

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В КАНАЛЕ
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА
С НЕПРОВОДЯЩИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

А. Б. Ватажин, Н. Г. Немкова

(Москва)

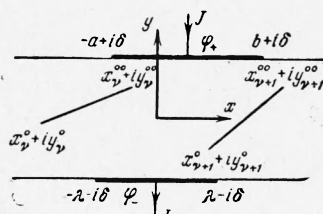
Известно, что в канале магнитогидродинамического генератора вследствие неоднородности магнитного поля имеются зоны концевых токов, снижающих эффективность генератора и величину генерируемой мощности [1-2]. Для уменьшения этих потерь было предложено вводить в канал генератора непроводящие перегородки, препятствующие растеканию тока вне электродной зоны [3]. Саттон получил также аналитические решения для некоторых частных случаев расположения перегородок. Если же магнитное поле по всей длине канала однородно, то моделирование канала генератора на электролитической ванне показало, что введение перегородок оказывается невыгодным [4].

В настоящей работе показано, что задача определения характеристик генератора с непроводящими перегородками в случае однородного магнитного поля и в случае поля, сосредоточенного только в электродной зоне, сводится к задаче 1, состоящей в определении тока, протекающего через канал вследствие приложенной к электродам разности потенциалов при равных нулю скорости среды и напряженности магнитного поля. Рассмотрены условия, при которых аналитическое решение задачи 1 для канала с перегородками можно построить при помощи простых решений задачи 1 для каналов без перегородок. Приведены результаты моделирования задачи 1 на электролитической ванне.

§ 1. *Задача 1.* Рассмотрим канал $|x| < \infty$, $|y| < \delta$, $|z| < h$, участки стенок которого $|x| < \lambda$, $y = -\delta$, $|z| < h$ и $-a < x < b$, $y = \delta$, $|z| < h$ представляют собой электроды, а остальные участки стенок непроводящие. В канал введено n бесконечно тонких непроводящих перегородок g_v

$$x_v^{\circ} < x < x_v^{\circ\circ}, \quad (y - y_v^{\circ})(x_v^{\circ\circ} - x_v^{\circ}) = (x - x_v^{\circ})(y_v^{\circ\circ} - y_v^{\circ}), \quad |z| < h$$

где x_v° , y_v° и $x_v^{\circ\circ}$, $y_v^{\circ\circ}$ — координаты концевых точек отрезка прямой, по которому перегородка g_v пересекается¹ с плоскостью xu . В дальнейшем будем предполагать, что условия вдоль оси z однородны и рассматривать плоский канал (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть в канале покоится проводящая среда с постоянной электропроводностью σ , а к электродам подведена разность потенциалов $\phi_+ - \phi_-$; здесь $\phi(x, y)$ — электростатический потенциал, ϕ_+ — потенциал электрода $-a < x < b$, $y = \delta$, а ϕ_- — потенциал электрода $|x| < \lambda$, $y = -\delta$. Определим суммарный электрический ток, проходящий через электроды.

Компоненты вектора плотности электрического тока $j_x(x, y)$ и $j_y(x, y)$ и потенциал $\phi(x, y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений и гра-

¹ Бесконечно тонкой перегородкой будем называть перегородку, толщина которой мала по сравнению с размерами $\sqrt{(x_v^{\circ\circ} - x_v^{\circ})^2 + (y_v^{\circ\circ} - y_v^{\circ})^2}$ и $2h$.

ничных условий

$$\begin{aligned}
 j_x &= -\sigma \partial\varphi / \partial x, & j_y &= -\sigma \partial\varphi / \partial y, & \Delta\varphi &= 0 \\
 \partial\varphi / \partial x &= 0, & \partial\varphi / \partial y &= 0 & \text{при } |x| &= \infty \\
 \partial\varphi / \partial y &= 0 & \text{при } x < -a, y = \delta; & x > b, y = \delta; & |x| > \lambda, y = -\delta & \quad (1.1) \\
 \varphi &= \varphi_+ & \text{при } -a < x < b, y = \delta; & \varphi &= \varphi_- & \text{при } |x| < \lambda, y = -\delta \\
 \partial\varphi / \partial\chi &= 0 & \text{при } x_v^\circ < x < x_v^{\circ\circ}, (y - y_v^\circ)(x_v^{\circ\circ} - x_v^\circ) &= (x - x_v^\circ)(y_v^{\circ\circ} - y_v^\circ)
 \end{aligned}$$

Последнее условие в этой системе должно выполняться на каждой стороне ¹ перегородки g_v ; при этом χ — вектор нормали к перегородке.

При помощи анализа размерностей [5] из системы (1.1) находим

$$\begin{aligned}
 J &= - \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, -\delta) dx = \sigma(\varphi_+ - \varphi_-) \Phi & (1.2) \\
 \Phi &= \Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{x_i^\circ}{\delta}, \frac{x_i^{\circ\circ}}{\delta}, \frac{y_i^\circ}{\delta}, \frac{y_i^{\circ\circ}}{\delta}\right) \quad (i = 1, \dots, n)
 \end{aligned}$$

Вид функции Φ , определяемой геометрией канала, можно найти только из решения системы (1.1). При наличии большого числа непроводящих перегородок конечной длины получить аналитическое решение системы (1.1) очень сложно. Решение задачи упрощается, если область P течения токов в канале односвязна, что, например, имеет место в случае, когда перегородки расположены горизонтально и один конец каждой перегородки уходит в бесконечность. Тогда задача решается при помощи конформного отображения области P , представляющей собой внутренность многоугольника, на верхнюю полуплоскость и применения формулы Келдыша—Седова [6].

