

УДК 530.12

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЭЛЕЙ — ТЕЙЛОРА ТОНКОГО ЖИДКОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

С. М. Бахрах, Г. П. Симонов

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607200 Саров

Рассмотрена эволюция малых трехмерных возмущений ускоряемого тонкого жидкого слоя. Полученные аналитические решения отвечают различным видам начальных возмущений: в форме слоя, начальных скоростях, толщине слоя. В зависимости от безразмерных параметров, характеризующих начальные данные, возмущения могут со временем экспоненциально расти, оставаться ограниченными, изменять фазу.

Использование представления Лагранжа для уравнений движения ускоряемых тонкостенных систем и несжимаемой жидкости позволило получить ряд новых аналитических решений для начального этапа нелинейной стадии неустойчивости Рэлея — Тейлора (НРТ) [1–5]. В двумерном случае уравнения движения ускоряемого тонкого слоя в лагранжевом представлении могут быть линейными и при больших смещениях и допускают аналитические решения [1]. В трехмерном случае эти уравнения оказываются нелинейными и их аналитическое исследование затруднено, поэтому для анализа используются численные методы [3].

В настоящей работе уравнения движения ускоряемого тонкого слоя в трехмерном случае с лагранжевыми независимыми переменными с помощью линеаризации сводятся к линейной системе, которая исследуется аналитически. Полученные решения описывают нелинейную эволюцию контактной границы в пространстве наблюдателя. Выявлена зависимость эволюции контактной границы от безразмерных параметров, определяющих начальные данные. Эта зависимость, как показывают численные расчеты в приближении сжимаемой жидкости, проявляется и в случаях слоя конечной толщины и полупространства идеальной сжимаемой жидкости и должна учитываться при анализе НРТ в более полной постановке, например в рамках трехмерных гидродинамических кодов.

Уравнения движения ускоряемого тонкого жидкого слоя при наличии трехмерных возмущений можно представить в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -a \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right), & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -a \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - y, & u &= \frac{p}{\rho h_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты пространства наблюдателя; t — время; ξ, η — лагранжевы координаты частиц слоя, в качестве которых выбраны их начальные координаты x_0, y_0 ; ρ — плотность; h_0 — начальная толщина слоя; p — приложенное «снизу» внешнее давление; g — массовое ускорение, направленное противоположно оси Oz . Слой равной толщины занимает положение $z = 0$, на которое накладываются начальные возмущения. Система уравнений (1) является следствием законов сохранения массы и импульса частиц слоя.

В приближении тонкого слоя определяются смещения элементов только срединной поверхности слоя. Это позволяет понизить пространственную размерность задачи. Если смещения лагранжевых элементов срединной поверхности слоя определены, это приводит к изменению поверхностной плотности массы σ относительно ее начальной величины σ_0 [3]:

$$\sigma = \sigma_0 \left| \frac{dr}{d\xi} \times \frac{dr}{d\eta} \right|^{-1}.$$

Имеем $\sigma = \rho h$ (ρ — текущая плотность элемента слоя, h — толщина). Если считать $\rho = \rho_0$, то это соотношение позволяет приближенно оценить текущую толщину h частиц слоя.

Пусть $a = g = \text{const}$. Полагая производные от смещений по лагранжевым координатам малыми по сравнению с единицей, после линеаризации получим систему уравнений относительно переменных (ξ, η)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -a \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -a \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right), \quad x_1 = x - \xi, \quad y_1 = y - \eta. \quad (2)$$

Рассмотрим решение системы (2) вида

$$x_1(\xi, \eta, t) = A_1(t) \cos(k\xi) \cos(n\eta), \quad y_1(\xi, \eta, t) = A_2(t) \sin(k\xi) \sin(n\eta), \\ z(\xi, \eta, t) = A_3(t) \sin(k\xi) \cos(n\eta),$$

где k, n — волновые числа гармонических возмущений в направлении осей Ox и Oy ; $k = 2\pi/\lambda_1$; $n = 2\pi/\lambda_2$; λ_1, λ_2 — соответствующие длины волн. Для функций $A_i(t)$ имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} = -akA_3, \quad \frac{d^2 A_2}{dt^2} = anA_3, \quad \frac{d^2 A_3}{dt^2} = -akA_1 + anA_2,$$

откуда $d^4 A_3(t)/dt^4 = a^2(k^2 + n^2)A_3(t)$.

