

ЯЧЕЙСТАЯ КОНВЕКЦИЯ В УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ф. А. Гарифуллин, Ф. И. Заппаров, Н. Э. Мингалеев,
П. А. Норден
(Казань)

Проблема о форме надкритических движений в конвективных процессах привлекает внимание многих исследователей [1—4]. Основные теоретические результаты о предпочтительной форме движения вблизи критической точки можно обобщить следующим образом.

1. Движение, вызванное градиентом поверхностного натяжения, приводит к гексагонам [1].

2. В конвекции, вызванной подъемной силой, устойчивой формой движения являются ролики, если физические свойства жидкости независимы от температуры [2].

3. В конвекции, вызванной подъемной силой, для жидкостей, имеющих температурную зависимость физических свойств, ячейка является гексагональной в области чисел Рэлея, близких к критическим [3, 4]. Дальнейший рост надкритичности преобразует эти гексагоны в ролики.

Что касается влияния упругости жидкости на форму конвективного движения, эта проблема вообще не исследована. В дальнейшем для более полного учета физических свойств жидкости рассмотрим зависимость от температуры вязкость. В качестве реологического соотношения выберем максвелловскую модель

$$P_{ij} + \tau_0 \delta P_{ij} / \delta t = \mu u_{ij},$$

где u_{ij} — тензор скоростей деформации; μ — вязкость; τ_0 — время релаксации и

$$\frac{\delta P_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k} - P_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - P_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой жидкости, подогреваемый снизу. Зависимость плотности и вязкости от температуры положим линейной.

Безразмерное уравнение конвекции в матричной форме имеет вид

$$(1) \quad \left(I - c\tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(I + c\tau \frac{\partial}{\partial t} \right) v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \left(1 + c\tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} + D_{ij} v_j + \\ + \tau \text{Pr} \frac{\partial v_i}{\partial t} \delta_{i0} \delta_{i3} - \Gamma \text{Ra} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 v_{ij}) + \Gamma \frac{\partial}{\partial x_j} (v_0 v_{ij}) - c\tau \text{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} Y + \\ + c\Gamma \text{Ra} \tau \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 Y) - c\Gamma \tau \frac{\partial}{\partial x_j} (v_0 Y),$$

где использованы следующие матричные обозначения:

$$v_j = \begin{vmatrix} \theta \\ u_j \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \end{vmatrix}; \quad D_{ij} = \begin{vmatrix} \nabla^2 & \text{Ra} \delta_{3j} \\ \text{Pr} \delta_{ij} & \text{Pr} \nabla^2 \delta_{ij} \end{vmatrix}; \\ v_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u_{ij} \end{vmatrix}; \quad c = I - \delta_{i0};$$

I — единичная матрица;

$$Y = u_k \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_k} - u_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k};$$

$\Gamma = h\beta\gamma\text{Pr}/\text{Ra}$ — безразмерный коэффициент температурной зависимости вязкости; τ — безразмерное время релаксации; $\text{Ra} = \alpha g A h^4 \rho / \mu \kappa$ — число Рэлея; $\text{Pr} = \mu / \kappa \rho$ — число Прандтля; θ — возмущение температуры.

Для решения нелинейного уравнения методами теории возмущений проведем разложение по малому параметру согласно [2]. При этом разложение числа Рэлея

$$(2) \quad \text{Ra} = \text{Ra}^{(0)} + \varepsilon \text{Ra}^{(1)} + \varepsilon^2 \text{Ra}^{(2)} + \dots$$

является определением малого параметра, $\text{Ra}^{(0)}$ — критическое число Рэлея.

Подставив разложение (2) в (1), получим уравнения первых трех приближений, которые ввиду громоздкости выражений здесь не записаны. Согласно [2], из условий разрешимости уравнений последовательных приближений, полагая относительную вариацию вязкости сравнительно малой [5], получим уравнение для $\text{Ra}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \text{Pr Ra}^{(1)} \theta^{(1)} u_3^{(1)} = & \left\langle v_i^{(1)'}, \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t} \right\rangle - \Gamma \text{Ra}^{(0)} u_i^{(1)'}, \frac{\partial (\theta^{(1)})_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} - \\ & - \tau \text{Pr Ra}^{(0)} u_3^{(1)} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} - 2 \text{Pr} \tau c \left\langle v_i^{(1)'}, \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle - \\ & - \Gamma \text{Ra}^{(0)2} \tau \left[u_i^{(1)'}, u_k^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_k} u_{i3}^{(1)} - u_i^{(1)'}, u_{ik}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_k} - \right. \\ & \left. - 2 u_i^{(1)'}, x_3 \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k} - u_i^{(1)'}, x_3 \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_k} \nabla^2 u_k^{(1)} \right], \end{aligned}$$