Распределение потенциала в канале можно найти также при помощи моделирования на электролитической ванне. При соблюдении геометрического подобия канала и ванны для определения величины Φ , как следует из формулы (1.2), необходимо знать проводимость электролита, подводимую к электродам разность потенциалов и протекающий через электроды полный ток.

Приведем выражения для функции Φ в простейших случаях, когда отсутствуют перегородки. Пусть электроды расположены симметрично: $a = b = \lambda$. Решение системы (1.1) для этого случая найдено в работе [7].

$$\Phi = \tau(k), \quad k^{-1} = \text{ch}(\pi\lambda / 2\delta) \quad (\tau(k) = K(k') / K(k), \quad k^2 + k'^2 = 1) \quad (1.3)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $(\lambda / \delta) \geq 0.3$ справедлива приближенная формула (ее график в работе [8])

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} + \frac{2 \ln 2}{\pi} \quad (1.4)$$

Пусть перегородки отсутствуют, а электроды скошены один относительно другого. Решение системы (1.1) находится как частный случай решения, полученного в работе [9]

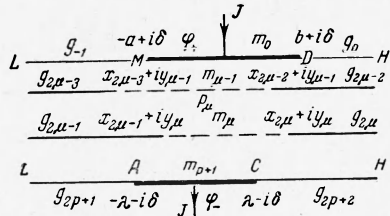
$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y) &= \frac{\varphi_+ \theta + \varphi_- v}{\theta + v} + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\theta + v} \text{Re} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(ut-1)(rt+1)(st+1)}} \\
 t &= i \exp\left(\frac{\pi(x + \lambda + iy)}{2\delta}\right), & u &= \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{\delta}\right), & r &= \exp\left(-\frac{\pi(b + \lambda)}{2\delta}\right) \\
 s &= \exp\left(-\frac{\pi(\lambda - a)}{2\delta}\right), & \theta + v &= \omega K(q), & \theta &= \omega F(\psi, q) & (1.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{2}{\sqrt{(s+u)(r+1)}}, & q &= \left(\frac{(s+1)(r+u)}{(s+u)(r+1)}\right)^{1/2}, & \psi &= \arcsin\left(\frac{s+u}{s+1}\right)^{1/2} \\
 \Phi &= \tau(q) & (1.6)
 \end{aligned}$$

¹ Потенциал и производная потенциала в касательном к перегородке направлении в общем случае различны с каждой стороны перегородки.

Здесь $F(\psi, q)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода, функция $\tau(q)$ определяется формулой (1.3). Величина $(\theta + v)^{-1}(\varphi_+ \theta + \varphi_- v)$ равна значению потенциала $\varphi(x, y)$ при $x = -\infty$.

Формула (1.6) показывает, что при скошенных относительно друг друга электродах одинаковой длины ($a = 2\lambda - b, b \neq \lambda$) величина Φ меньше, чем при симметрично расположенных электродах. Действительно, при увеличении b от $-\infty$ до λ величина Φ возрастает от нуля при $b = -\infty$ до $\tau_* = \tau[\text{ch}^{-1}(\pi\lambda / 2\delta)]$ при $b = \lambda$, а при изменении b от λ до $+\infty$ величина Φ убывает от τ_* при $b = \lambda$ до нуля при $b = \infty$.



Фиг. 2

Рассмотрим канал с $n = 2p$ горизонтальными перегородками, концевые точки которых суть (фиг. 2)

$$\begin{aligned} x_{2\mu-1}^\circ + iy_{2\mu-1}^\circ &= -\infty + iy_\mu & (1.7) \\ x_{2\mu-1}^{\circ\circ} + iy_{2\mu-1}^{\circ\circ} &= x_{2\mu-1} + iy_\mu \\ x_{2\mu}^\circ + iy_{2\mu}^\circ &= x_{2\mu} + iy_\mu \\ x_{2\mu}^{\circ\circ} + iy_{2\mu}^{\circ\circ} &= +\infty + iy_\mu \end{aligned}$$

($y_{\mu-1} > y_\mu, x_{2\mu} > x_{2\mu-1}, \mu = 1, \dots, p$)

Внутренность канала с разрезами вдоль перегородок обозначим через P , отрезок прямой, соединяющий правый конец перегородки $g_{2\mu-1}$ с левым концом перегородки $g_{2\mu}$, обозначим через m_μ ($\mu = 1, \dots, p$), верхний и нижний электрод — через m_0 и m_{p+1} , а каждую область канала, ограниченную отрезками $m_{\mu-1}, m_\mu$ и перегородками $g_{2\mu-3}, g_{2\mu-2}, g_{2\mu-1}, g_{2\mu}$ — через P_μ ($\mu = 1, \dots, p+1$) (участки $g_{-1}, g_0, g_{2p+1}, g_{2p+2}$ — непроводящие стенки канала LM, DH, LA и CH соответственно).

