УДК 532.532

# О РЕГУЛЯРНЫХ ПОДМОДЕЛЯХ ТИПА (1,2) И (1,1) УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Регулярные частично инвариантные решения типов (1,2) и (1,1) для уравнений газовой динамики представлены двумя классами: для первого инвариантной независимой переменной является время — барохронные решения, для второго инвариантная переменная непременно зависит от пространственных координат. Барохронная подмодель уравнений газовой динамики, как и пассивная подсистема для решений второго типа, интегрируется в конечном виде. В последнем случае инвариантная подсистема сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению и квадратурам. Интегрирование подмоделей демонстрируется на ряде примеров. Описаны общие свойства барохронных движений газа: прямолинейность траекторий частиц газа, возможность коллапса плотности на многообразии, расслоение пространства событий на страты.

**Введение**. Частично инвариантные решения (ЧИР) [1] находят широкое применение в различных областях механики и математической физики. Они являются более общим объектом по сравнению с инвариантными решениями, но их отыскание связано с бо́льшими трудностями. Оказывается возможным выделить класс регулярных частично инвариантных решений (РЕЧИР) [2], которые, обладая широтой ЧИР, допускают относительно простое описание. В [3] перечислены все 100 представителей РЕЧИР для уравнений газовой динамики (УГД) с произвольным уравнением состояния и описаны отдельные классы РЕЧИР. В [4] дано описание 12 РЕЧИР типа (2,1). Интересному и содержательному классу решений уравнений газовой динамики — барохронным — посвящены работы [5, 6].

В настоящей работе на отдельных примерах демонстрируется общий метод, которым исследуются РЕЧИР типов (1,2) и (1,1). Их полное описание ввиду большого объема будет дано в других работах. Тем самым завершается аналитическое описание РЕЧИР для УГД с уравнением состояния общего вида.

**1. Общие свойства барохронных решений**. Решения УГД, для которых давление есть функция только времени ($p = p(t)$), называются *барохронными* [3]. Барохронные решения, для которых и плотность есть функция только времени ($\rho = \rho(t)$), являются РЕЧИР типа (1,3). Им отвечают изэнтропические движения газа. Специальные барохронные РЕЧИР имеют типы (1,2), (1,1), а в случае инвариантных решений — (1,0).

Барохронные решения описывают инерционные движения газа, являющиеся аналогами простейших механических движений. Они представляют большой интерес как источник нетривиальных математических задач, сочетающих теорию отображений, геометрию и алгебру. В то же время физика явления, описываемая этими решениями, содержательна и весьма сложна. Так, изучение существования и поведения решения в целом для сплошной среды без давления приводит к мерозначным решениям [7, 8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01780) и программы «Ведущие научные школы» (код проекта 96-15-96283).

Можно дать общее представление решений УГД для барохронных движений в виде конечных формул [5, 6]. Формулы общего решения задают компоненты скорости $\boldsymbol{u}$ как неявные функции всех независимых переменных $t$, $\boldsymbol{x}$ и содержат определенное число произвольных функций, зависящее от алгебраической структуры матрицы Якоби $J = \partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$. Плотность находится явно как рациональная функция времени.

Для барохронных движений начальное поле скоростей $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ имеет специальный вид: алгебраические инварианты его матрицы Якоби $J_0 = \partial \boldsymbol{u}_0/\partial \boldsymbol{x}$ — постоянные числа. Полное описание таких векторных полей произвольной размерности дается в терминах систем, определяющих $\boldsymbol{u}_0$ как неявную функцию.

Решение $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ строится по начальному полю $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ простой подстановкой.

Можно применить подход, основанный на специальных свойствах матрицы $J$, и для интегрирования других классов РЕЧИР. При этом определяющим фактором оказывается зависимость собственных значений $J$ только от одной инвариантной независимой переменной. Такой подход демонстрируется ниже на двух подмоделях.

