концентрации частиц по высоте в различных приближениях и при различных значениях средней концентрации: а —  $\bar{\varphi} = 0,1$ , б —  $\bar{\varphi} = 0,2$ ; сплошная линия — идеальный газ, штриховая — линейное вириальное разложение, пунктирная — приближение Карнагана — Старлинга

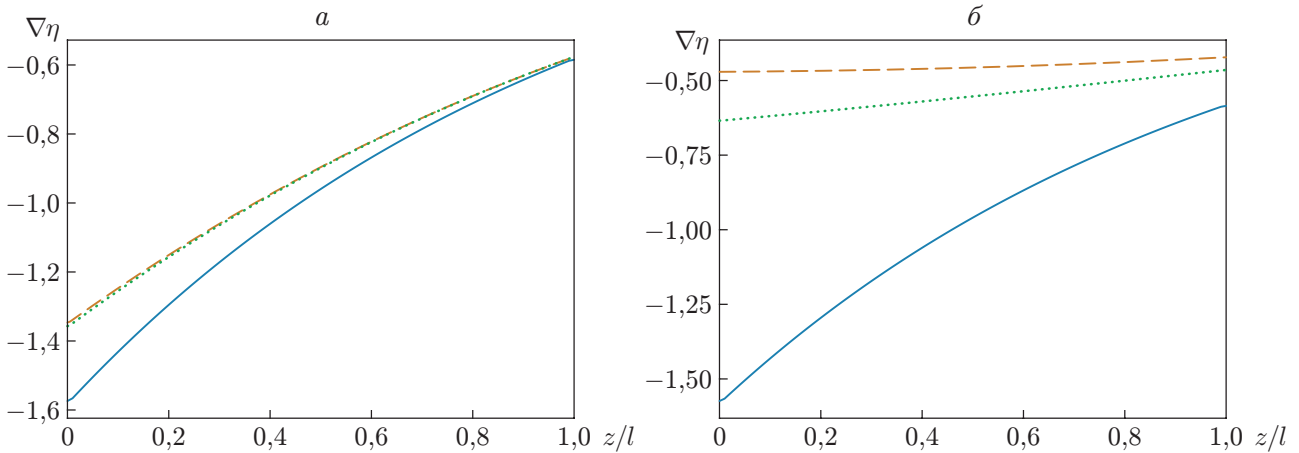


Рис. 5. Распределение градиента относительной концентрации по высоте в различных приближениях и при различных значениях средней концентрации:  $a$  —  $\bar{\varphi} = 0,01$ ,  $b$  —  $\bar{\varphi} = 0,10$ ; сплошная линия — идеальный газ, штриховая — линейное вириальное разложение, пунктирная — приближение Карнагана — Старлинга

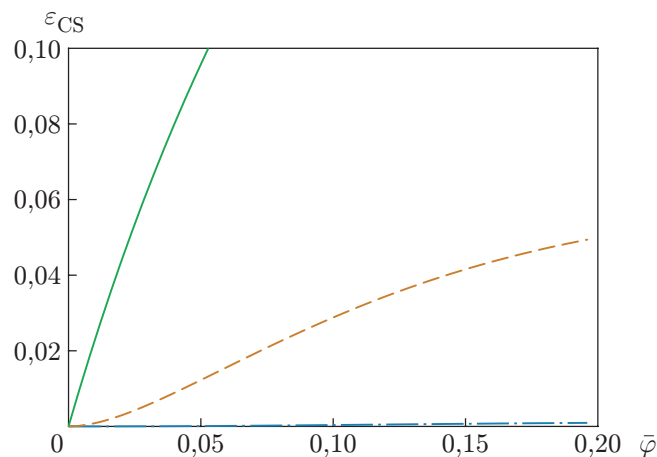


Рис. 6. Среднеквадратичные отклонения от распределения Карнагана — Старлинга, полученные с использованием различных моделей: сплошная линия — идеальный газ, штриховая — линейное вириальное разложение, штрихпунктирная — приближение Вертхейма — Тьея при  $h/l = 1$

Видно, что при больших значениях  $\bar{\varphi}$  значения градиента относительной концентрации на дне сосуда для идеального и слабонеидеального газов различаются более чем в два раза.

Определим среднеквадратичное отклонение результатов, полученных по различным моделям, от результатов, полученных по модели Карнагана — Старлинга:

$$\varepsilon_{CS} = \left( \frac{1}{h} \int_0^h (\eta_{CS} - \eta)^2 dz \right)^{1/2}.$$

На рис. 6 представлена зависимость  $\varepsilon_{CS}$  от средней концентрации при  $h/l = 1$ . Видно, что результаты, полученные по модели идеального газа, существенно отличаются от результатов, полученных по модели Карнагана — Старлинга, даже при  $\bar{\varphi} = 0,05$ . При этом вириальное разложение дает приемлемое отклонение даже при больших значениях концентрации  $\bar{\varphi} \approx 0,15$ . Заметим, что на границу области применимости влияет не только



среднее, но и максимальное отклонение. Критерий  $\varepsilon_{CS}$  можно рассматривать как оценку сверху.