Построим функцию

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \Phi_\mu(x, y) & \text{в } P_\mu \quad (\mu = 1, \dots, p+1) \\ \Phi_{m_\mu} & \text{на } m_\mu \quad (\mu = 1, \dots, p) \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(x', y') &= \frac{\varphi_{m_{\mu-1}} \theta_\mu + \varphi_{m_\mu} v_\mu}{\theta_\mu + v_\mu} + \frac{\varphi_{m_{\mu-1}} - \varphi_{m_\mu}}{\theta_\mu + v_\mu} \times & (1.9) \\ &\times \text{Re} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(t-1)(u_\mu t-1)(r_\mu t+1)(s_\mu t+1)}}, & t = i \exp \frac{\pi(x' + \lambda_\mu + iy')}{2\delta_\mu} \\ x' &= x - 1/2(x_{2\mu-1} + x_{2\mu}), & \tilde{v}_\mu &= x_{2\mu-2} - 1/2(x_{2\mu-1} + x_{2\mu}), & \lambda_\mu &= 1/2(x_{2\mu} - x_{2\mu-1}) \\ y' &= y - 1/2(y_{\mu-1} + y_\mu), & a_\mu &= 1/2(x_{2\mu-1} + x_{2\mu}) - x_{2\mu-3}, & \tilde{\delta}_\mu &= 1/2(y_{\mu-1} - y_\mu) \\ &(|x'| < \infty, |y'| < \delta_\mu, y_0 = \delta, y_{p+1} = -\delta) & & & \theta_\mu + v_\mu &= \omega_\mu K(q_\mu) \\ &(x_{-1} = -a, x_0 = \tilde{b}, x_{2p+1} = -\lambda, x_{2p+2} = \lambda) & & & \theta_\mu &= \omega_\mu F(\psi_\mu, q_\mu) \\ u_\mu &= \exp\left(-\frac{\pi\lambda_\mu}{\delta_\mu}\right), & r_\mu &= \exp\left(-\frac{\pi(b_\mu + \lambda_\mu)}{2\delta_\mu}\right), & s_\mu &= \exp\left(-\frac{\pi(\lambda_\mu - a_\mu)}{2\delta_\mu}\right) \end{aligned}$$

$$\Phi_\mu = \tau(q_\mu) \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \omega_\mu &= \frac{2}{\sqrt{(s_\mu + u_\mu)(1+r_\mu)}}, & q_\mu &= \left(\frac{(s_\mu + i)(r_\mu + u_\mu)}{(s_\mu + u_\mu)(r_\mu + 1)}\right)^{1/2}, & \psi_\mu &= \arcsin\left(\frac{s_\mu + u_\mu}{s_\mu + 1}\right)^{1/2} \\ \Phi_{m_\mu} &= \Phi_+ - \left(\sum_{\gamma=1}^{\gamma=p+1} \frac{1}{\Phi_\gamma}\right)^{-1} (\Phi_+ - \Phi_-) \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\mu} \frac{1}{\Phi_\gamma} & (\psi_{m_0} &= \Phi_+) & (1.11) \end{aligned}$$

Каждая функция φ_μ строится при помощи формул (1.5), (1.6) и является решением задачи 1 для области P_μ при условиях $\varphi_\mu(x, y) = \varphi_{m, \mu-1}$ на $m_{\mu-1}$ и $\varphi_\mu(x, y) = \varphi_{m_\mu}$ на m_μ . Постоянные φ_{m_μ} , определенные формулами (1.11), выбраны из условия, чтобы токи $J_\mu = \sigma \Phi_\mu (\varphi_{m, \mu-1} - \varphi_{m_\mu})$, протекающие через каждую область P_μ , были равны. Нетрудно видеть, что выражения (1.8) — (1.11) представляют собой решение задачи о распределении тока в канале с перегородками (1.7) при условии, что перегородки $g_{2\mu-1}$ и $g_{2\mu}$ соединены между собой бесконечно тонким электродом, расположенным на месте отрезка m_μ .

Выясним условия, при которых решение системы (1.4) в случае перегородок с концевыми точками (1.7) дается формулами (1.8) — (1.11). Покажем, что для этого необходимо и достаточно выполнение условий А: $(\partial\varphi_\mu / \partial y) = (\partial\varphi_{\mu+1} / \partial y)$ в каждой точке отрезка m_μ ($\mu = 1, \dots, p$).

Действительно, если решение системы (1.1) дается формулами (1.8) — (1.11), то условия А выполнены в силу того, что функция $\varphi(x, y)$ — гармоническая в P . Наоборот, пусть выполнены условия А. Рассмотрим функцию $\varphi(x, y)$, определенную согласно (1.8) — (1.11). Так как $(\partial\varphi_\mu / \partial y) = 0$ на непроводящих перегородках, $(\partial\varphi_1 / \partial y) = 0$ и $(\partial\varphi_{p+1} / \partial y) = 0$ на непроводящих стенках канала, $\varphi_1 = \varphi_+$ на m_0 и $\varphi_{p+1} = \varphi_-$ на m_{p+1} , наконец, $(\partial\varphi_\mu / \partial x) = 0$, $(\partial\varphi_\mu / \partial y) = 0$ при $|x| = \infty$, то функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет всем граничным условиям (1.1) для задачи 1.