Барохронные движения газа имеют следующие общие свойства:

1. Траектории движения частиц газа в барохронном движении являются *прямыми линиями*. Каждая частица движется по прямой, положение которой в пространстве и скорость движения по ней определяются начальными данными.

2. Для трехмерных барохронных движений всегда, а для двумерных в некоторых случаях формулы решения описывают *коллапс плотности* в конечный момент времени: при $t = t_*$, $\rho = \infty$ на некотором многообразии, размерность которого меньше размерности движения (поверхность, линия, точка).

Вопросы о поведении газа вблизи многообразия коллапса и продолжении решения за коллапс остаются на сегодня открытыми.

3. Пространство событий расслаивается на *слои-многообразия*, которые отображаются на многообразие коллапса нерегулярным образом (с уменьшением размерности).

Перечисленные свойства выводятся из формул общего решения для барохронных движений [5]. Проиллюстрируем их на двух примерах, в которых видна также бóльшая общность ЧИР, чем инвариантных решений того же ранга: они определены с функциональным произволом.

Пример 1. Инвариантное (тип (1,0)) барохронное решение относительно подалгебры $L_3 = \{t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w, t\partial_x + \partial_u + k(y\partial_z - z\partial_v + v\partial_w - w\partial_v)\}$, где $k$ — вещественный параметр, задается формулами

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \frac{y + b\cos\varphi}{t}, \quad w = \frac{z + b\sin\varphi}{t}, \quad \varphi = \frac{kx}{t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{t^3}, \quad \rho_0, b = \mathrm{const}. \tag{1.1}$$

Уравнения траекторий имеют вид

$$x = t\xi, \qquad y = t\eta + (t-1)b\cos k\xi, \qquad z = t\zeta + (t-1)b\sin k\xi,$$

где $(x, y, z)\Big|_{t=1} = (\xi, \eta, \zeta)$.

Коллапс плотности наступает при $t_* = 0$ на плоскости $x = 0$, частицы приходят на окружность

$$y^2 + z^2 = b^2 \tag{1.2}$$

в этой плоскости. В каждую точку $(y, z)$ окружности (1.2) приходят частицы с плоскостей $\xi = \mathrm{const}$, причем для $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_0 + 2n\pi/k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в одну и ту же точку $(y, z)$.

Пример 2. РЕЧИР типа (1,1) относительно подалгебры $L_4 = \{\partial_x, t\partial_x + \partial_u, t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w\}$ имеет вид

$$u = \frac{Cx + U(y/t, z/t)}{1 + C(t-1)}, \quad v = \frac{y}{t}, \quad w = \frac{z}{t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{t^2(1 + C(t-1))}, \quad C, \rho_0 = \mathrm{const}, \tag{1.3}$$

где $U$ — произвольная функция своих аргументов. Коллапс плотности имеет место при $t_* = 1 - C^{-1}$ на поверхности в $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{x})$, задаваемой уравнением

$$Cx + U(y/t_*, z/t_*) = 0. \tag{1.4}$$

Поскольку $U$ — произвольная функция, то уравнение (1.4) задает поверхность весьма общего вида.

Как уже отмечалось, решения (1.1) и (1.3) являются изэнтропическими: $S = S_0 = \text{const}$, давление определяется из уравнения состояния $p = F(\rho)$ с произвольной функцией $F$.

**2. Пример барохронного решения типа (1,2)**. Рассмотрим подмодель, порожденную подалгеброй $L_5 = \{\partial_y, \partial_z, t\partial_x + \partial_u, t\partial_y + \partial_v, \partial_x + t\partial_z + \partial_w\}$. Она имеет инварианты $t$, $w + tu - x$, $\rho$, $p$, лишние функции $u$, $v$. Представление решения имеет вид

$$u = u(t, \boldsymbol{x}), \qquad v = v(t, \boldsymbol{x}), \qquad w = x - tu.$$

Построим решение по начальным данным при $t = 0$

$$u_0 = u_0(\boldsymbol{x}), \qquad v_0 = v_0(\boldsymbol{x}), \qquad w_0 = x. \tag{2.1}$$

Случай $t_0 \neq 0$ приводится к (2.1) путем замены независимых переменных и скоростей (остальные переменные остаются неизменными):

$$Z = z + t_0 x, \qquad W = w + t_0 u. \tag{2.2}$$

Замена (2.2) сохраняет инварианты матрицы $J_0$.