Аналогичное соотношение получено для трехмерных возмущений полупространства несжимаемой жидкости [5]. Дисперсионное уравнение в трехмерном случае оказывается, как и в двумерном [1], уравнением четвертого порядка:

$$\omega^4 = a^2(k^2 + n^2) = a^2 k^2 (1 + m^2), \quad m = n/k, \quad k \neq 0.$$

Решения основной линеаризованной системы (2) в зависимости от задания начальных смещений и скоростей весьма разнообразны и определяются несколькими безразмерными параметрами. Можно показать, что начальным смещениям слоя (и вызванным ими изменениям в толщине частиц слоя)

$$x(0) = \xi + r_1 A \cos(k\xi) \cos(n\eta), \quad y(0) = \eta + r_1 m A \sin(k\xi) \sin(n\eta), \quad z(0) = A \sin(k\xi) \cos(n\eta) \quad (3)$$

и нулевым начальным скоростям отвечает решение системы (2):

$$x = \xi + 0,5[-P_1 \text{ch}(\omega t) + P_2 \cos(\omega t)] A (m^2 + 1)^{-0,5} \cos(k\xi) \cos(n\eta), \\ y = \eta - 0,5[P_1 \text{ch}(\omega t) - P_2 \cos(\omega t)] A m (m^2 + 1)^{-0,5} \sin(k\xi) \sin(n\eta), \quad (4) \\ z = 0,5[P_1 \text{ch}(\omega t) + P_2 \cos(\omega t)] A \sin(k\xi) \cos(n\eta)$$

($P_1 = 1 - r_1(m^2 + 1)^{0,5}$, $P_2 = 1 + r_1(m^2 + 1)^{0,5}$). Начальные амплитуды смещений по направлениям x и y в этом частном решении равны по абсолютной величине соответственно $r_1 A$ и $r_1 m A$.

Общий вид возмущенной поверхности слоя при $t = 4$, $n = m = 1$, $r_1 = -1$, $a = 1$, $A = 0,01$ представлен на рис. 1. При изображении поверхности точка наблюдения выбрана так, чтобы в увеличенном виде показать отличие между верхними и нижними вершинами.

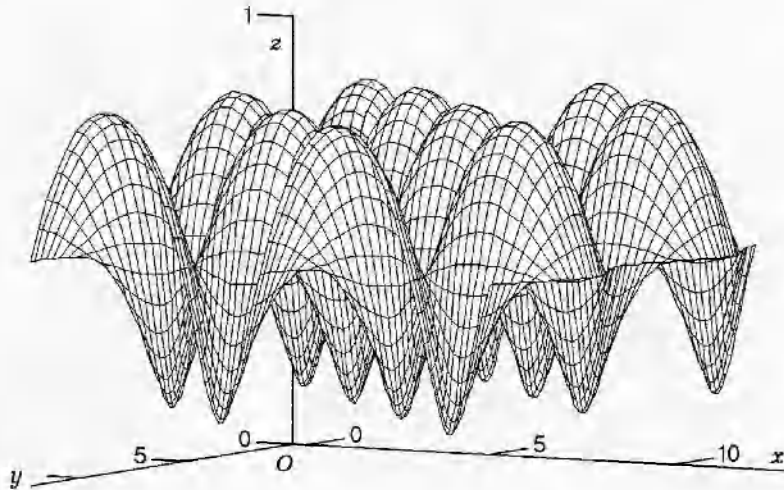


Рис. 1. Возмущенная поверхность слоя

Узкие и острые струи, движущиеся вниз, чередуются с широкими пологими пузырями, движущимися вверх с такой же скоростью.