Покажем, что функция $\varphi(x, y)$ — гармоническая. В каждой области P_μ построим аналитическую функцию $f_\mu(z) = (\partial\varphi_\mu / \partial x) - i(\partial\varphi_\mu / \partial y)$. Функции $\varphi_\mu(x, y)$ таковы, что функции $f_\mu(z)$ непрерывны в соответствующих областях $P_\mu + m_{\mu-1} + m_\mu$ (концевые точки отрезков m_μ исключаются). Так как выполнены условия А и $(\partial\varphi_\mu / \partial x) = (\partial\varphi_{\mu+1} / \partial x) = 0$ на m_μ в силу свойств функций $\varphi_\mu(x, y)$, то $f_\mu(z) = f_{\mu+1}(z)$ на m_μ . Построим функцию

$$f(z) = \begin{cases} f_\mu(z) & \text{в } P_\mu \quad (\mu = 1, \dots, p+1) \\ f_\mu(z) = f_{\mu+1}(z) & \text{на } m_\mu \quad (\mu = 1, \dots, p) \end{cases}$$

Функция $f(z)$ непрерывна в P и, как легко показать, интеграл от функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру в P равен нулю. Поэтому функция $f(z)$ — аналитическая в P . Легко видеть, что определенная формулами (1.8) функция $\varphi(x, y)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x, y) = \varphi_+ + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f(z) dz$$

где $z_0 = x_0 + id$, $-a < x_0 < b$, и поэтому будет гармонической в P .

Таким образом, функция $\varphi(x, y)$ является решением системы (1.1). Решения, отличные от (1.8), отсутствуют в силу единственности решения задачи 1.

Если решение системы (1.1) дается формулами (1.8) — (1.11), то из равенств $(\varphi_{m, \mu-1} - \varphi_{m_\mu}) \Phi_\mu = (\varphi_+ - \varphi_-) \Phi$ следует

$$\Phi = \left(\sum_{\gamma=1}^{\gamma=p+1} \frac{1}{\Phi_\gamma} \right)^{-1} \tag{1.12}$$

Рассмотрим два случая, когда решение задачи 1 дается формулами (1.8). Пусть в канал с симметричными электродами введены две перего-

¹ Везде под значениями функций на m_μ понимаются предельные значения этих функций на m_μ .

родки с концевыми точками

$$\begin{aligned} x_1^\circ + iy_1^\circ &= -\infty, & x_1^{\circ\circ} + iy_1^{\circ\circ} &= -\alpha; & x_2^\circ + iy_2^\circ &= \rho, \\ x_2^{\circ\circ} + iy_2^{\circ\circ} &= +\infty & (y_1^\circ = y_1^{\circ\circ} = y_2^\circ = y_2^{\circ\circ} = 0) \end{aligned}$$

Симметрия относительно оси x позволяет представить решение задачи 1 в виде (1.8) — (1.11), где $p = 1$. Величина Φ , согласно (1.12), равна

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \tau(q), & q &= \left(\frac{(1 + u\beta_1)(1 + u\beta_2)}{(u + \beta_1)(u + \beta_2)} \right)^{1/2} \\ (u &= \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{\delta}\right), & \beta_1 &= \exp\frac{\pi\rho}{\delta}, & \beta_2 &= \exp\frac{\pi\alpha}{\delta}) \end{aligned}$$

Если расстояния от начала координат до концов перегородок одинаковы ($\rho = \alpha$), то, используя тождество [8]

$$\tau(e^{-2s}) = 2\tau(\operatorname{ch}^{-1}s) \quad (s \geq 0)$$

для величины Φ получаем две эквивалентные формулы

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \tau(q), & q &= \frac{1 + u\beta}{u + \beta} \quad \left(u = \exp\left(-\frac{\pi\lambda}{\delta}\right), \beta = \exp\left(\frac{\pi\rho}{\delta}\right) \right) \\ \Phi &= \tau(q_*), & q_* &= \left(\frac{2\kappa(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + \kappa)(\kappa + 1)} \right)^{1/2} \quad \left(\kappa^{-1} = \operatorname{ch}\frac{\pi\lambda}{\delta}, \varepsilon = \kappa \operatorname{ch}\left(\frac{\pi\rho}{\delta}\right) \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Чем глубже перегородки вдвинуты в глубь канала, тем меньше величина Φ . Когда перегородки смыкаются друг с другом, $\Phi = 0$ и $J = 0$. Когда перегородки выдвинуты из канала ($\rho = \infty$, $\alpha = \infty$), величина Φ определяется формулой (1.3). Когда $\rho = \alpha = \lambda$, $\Phi = 0.5 \tau(\kappa)$. При $2\lambda/\delta \geq 0.3$, согласно (1.4), $\Phi = (\lambda/\delta) + \pi^{-1} \ln 2$. Таким образом, при $2\lambda/\delta \geq 0.3$ введение перегородок до края электродной зоны уменьшает величину Φ на 0.22.

Пусть в канал с симметричными электродами введены $n = 2p$ перегородок с концевыми точками

$$\begin{aligned} x_{2\mu-1}^\circ + iy_{2\mu-1}^\circ &= -\infty + iy_\mu, & x_{2\mu-1}^{\circ\circ} + iy_{2\mu-1}^{\circ\circ} &= -\lambda + iy_\mu \\ x_{2\mu}^\circ + iy_{2\mu}^\circ &= \lambda + iy_\mu, & x_{2\mu}^{\circ\circ} + iy_{2\mu}^{\circ\circ} &= +\infty + iy_\mu \\ (y_\mu &= \delta - \frac{2\delta\mu}{p+1}) \quad (\mu = 1, \dots, p) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Так как условия A при таком расположении перегородок оказываются выполненными, решение задачи 1 дается формулами (1.7) — (1.12); поэтому

$$\Phi = \frac{\tau(\xi)}{p+1}, \quad \xi^{-1} = \operatorname{ch} \frac{\pi\lambda(p+1)}{2\delta} \quad (1.15)$$

При $(\lambda/\delta) \geq 0.3/(p+1)$ находим

$$\Phi = \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\pi \ln 2}{2(p+1)} \quad (1.16)$$

При $p \rightarrow \infty$ получаем $\Phi = \lambda/\delta$. Заметим, что формулой $J = \sigma\lambda(\varphi_+ - \varphi_-)/\delta$ определяется ток, протекающий через электроды канала, когда отсутствуют перегородки внутри электродной зоны $|x| < \lambda$, $|y| < \delta$ и проводимость вне электродной зоны равна нулю. При этих условиях ток течет прямолинейно и перпендикулярно к электродам.