где $\theta^{(i)}$, $u_j^{(i)}$, v_j — соответствующие члены разложения, угловые скобки определяют следующее скалярное произведение [2]:

$$\langle v_k', v_k'' \rangle = \text{Pr} \overline{\theta' \theta''} + \text{Ra}^{(0)} \overline{u_k' u_k''},$$

черта сверху означает усреднение по всему слою и

$$\frac{\partial v_k'}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k''}{\partial x_k} = 0.$$

Полагая в третьем приближении τ и Γ малыми, согласно [5], для $\text{Ra}^{(2)}$ получаем

$$\text{Pr Ra}^{(2)} \theta^{(1)'} u_3^{(1)} = \left\langle v_k^{(1)'}, \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial t} \right\rangle - \text{Pr Ra}^{(1)} \overline{\theta^{(1)'} u_3^{(2)}} + \left\langle v_i^{(1)'}, v_k^{(1)} \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Согласно [5], запишем

$$(3) \quad \text{Ra} - \text{Ra}^{(0)} = \Delta \text{Ra} = \text{Ra}^{(1)} + \text{Ra}^{(2)}.$$

Как и в [3—5], будем рассматривать движение, состоящее из двух фурье-компонент. Вертикальная составляющая скорости имеет вид

$$(4) \quad u_3^{(1)} = A_{11} f(x_3) \cos kx_1 \cos lx_2 + A_{02} f(x_3) \cos 2lx_2, \quad k^2 + l^2 = 4l^2 = a^2.$$

Для $u_3^{(2)}$ имеем

$$(5) \quad u_3^{(2)} = \sum_{ij} k_{ij} F_{11}(x_3) \cos ikx_1 \cos jlx_2.$$

Подставляя (4), (5) в (3), получим амплитудные уравнения

$$(6) \quad (K - K_1) \dot{A}_{11} = EA_{11} - AA_{11}A_{02} + BA_{11}A_{02} - R_0 A_{11}^3 - PA_{11}A_{02}^2;$$

$$(7) \quad (K - K_1) \dot{A}_{02} = EA_{02} - \frac{1}{4} AA_{11}^2 + \frac{1}{4} BA_{11}^2 - R_1 A_{02}^2 - \frac{1}{2} PA_{11}^2 A_{02}.$$

Коэффициенты K , E , A , R_0 , R_1 , P совпадают с соответствующими коэффициентами амплитудных уравнений для ньютоновского случая в [5]. Отличие уравнений (6), (7) состоит в наличии дополнительных коэффициентов K_1 и B .

Рассмотрим две свободные границы слоя. Для этого случая имеем

$$(8) \quad f(z) = \cos a_k^{(0)} \sqrt{2} x_3, \quad a_k^{(0)} = \pi / \sqrt{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq x_3 \leq \frac{1}{2},$$

где $a_k^{(0)}$ — критическое волновое число.

Прямые вычисления показывают, что

$$c \left\langle v_i^{(1)'}, \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle = 0, \quad B = \frac{1}{2} \Gamma \text{Pr Ra}^{(0)2} \tau \int_{-1/2}^{1/2} \left[-\frac{3}{u^2} f'^2 f'' - \right. \\ \left. - 7f'^2 f + \frac{1}{a^2} f f' f'' + 2f^2 f'' - 2a^2 f^3 + x_3 \left(a^2 f f' Df - f' f Df'' - \frac{1}{2} f'^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{a^2} f' f'' - f f' f'' - \frac{2}{u^2} f'^2 f'' - 3a^2 f^2 f' + f f'' Df - a^2 f^2 Df \right) \right] dx_3, \\ k_1 = \tau \text{Pr Ra}^{(0)} a^2 \int_{-1/2}^{1/2} f D^2 f dz, \quad D = 1 - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Вычисления для $f(x_3)$ в виде (8) дают

$$B = -9,5 \Gamma \text{Ra}^{(0)} \tau,$$

$$k_1 = 22,21 \tau \text{Pr Ra}^{(0)}.$$

Согласно [5], определим параметр \varkappa

$$\varkappa = \frac{\Delta \text{Ra}}{\text{Ra}^{(0)}} \left(\frac{\Delta v}{v_0} \right)^2.$$