Параметры r_1 и A определяют форму и амплитуду начального возмущения. При $n = m = 0$ в сечении плоскостью xz имеем кривую $x = \xi + r_1 A \cos(k\xi)$, $z = A \sin(k\xi)$, которую назовем гиперциклоидой. Гиперциклоида несимметрична относительно «верха» и «низа», что существенно сказывается на эволюции возмущений. При $r_1 < 0$ нижние вершины более острые, а верхние более пологие, при $r_1 > 0$ — наоборот. Если $r_1 = 0$, то форма возмущенного слоя является синусоидальной.

При отсутствии возмущений в форме слоя начальным скоростям

$$V_x(0) = r_2 B \cos(k\xi) \cos(n\eta), \quad V_y(0) = -r_2 m B \sin(k\xi) \sin(n\eta), \quad V_z(0) = B \sin(k\xi) \cos(n\eta) \quad (5)$$

отвечает решение, аналогичное (4), где $\text{ch}(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, r_1 , A следует заменить на $\text{sh}(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, r_2 , B/ω .

Данные решения включают как экспоненциально растущие решения, так и ограниченные по амплитуде вдоль оси Oz . Ограниченные решения имеют место при равенстве нулю коэффициента при $\text{ch}(\omega t)$ или $\text{sh}(\omega t)$ в третьих уравнениях соответствующих систем. Тогда $r_1 \sqrt{m^2 + 1} = 1$. При $m = 1$ ($k = n$) параметр $r_1 = 1/\sqrt{2}$. Заметим, что для двумерных возмущений ($m = n = 0$) ограниченные решения имеют место при $r_1 = 1$, а решения, отвечающие $r_1 = 1/\sqrt{2}$, являются экспоненциально растущими. В этом случае введение возмущений по второму направлению стабилизирует суммарное возмущение. Отношение q инкрементов роста трех- и двумерных возмущений зависит от отношения волновых чисел: $q = \sqrt[3]{1 + m^2}$. При $k = n$ инкремент роста трехмерных возмущений в 1,2 раза больше, чем двумерных. Если $r_1 \sqrt{m^2 + 1} > 1$, то начальное возмущение со временем меняет свою фазу.

Получены также решения, отвечающие заданию начальных возмущений как в форме слоя (3), так и в начальных скоростях (5). Эволюция таких возмущений определяется наряду с r_1 , r_2 безразмерным параметром $r_3 = B/(A\omega)$.

Экспоненциальному росту амплитуды возмущений могут способствовать два фактора:

1) касательное к контактной границе смещение частиц жидкости (их натекание в районы движущихся вниз струй и отток от движущихся вверх пузырей);

2) изменение поля давления, вызванное деформацией контактной границы (изолинии давления по постановке задачи следуют за деформируемой контактной границей).

Для различных начальных условий эти факторы могут как усиливать, так и ослаблять друг друга. Последнее характерно, например, для двумерных возмущений в случае $r_1 = 1$, когда возмущенный слой в начальный момент имеет вид циклоиды остриями вверх. При этом возмущения в форме слоя, близкие к синусоидальным, компенсируются действующими в противофазе возмущениями в толщине слоя. Ограниченные колебательные решения возможны и при задании начальных возмущений в скоростях.

При смене знака ускорения в процессе движения «неустойчивая» циклоида переходит в «устойчивую» и наоборот. Этим, возможно, объясняется, что в экспериментах [6] возмущения пластины, возникшие на стадии ускорения ее продуктами взрыва, на стадии торможения пластины воздухом растут очень медленно или вообще не растут.