Полученные выше результаты могут быть использованы при решении задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора.

§ 2. *Задача 2.* Пусть в плоском канале $|x| < \infty$, $|y| < \delta$ с электродами AC и MD и горизонтальными непроводящими перегородками g_ν ($\nu = 1, \dots, n$) в осевом направлении движется проводящая среда (фиг. 3). Перпендикулярно к плоскости течения приложено однородное магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, -B_0)$. Электроды соединены между собой через внешнюю нагрузку R .

В результате взаимодействия магнитного поля и среды между электродами создается разность потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$, а на нагрузке выделяется мощность $N = J^2 R$.

Предположим, что магнитные числа Рейнольдса намного меньше единицы, так что можно пренебречь индуцированным магнитным полем. Задачу о распределении токов в канале будем решать в приближенной постановке [10], в которой предполагается, что гидродинамические величины известны. Будем считать, что скорость среды определяется зависимостью $\mathbf{v} = (V_0 = \text{const}, 0, 0)$, а электропроводность среды постоянна.

При сделанных предположениях распределение электрического тока в канале описывается уравнениями

$$\begin{aligned} j_x &= -\sigma \partial \varphi / \partial x, & j_y &= -\sigma \partial \varphi / \partial y + (\sigma/c)V_0 B_0, & \Delta \varphi &= 0 \\ \partial \varphi / \partial y &= c^{-1} V_0 B_0, & \partial \varphi / \partial x &= 0 & \text{при } |x| &= \infty \\ \partial \varphi / \partial y &= c^{-1} V_0 B_0 & \text{на } LA, CH, DH, LM, g_\nu & & (\nu = 1, \dots, n) & \\ \varphi &= \varphi_+ & \text{на } DM, & \varphi &= \varphi_- & \text{на } AC \\ \varphi_+ - \varphi_- &= R \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, -\delta) dx = RJ \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь c — скорость света в пустоте.

Последнее равенство в формулах (2.1) представляет собой закон Ома для внешней нагрузки. Введем функцию $\varphi^*(x, y)$ согласно формуле

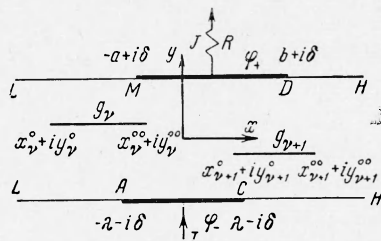
$$\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y) + yc^{-1}V_0 B_0$$

Тогда из системы (2.1) получим систему

$$\begin{aligned} j_x &= -\sigma \partial \varphi^* / \partial x, & j_y &= -\sigma \partial \varphi^* / \partial y, & \Delta \varphi^* &= 0 \\ \partial \varphi^* / \partial x &= 0, & \partial \varphi^* / \partial y &= 0 & \text{при } |x| &= \infty \\ \partial \varphi^* / \partial y &= 0 & \text{на } LA, CH, DH, LM, g_\nu & & \\ \varphi^* &= \varphi_+^* & \text{на } AC, & \varphi^* &= \varphi_-^* & \text{на } DM \\ \mathcal{E} - (\varphi_+^* - \varphi_-^*) &= RJ & (\mathcal{E} = 2\delta c^{-1}V_0 B_0) & & \end{aligned} \quad (2.2)$$

Система (2.2), если в ней не рассматривать последнее соотношение, является частным случаем системы (1.1). Поэтому согласно (1.2)

$$\begin{aligned} J &= \sigma (\varphi_+^* - \varphi_-^*) \Phi = \sigma [\mathcal{E} - (\varphi_+ - \varphi_-)] \Phi \\ \Phi &= \Phi \left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{x_1^\circ}{\delta}, \dots, \frac{x_n^\circ}{\delta}, \frac{x_1^{\circ\circ}}{\delta}, \dots, \frac{x_n^{\circ\circ}}{\delta}, \frac{y_1}{\delta}, \dots, \frac{y_n}{\delta} \right) \\ & \quad (y_\nu^\circ = y_\nu^{\circ\circ} = y_\nu) \end{aligned}$$



Фиг. 3

Используя последнее соотношение системы (2.2), для тока J , разности потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$ и мощности N получим следующие выражения

$$J = \frac{\sigma \mathcal{E} \Phi}{1 + R\sigma\Phi}, \quad \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\mathcal{E} R \sigma \Phi}{1 + R\sigma\Phi}, \quad N = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 R \sigma \Phi^2}{(1 + R\sigma\Phi)^2} \quad (2.3)$$

Для определения джоулевой диссипации Q воспользуемся очевидным соотношением

$$Q = \iint \frac{j^2}{\sigma} dx dy = - \iint \operatorname{div} \varphi^* j dx dy$$