Обозначим

$$A = \Gamma \text{Ra}^{(0)} A_1, \quad E = \text{Pr} \Delta \text{Ra} E_1, \quad B = -\Gamma \text{Ra}^{(0)} B_1, \quad B_1 = 9,5 \text{Ra}^{(0)} \tau.$$

Из условий стационарности (6), (7) найдем, что переход между режимами гексагонов и гексагоны + ролики (плюс означает возможность существования обоих решений) будет наблюдаться при

$$(9) \quad \varkappa_1 = \frac{R_1}{4(2R_0 - R_1)^2} \frac{\text{Pr}}{\text{Ra}^{(0)}} \frac{(A_1 + B_1)^2}{E_1};$$

от состояния гексагоны + ролики при

$$\varkappa_2 = \frac{4R_0 + R_1}{R_1} \varkappa_1.$$

Из (9) видно, что упругость жидкости увеличивает \varkappa_1 и \varkappa_2 , причем $\varkappa_2 > \varkappa_1$.

Таким образом, наличие времени релаксации увеличивает область надкритичности существования гексагонов. Этот вывод качественно подтверждается экспериментальными данными [6], где наблюдалась в упругих жидкостях гексагональная конвективная структура более упорядоченного характера, чем при такой же надкритичности в ньютоновской

жидкости, т. е. в упругих жидкостях гексагоны находились в области надкритичности, относительно более удаленной от верхней границы их неустойчивости.

Поступила 7 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Scanlon J. W., Segel L. A. Finite amplitude cellular convection induced by surface tension.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, N 1.
- 2 Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, N 1.
- 3 Palm E. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection.— J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, N 1.
- 4 Segel L. A., Stuart J. T. On the question of the preferred mode in cellular thermal convection.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, N 2.
- 5 Palm E., Ellingsen T., Gjevik B. On the occurrence of cellular motion in Benard convection.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, N 4.
- 6 Liang S. F., Acrivos A. Experiments on buoyancy-driven convection in non-Newtonian fluid.— Rheol. acta, 1970, vol. 9, N 3.

УДК 539.63 : 537.311.3

ИЗМЕРЕНИЕ ВЫСОКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В УДАРНО-СЖАТЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Л. А. Гатилов, Л. В. Кулешова

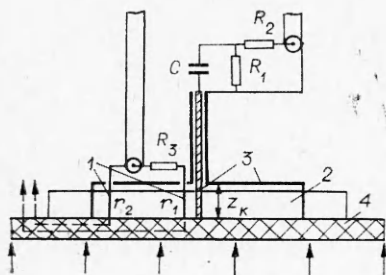
(Москва)

Отсутствие удовлетворительного решения задачи измерения высокой электропроводности $\sigma > 10^2 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ в ударно-сжатых диэлектриках, в частности для регистрации перехода диэлектрик — металл в ударной волне, неоднократно отмечалось в литературе [1—4].

В данной работе рассматривается двухзондовая методика измерения электропроводности, использующая коаксиальные цилиндрические токовые электроды. В этом случае оказываются возможными постановка и решение соответствующей задачи определения распределения высокой проводимости за фронтом ударной волны (ФУВ).

Схема эксперимента приведена на фиг. 1. Регистрируются разность потенциалов $U(t)$ между зондами из тонкой проволоки 1 и с помощью «безындуктивного» шунта R_1 импульсный ток $I(t)$, протекающий через образец 2 и коаксиальные электроды 3. Предполагается, что проводимость образца за ФУВ достаточно высока, чтобы можно было пренебречь шунтированием образца диэлектрическим экраном 4 и несимметрией электромагнитного поля, вносимой схемой регистрации. Стрелками показано направление ФУВ. Экраны осциллографических кабелей заземляются у приборного комплекса.

Будем предполагать, что проводимость в образце становится заметно отличной от нуля непосредственно за ФУВ, который имеет пренебрежимо малую ширину. Пусть с момента времени $t = 0$ по образ-



Ф и г. 1