Остановимся на случае импульсного ускорения тонкого слоя. Для начальных данных (3) решение примет вид

$$\begin{aligned} x &= \xi + (r_1 - kVt)A \cos(k\xi) \cos(n\eta), & y &= \eta + (-r_1m + nVt)A \sin(k\xi) \sin(n\eta), \\ z &= (1 - r_1kVt - r_1mnVt)A \sin(k\xi) \cos(n\eta) + Vt \end{aligned} \quad (6)$$

($V = J/\rho h_0$, J — величина ударного импульса на единицу площади). Скорость роста амплитуды возмущения по оси Oz $A_3(t)$ на острие возмущения для $\sin(k\xi) = -1$, $\cos(n\eta) = 1$ равна $dA_3/dt = AVr_1k(1 + m^2)$. При $r_1 \neq 0$ амплитуда возмущения растет линейно, при $r_1 = 0$ она постоянна. Из (6) следует отличие в динамике возмущений при смене знака r_1 , т. е. расположения остриев относительно направления ускорения.

Если величина $a = p/\rho h_0$ имеет, в свою очередь, малые возмущения, то это вносит существенные особенности в динамику слоя. Пусть $a = a_0 + \Delta a$ ($a_0 = \text{const}$, Δa — малая величина). Тогда основная линеаризованная система (2) примет вид

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -a_0 \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a_0 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{\partial y_1}{\partial \eta} \right) + \Delta a. \quad (7)$$

Зададим возмущения ускорения $\Delta a = a_0 r_m \sin(k\xi) \cos(n\eta)$ (r_m — безразмерный коэффициент), возмущения в форме слоя — в виде (3), нулевые начальные скорости частиц слоя и получим решения системы (7), аналогичные (4). В частности,

$$z = 0,5[(AP_1 + r_m P) \text{ch}(\omega t) + (AP_2 - r_m P) \cos(\omega t)] \sin(k\xi) \cos(n\eta),$$

где $P = k^{-1}(m^2 + 1)^{-0,5}$.

Синусоидальные возмущения в форме слоя ($r_1 = 0$) при возмущении в ускорении (толщине слоя) с $r_m = Ak^{-1}(m^2 + 1)^{-0,5}$ растут в два раза быстрее, чем в случае слоя равной толщины.

Приведенные выше аналитические решения линеаризованной системы (2) для малых начальных возмущений хорошо согласуются с численными расчетами динамики слоя в наиболее полной постановке трехмерной лагранжевой газодинамики идеальной сжимаемой жидкости. В разностной схеме применяется описанный в [7] подход, когда в качестве лагранжевых координат берутся координаты частиц жидкости при $t = 0$. В качестве тестовых для численной методики использовались расчеты нелинейной эволюции двумерных возмущений тонкого слоя, расчетные зависимости практически совпадают с аналитическими результатами работы [1].

Аналитическая и расчетная зависимости амплитуды трехмерных возмущений от времени на сетке $4 \times 32 \times 32$ для случая $n = k = 1$ при задании начальных возмущений в скоростях ($r_2 = -1$) представлены на рис. 2 (кривые 1 и 2 соответственно). Полагаем