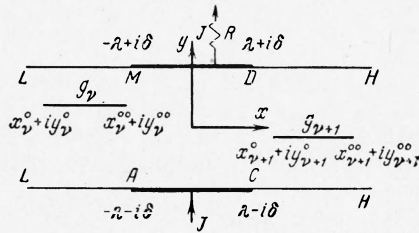
где интегрирование распространяется по всему каналу за исключением перегородок. Применяя формулу Гаусса — Остроградского, найдем

$$Q = \frac{\sigma \mathcal{E}^2 \Phi}{(1 + R\sigma\Phi)^2} \quad (2.4)$$

Эффективность (к.п.д.) генератора η

$$\eta = \frac{N}{N + Q} = \frac{R\sigma\Phi}{1 + R\sigma\Phi} \quad (2.5)$$

Задача 3. Пусть моделью магнито-гидродинамического генератора служит плоский канал $|x| < \infty, |y| < \delta$ с симметрично расположенными



Фиг. 4

электродами AC и MD и горизонтальными непроводящими перегородками g_v ($v = 1, \dots, n$), расположенными вне электродной зоны (фиг. 4). Электроды соединены между собой через нагрузку R . Предположим¹, что электропроводность среды постоянна, распределение магнитного поля выражается зависимостью

$$\mathbf{V} = (0, 0, -B(x)), \quad B(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > \lambda \\ B(x) & \text{при } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (2.6)$$

магнитные числа Рейнольдса намного меньше единицы, а распределение скорости задается в виде $\mathbf{v} = (V(x), 0, 0)$.

Для определения электрических характеристик генератора необходимо решить следующую систему уравнений и граничных условий

$$j_x = -\sigma \partial \varphi / \partial x, \quad j_y = -\sigma \partial \varphi / \partial y + \sigma c^{-1} V(x) B(x), \quad \Delta \varphi = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial \varphi / \partial x = 0, \quad \partial \varphi / \partial y = 0 \quad \text{при } |x| = \infty$$

$$\partial \varphi / \partial y = 0 \quad \text{на } LA, CH, DH, LM, g_v \quad (v = 1, \dots, n) \quad (2.8)$$

$$\varphi = \varphi_+ \quad \text{на } MD, \quad \varphi = \varphi_- \quad \text{на } AC$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = R \int_{-\lambda}^{+\lambda} j_y(x, -\delta) dx = RJ \quad (2.9)$$

Произведем замену

$$j_x^* = j_x, \quad j_y^* = j_y - \frac{\sigma}{c} V(x) B(x) \quad (2.10)$$

Тогда уравнения (2.7) можно записать в виде

$$j_x^* = -\sigma \partial \varphi / \partial x, \quad j_y^* = -\sigma \partial \varphi / \partial y, \quad \Delta \varphi = 0 \quad (2.11)$$

¹ Задача 3, так же как и задача 2, решается в приближенной постановке [10].

Уравнения (2.11) вместе с условиями (2.8) образуют систему, являющуюся частным случаем системы (1.1). Поэтому протекающий в направлении y ток J^* равен

$$J^* = -\sigma(\varphi_+ - \varphi_-)\Phi, \\ \Phi = \Phi\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{x_1^\circ}{\delta}, \dots, \frac{x_n^\circ}{\delta}, \frac{x_1^{00}}{\delta}, \dots, \frac{x_n^{00}}{\delta}, \frac{y_1}{\delta}, \dots, \frac{y_n}{\delta}\right) \quad (2.12) \\ (y_v^\circ = y_v^{00} = y_v, |x_v^\circ| \geq \lambda, |x_v^{00}| \geq \lambda)$$

Полный ток J определяется при помощи соотношений (2.10) и (2.12)

$$J = -\sigma\Phi(\varphi_+ - \varphi_-) + \frac{\sigma}{c} \int_{-\lambda}^{+\lambda} VB dx \quad (2.13)$$

Выражение для тока через внешнюю нагрузку, а также разность потенциалов между электродами и мощность равны

$$J = \frac{\sigma\zeta_1}{1 + R\sigma\Phi}, \quad \varphi_+ - \varphi_- = \frac{R\sigma\zeta_1}{1 + R\sigma\Phi}, \quad N = \frac{\sigma\zeta_1^2 R\sigma}{(1 + R\sigma\Phi)^2} \quad \left(\zeta_1 = \frac{1}{c} \int_{-\lambda}^{+\lambda} VB dx\right) \quad (2.14)$$

Определим джоулеву диссипацию и эффективность генератора. Используя формулу Гаусса — Остроградского и условия (2.8), находим

$$Q = \sigma \iint \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{c} VB \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \left(\frac{1}{c} VB\right)^2 \right] dx dy = \\ = \sigma \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\Phi}{c} VB + \frac{1}{c} VB \left(\frac{y}{c} VB - \Phi\right) \right] \right\} dx dy = \\ = -J(\varphi_+ - \varphi_-) + \sigma\zeta_2 - \sigma\zeta_1(\varphi_+ - \varphi_-) \\ \eta = \frac{R\sigma\zeta_1^2}{(1 + R\sigma\Phi)[(1 + R\sigma\Phi)\zeta_2 - R\sigma\zeta_1^2]} \quad \left(\zeta_2 = \frac{2\delta}{c^2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} V^2 B^2 dx\right) \quad (2.15)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, можно показать, что $(\zeta_2\lambda/\delta) \geq \zeta_1^2$, причем знак равенства достигается только при $\vec{VB} = \text{const}$. Таким образом, если заданы геометрия канала и параметр $R\sigma$ и сравниваются течения с различными распределениями магнитного поля и скорости, то отбор энергии с максимальным к.п.д.