**Заключение.** Проведен анализ распределения частиц газа, моделируемого твердыми сферами, в поле силы тяжести. Для вириального разложения (с точностью до второго коэффициента) получено аналитическое уравнение распределения частиц в приближении малой объемной доли. Проведено сравнение полученного уравнения с уравнением для барометрического распределения. Для модели идеального газа определена область применимости, в которой среднеквадратичное отклонение распределения плотности числа частиц от распределения, полученного для газа, моделируемого твердыми сферами, мало.

В случае более сложных моделей газа (модели твердых сфер) в приближениях Перкуса — Йевики и Карнагана — Старлинга распределения относительной концентрации частиц по высоте получены численным методом. Показано, что при использовании данного приближения профили объемной доли частиц практически одинаковы. Существенные отклонения от случая вириального разложения наблюдаются только при  $\bar{\varphi} \gtrsim 0,1$ .

В большинстве работ, посвященных исследованию плотности при воздействии гравитации, рассматриваются предельные случаи: модель идеального газа или уравнение Карнагана — Старлинга. В первом случае получается известное распределение Больцмана. В случае приближения Карнагана — Старлинга “забывается” его происхождение путем суммирования вириального ряда с учетом полуэмпирической формулы. Однако в данной работе показано, что при учете лишь второго слагаемого в вириальном разложении результаты совпадают с результатами, полученными в приближении Карнагана — Старлинга при объемной доле частиц  $\bar{\varphi} \lesssim 0,1$ . Преимуществом использования в такого рода задачах “оборванного” вириального ряда является возможность получить аналитические выражения для зависимости концентрации частиц от высоты.

На основе сравнения результатов, полученных по различным моделям, сделаны предположения о границах области их применимости. Так, модель идеального газа применима при  $\bar{\varphi} \lesssim 0,03$ , а вириальное разложение — при  $\bar{\varphi} \lesssim 0,2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Batchelor G. K.** Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction // J. Fluid Mech. 1976. V. 74, N 1. P. 1–29.
2. **Буевич Ю. А., Зубарев А. Ю., Иванов А. О.** Броуновская диффузия в концентрированных ферроколлоидах // Магнитная гидродинамика. 1989. Т. 2. С. 39–43.
3. **Perren J.** Mouvement Brownien et Molécules // J. Phys. Théor. Appl. 1910. V. 9, N 1. P. 5–39.
4. **Chen H., Ma H.** The density profile of hard sphere liquid system under gravity // J. Chem. Phys. 2006. V. 125. 024510.
5. **Donzelli G., Cerbino R., Vailati A.** Bistable heat transfer in a nanofluid // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102, N 10. 104503.
6. **Божко А. А., Краузина М. Т., Кудашкина В. С., Путин Г. Ф.** Об особенностях конвективной устойчивости стратифицированной ферронаножидкости // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Физика. 2015. № 1. С. 27–34.
7. **Krauzina M. T., Bozhko A. A., Putin G. F., Suslov S. A.** Intermittent flow regimes near the convection threshold in ferromagnetic nanofluids // Phys. Rev. E. 2015. V. 91, N 1. 013010.
8. **Божко А. А., Булычев П. В., Путин Г. Ф., Тыньяла Т.** Пространственно-временной хаос в конвекции коллоидов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. Т. 42, № 1. С. 29–38.
9. **Глухов А. Ф., Демин В. А., Путин Г. Ф.** Разделение смесей и тепломассоперенос в связанных каналах // Письма в журн. техн. физики. 2008. Т. 34, № 17. С. 45–51.

10. **Фертман В. Е.** Магнитные жидкости: Справ. пособие. Минск: Вышэйш. шк., 1988.
11. **Raikher Yu. L., Shliomis M. I.** On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension // J. Magnetism Magnetic Materials. 1993. V. 122, N 1–3. P. 93–97.
12. **Pshenichnikov A. F., Ivanov A. S.** Magnetophoresis of particles and aggregates in concentrated magnetic fluids // Phys. Rev. E. 2012. V. 86, N 5. 051401.
13. **Балеску Р.** Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1.
14. **Дубинов А. Е.** W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков. Саров: Всерос. науч.-исслед. ин-т эксперим. физики, 2006.

*Поступила в редакцию 6/II 2019 г.,  
после доработки — 4/IV 2019 г.  
Принята к публикации 27/V 2019 г.*

---