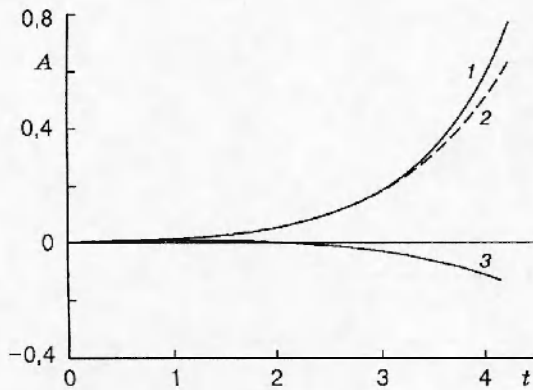


Рис. 2

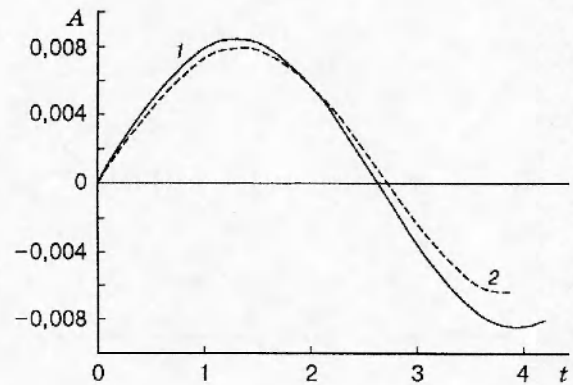


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость амплитуды возмущений от времени при задании начальных возмущений в скоростях:

1, 3 — аналитические ($r_2 = -1, r_2 = 1$); 2 — расчетная ($r_2 = -1$)

Рис. 3. Зависимость амплитуды ограниченного трехмерного возмущения ($r_2 = 1/\sqrt{2}$) от времени:

1 — аналитическая, 2 — расчетная

$a = 1$, начальная толщина слоя $h_0 = 0,1$. Уравнение состояния материала в расчетах имеет вид

$$p = c^2(\rho - \rho_0), \quad (8)$$

где p — давление; ρ — плотность; $c = 10,0$; $\rho_0 = 7,8$. Результаты расчетов в рамках трехмерной газодинамики подтверждают, что при $n = k = 1$ ограниченным при НРТ слоя равной толщины является возмущение с $r_2 = 1/\sqrt{2}$ (рис. 3). Расчетная зависимость экспоненциального роста амплитуды возмущений от времени для $r_2 = -1$ для начальных моментов времени практически совпадает с аналитической. Численные зависимости роста амплитуды возмущений от времени для дву- и трехмерных возмущений приведены на рис. 4. Они совпадают с соответствующими аналитическими данными.

Проводились также расчеты в упрощенной постановке, как и в [3], с непосредственной аппроксимацией нелинейной системы (1), а не полной системы уравнений газодинамики. Результаты также подтверждают полученные аналитические соотношения.

Таким образом, влияние начальных данных на скорость роста возмущений тонкого слоя весьма велико. Даже если инкремент роста возмущений при варьировании начальных данных не меняется, это влияние может проявляться через значительное изменение предэкспоненциального множителя. Уменьшить скорость роста возмущений в форме слоя можно, задавая соответствующие компенсирующие их возмущения в толщине.

Проведенные исследования для тонкого слоя важны и для более сложной задачи о НРТ контактной границы толстого слоя и полупространства идеальной сжимаемой жидкости. Здесь также возможны ограниченные и меняющие фазу возмущения, а определенные выше для тонкого слоя безразмерные параметры, характеризующие начальные данные, важны и в этих случаях. Подтверждением этому служат результаты трехмерных расчетов в приближении идеальной сжимаемой жидкости для случая толстого слоя с толщиной $h = 5$, сравнимой с длиной волны возмущения. Результаты расчетов на сетке $25 \times 17 \times 17$ представлены на рис. 5. В начальный момент задавалось условие статического равновесия

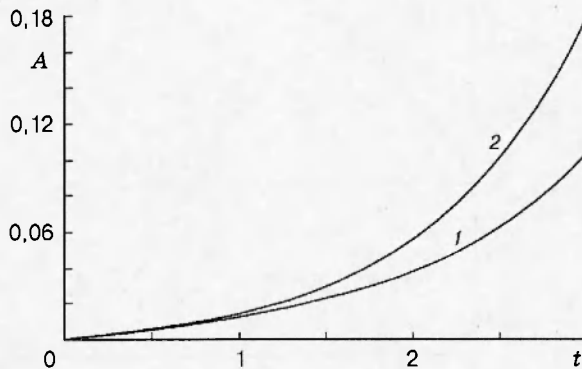


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость роста амплитуды дву- и трехмерных возмущений слоя от времени при $r_2 = -1$:

1 — $k = 1, n = 0$; 2 — $n = k = 1$

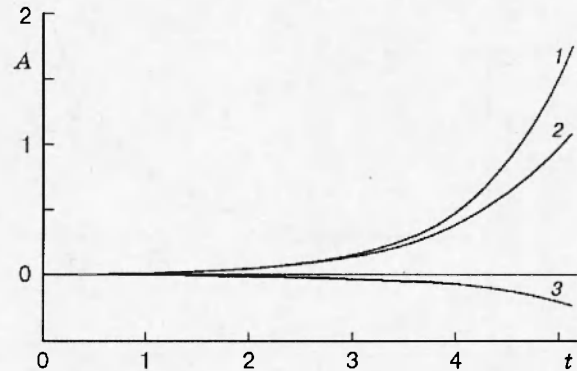


Рис. 5

Рис. 5. Развитие возмущений в случае толстого слоя:

1 — струи, 2 — пузыри ($r_2 = -1$); 3 — струи ($r_2 = 1$)

элементов слоя в рамках модели сжимаемой жидкости с уравнением состояния вида (8) при $c = 4,6$, $\rho_0 = 7,8$. Начальные возмущения в скоростях с $k = 1$, $m = 1$ задавались экспоненциально спадающими по глубине как для несжимаемой жидкости [5].

Согласно расчетам возмущения с $r_2 = -1$ экспоненциально растут, возмущения с $r_2 = 1$ меняют свою фазу и далее экспоненциально растут, возмущения с $r_2 = 1/\sqrt{2}$ в течение времени расчета практически не изменяются.

Скорость роста пузырей, всплывающих вверх, в начальные моменты времени близка по абсолютной величине к скорости струй, направленных вниз, так же как для тонкого слоя. Но в дальнейшем скорость роста пузырей в толстом слое (в отличие от тонкого) становится заметно меньше скорости струй.

Таким образом, для толстого слоя сжимаемой идеальной жидкости при задании возмущений в скоростях возможны различные пути эволюции возмущений: как экспоненциально растущие, так и ограниченные решения, случаи, когда возмущение меняет свою начальную фазу.

Однако при задании начальных возмущений в форме контактной границы (без изменения начальных плотностей жидкости), как показывают результаты расчетов, все возмущения экспоненциально растут; скорость их роста незначительно зависит от параметра r_1 . Здесь можно проследить определенные аналогии с рассмотренным выше случаем задания возмущений в толщине тонкого слоя.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00043а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ott E. Nonlinear evolution of Rayleigh — Taylor instability of a thin layer // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29, N 21. P. 1429–1432.

2. Низовцев П. Н., Раевский В. А. Приближенные аналитические решения задачи о Рэлей — Тейлоровской неустойчивости в прочных средах // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Теорет. и прикл. физика.* 1991. Вып. 3. С. 11–17.
3. Manheimer W., Colombant D., Ott E. Three-dimensional, nonlinear evolution of the Rayleigh — Taylor instability of a thin layer // *Phys. Fluids.* 1984. V. 27, N 8. P. 2164–2175.
4. Гасилов В. А., Головизнин В. М., Таран М. Д. и др. О численном моделировании Рэлей — Тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости. М., 1979 (Препр. / АН СССР. ИПМ; № 70).
5. Волкова Р. А., Круглякова Л. В., Михайлова Н. В. и др. О моделировании Рэлей — Тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости в трехмерной постановке. М., 1985 (Препр. / АН СССР. ИПМ; № 86).
6. Иванов А. Г., Новицкий Е. З., Огородников В. А., Пинчук С. Ю. Разгон пластин до гиперзвуковых скоростей. Неустойчивость при торможении о воздух // *ПМТФ.* 1982. № 2. С. 90–94.
7. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.

*Поступила в редакцию 22/VIII 1996 г.,
в окончательном варианте — 13/VI 1997 г.*