$$\eta_0 = \frac{R\sigma\lambda}{(1 + R\sigma\Phi)[\delta + R\sigma(\Phi\delta - \lambda)]} \quad (2.16)$$

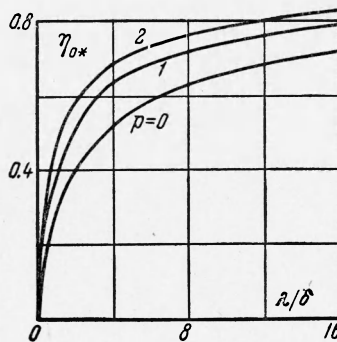
осуществляется при течении с $VB = C$, где постоянная C определяется из условия задания величины снимаемой мощности.

При заданной геометрии канала максимум величины η_0 , реализующийся при

$$R\sigma = \{\Phi[\Phi - (\lambda/\delta)]\}^{-0.5}$$

равен

$$\eta_{0*} = \frac{\lambda}{2\Phi\delta - \lambda + 2\sqrt{\Phi\delta(\Phi\delta - \lambda)}} \quad (2.17)$$



Фиг. 5

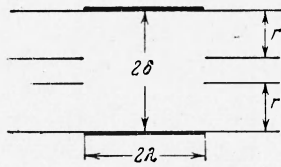
Как следует из формул (2.3), (2.5) и (2.14), (2.15), решение задач 2 и 3 сводится к решению задачи 1, которое определяет величину Φ . Выражения (2.5) и (2.15) показывают, что с уменьшением величины Φ эффективность генератора в случае всюду однородного магнитного поля (задача 2) уменьшается, а в случае поля, сосредоточенного только в электродной зоне (задача 3), увеличивается. Согласно § 1, наличие непроводящих перегородок приводит к уменьшению величины Φ . Таким образом, при введении в канал перегородок эффективность генератора в задаче 2 уменьшается, а в задаче 3 увеличивается.

С практической точки зрения наиболее интересна модель генератора в задаче 3, когда магнитное поле сосредоточено только в электродной зоне. Распределение тока в этом случае характеризуется наличием зон концевых токов, вызывающих потери и уменьшающих к.п.д. генератора. Введение перегородок в такой схеме препятствует концевому перетеканию токов, в результате чего увеличивается к.п.д. На фиг. 5 приведена зависимость величины $\eta_{0\pm}$, определяемой формулой (2.17), от параметра λ/δ для случаев, когда в канале отсутствуют перегородки ($p = 0$) и когда в канал введены две ($p = 1$) и четыре ($p = 2$) перегородки, координаты концевых точек которых определяются соотношениями (1.14). Как видно из фигуры, полезный эффект введения перегородок наиболее заметен при небольших отношениях λ/δ .

Формулы (1.15) и (1.16) получены в предположении бесконечной длины непроводящих перегородок. На практике же в целях уменьшения дополнительных, связанных с введением перегородок, потерь на трение и теплообмен желательно, чтобы длина перегородок была бы как можно меньшей.

Пусть в канал введены $n = 2p$ горизонтальных перегородок конечной длины l с концевыми точками

$$\begin{aligned} x_{2\mu-1}^{\circ} + iy_{2\mu-1}^{\circ} &= -l - \lambda + iy_{\mu} \\ x_{2\mu-1}^{\circ\circ} + iy_{2\mu-1}^{\circ\circ} &= -\lambda + iy_{\mu} \\ x_{2\mu}^{\circ} + iy_{2\mu}^{\circ} &= \lambda + iy_{\mu}, \quad x_{2\mu}^{\circ\circ} + iy_{2\mu}^{\circ\circ} = \lambda + l + iy_{\mu} \\ (0 < l < \infty, \quad y_{\mu} &= \delta - 2\delta\mu(p+1)^{-1}, \quad \mu = 1, \dots, p) \end{aligned} \quad (2.18)$$



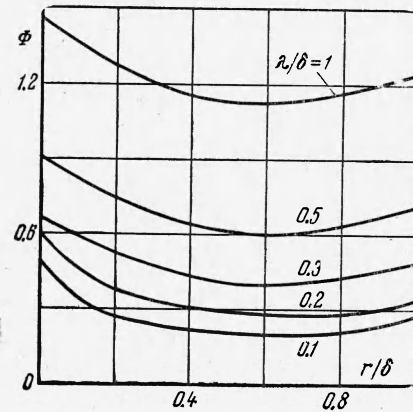
Фиг. 6

Определим длину l_* , такую что при $l \geq l_*$ величина Φ для канала с перегородками (2.18) будет мало отличаться от величины Φ , определенной формулами (1.15), (1.16) для канала с перегородками (1.14).

Рассмотрим задачу 1 для канала без перегородок с симметричными электродами. Из решения (1.5), в котором надо положить $a = b = \lambda$, следует, что порядок длины зоны затухания токов за электродной зоной равен ширине канала 2δ . Так как решение задачи 1 для канала с перегородками (1.14) строится при помощи решений задачи 1 для каналов ширины $2\delta/(p+1)$ без перегородок, порядок длины зоны затухания токов в каждой области P_{μ} такого канала равен $2\delta/(p+1)$. Поэтому, если перегородки (2.18) таковы, что $l \geq l_* = 4\delta/(p+1)$, влиянием левых концов перегородок $g_{2\mu-1}$ и правых концов перегородок $g_{2\mu}$ можно пренебречь и величину Φ приближенно рассчитывать по формулам (1.15), (1.16).

Также очевидно, что если канал с перегородками (1.14) моделируется на электролитической ванне, то торцевые непроводящие стенки ванны достаточно вынести за электродную зону на длину $2\delta/(p+1)$.

§ 3. Некоторые случаи расположения непроводящих перегородок в канале, для которых затруднительно получение теоретических решений, исследовались при помощи моделирования на электролитической ванне. Моделировались каналы, для которых $(\lambda/\delta) \leq 1$. Ниже приведены результаты определения величины Φ для случая четырех перегородок, расположенных в ванне, как показано на фиг. 6. Рассматривались случаи $(\lambda/\delta) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1$, в каждом из которых величина Φ измерялась для шести положений перегородок: $(r/\delta) = 0, 0.2, 0.4, 0.8, 1$. Отношение дли-



Фиг. 7

ны ванны к ее ширине было достаточно большим, чтобы пренебречь влиянием левой и правой торцевых стенок канала. Залитый в ванну электролит имел конечную высоту h . При пересчете результатов измерений применительно к плоскому каналу предполагалось, что распределение токов по высоте ванны однородно. Когда $(r/\delta) = 0$, перегородки отсутствуют; когда $(r/\delta) = 1$, в канал введены две перегородки. На фиг. 7 приведены зависимости величины Φ от r/δ при различных λ/δ . Все кривые имеют выраженный минимум. Всегда $\Phi(0) > \Phi(1)$. При $(r/\delta)_* < (r/\delta) < 1$, где $\Phi[(r/\delta)_*] = \Phi(1)$, введение в канал четырех перегородок для уменьшения величины Φ оказывается более эффективным, а при $0 < (r/\delta) < (r/\delta)_*$ менее эффективным, чем введение в канал двух перегородок.

Приведем некоторые результаты расчетов к.п.д. генератора, при проведении которых использовались зависимости на фиг. 7. Наряду с параметром $R\sigma$ использовался параметр K , представляющий собой отношение разности потенциалов между электродами к электродвижущей силе \mathcal{E} . Зависимости между параметрами $R\sigma$ и K для задач 2 и 3 соответственно даются формулами

$$K = \frac{R\sigma\Phi}{1 + R\sigma\Phi}, \quad K = \frac{R\sigma\lambda}{\delta(1 + R\sigma\Phi)} \quad (3.1)$$

Эффективности генераторов в задачах 2 и 3, выраженные через параметр K , соответственно определяются выражениями

$$\eta = K, \quad \eta_0 = K(1 - K)^{-1} \left(1 - \frac{\delta}{\lambda} \Phi K \right) \quad (3.2)$$

Выражения в формулах (3.1) и (3.2), относящиеся к задаче 3, соответствуют случаю $VB = \text{const}$. Согласно формулам (3.1), при изменении $R\sigma$ от нуля до бесконечности величина K в задаче 2 монотонно возрастает от нуля до единицы, а в задаче 3 от нуля до $K_* = \lambda/\delta\Phi \leq 1$, причем знак равенства достигается только в случае «идеального» генератора, когда $\Phi = \lambda/\delta$. То обстоятельство, что в задаче 3 обычно $K_* < 1$, объясняется наличием концевых эффектов. Формулы (1.4) и (1.16) показывают, что при увеличении λ/δ относительное влияние концевых эффектов ослабляется и величина K_* приближается к единице.

Как следует из формул (3.1) и (3.2) для задачи 3, введение в канал генератора перегородок (в результате чего уменьшается величина Φ (фиг. 7)), приводит, с одной стороны, к увеличению к.п.д. для фиксированного K и, с другой стороны, к увеличению K_* . Так, если $(\lambda/\delta) = 0.5$, $K = 0.5$, то η_0 и K_* соответственно равны 0.26 и 0.67 при $r/\delta = 0$, 0.37 и 0.79 при $r/\delta = 0.2$, 0.41 и 0.85 при $r/\delta = 0.4$, 0.43 и 0.88 при $r/\delta = 0.6$, 0.42 и 0.86 при $r/\delta = 0.8$, 0.38 и 0.8 при $r/\delta = 1$.

Поступила 7 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton G. W., Hurwitz H. Jr., Poritsky H. Electrical and pressure losses in a magnetohydrodynamic channel due to end current loops. *Commun. and Electron.*, 1962, No. 58, p. 687—695.
2. Ватажин А. Б. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогиродинамического генератора. ПМТФ, 1962, № 5.
3. Sutton G. W. Design considerations of a magnetohydrodynamic electrical power generator. *Vista Astronautics*, 1960, vol. 3, 53—64 (N.-Y. Soc. Automot. Engrs).
4. Назаренко В. В. О моделировании магнитогиродинамического течения в канале на электролитической ванне. ПМТФ, 1963, № 5.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
6. Лаврентьев М. Л., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958, стр. 164.
7. Табакс К. К. Расчет электрического поля электромагнитного насоса постоянного тока. Уч. зап. Латв. гос. ун-та, 1958, XXI.
8. Ватажин А. Б. Магнитогиродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
9. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
10. Ватажин А. Б., Регер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 3.