Матрица Якоби начальных данных (2.1) $J_0 = \partial \boldsymbol{u}_0 / \partial \boldsymbol{x}$ имеет инварианты

$$h_0 = u_{0x} + v_{0y}, \quad k_0 = u_{0x} v_{0y} - u_{0y} v_{0x} - u_{0z}, \quad m_0 = u_{0y} v_{0z} - u_{0z} v_{0y}. \tag{2.3}$$

Система (2.3) линеаризуется путем замены переменных подобно канонической системе для двумерных барохронных движений [3]. В отличие от упомянутой системы, содержащей две функции двух независимых переменных, система (2.3) содержит три уравнения для двух функций $(u_0, v_0)$ трех переменных $(x, y, z)$ и является переопределенной.

За новые независимые переменные примем $(x, z, u_0)$, за новые функции — $(y, v_0)$, так что

$$y = Y(x, z, u_0), \qquad v_0 = V(x, z, u_0), \qquad Y_{u_0} \neq 0. \tag{2.4}$$

Дифференцируя выражения (2.4) по переменным $(x, y, z)$, получим формулы для пересчета производных

$$u_{0x} = -\frac{Y_x}{Y_u}, \quad u_{0y} = \frac{1}{Y_{u_0}}, \quad u_{0z} = \frac{Y_z}{Y_{u_0}}, v_{0x} = V_x - \frac{V_{u_0} Y_x}{Y_{u_0}}, \quad v_{0y} = \frac{V_{u_0}}{Y_{u_0}}, \quad v_{0z} = V_z - \frac{V_{u_0} Y_z}{Y_{u_0}}. \tag{2.5}$$

После подстановки выражений (2.5) в систему (2.3) получим линейную систему относительно функций $Y$ и $V$

$$V_{u_0} - Y_x = h_0 Y_{u_0}, \quad -V_x + Y_z = k_0 Y_{u_0}, \quad V_z = m_0 Y_{u_0}. \tag{2.6}$$

Перекрестным дифференцированием можно исключить функцию $V$ и получить для функции $Y$ переопределенную систему трех линейных уравнений второго порядка. Ее можно разрешить относительно трех производных $Y$ (из шести) и получить условия совместности следующего порядка. Такого громоздкого процесса удается избежать путем удачного выбора новых переменных.

Пусть матрица $J_0$ имеет три различных вещественных собственных значения $\lambda_{k0}$ ($k = 1, 2, 3$). Остальные случаи исследуются аналогично.

Введем новые независимые переменные

$$\alpha = u_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{20}) x + \lambda_{10} \lambda_{20} z, \qquad \beta = u_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{30}) x + \lambda_{10} \lambda_{30} z, \tag{2.7}$$

$$\gamma = u_0 - (\lambda_{20} + \lambda_{30})x + \lambda_{20}\lambda_{30}z.$$

Якобиан перехода от переменных $(u_0, x, z)$ к переменным $(\alpha, \beta, \gamma)$ отличен от нуля в силу условия $\lambda_{i0} \neq \lambda_{j0}$ при $i \neq j$:

$$\Delta = \frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(u_0, x, z)} = (\lambda_{10} - \lambda_{20})(\lambda_{10} - \lambda_{30})(\lambda_{20} - \lambda_{30}) \neq 0.$$

Введем также новые функции

$$P = V - \lambda_{30}Y, \qquad Q = V - \lambda_{20}Y, \qquad R = V - \lambda_{10}Y. \tag{2.8}$$

Заметим, что они не являются независимыми. Условие их линейной зависимости будет использовано в дальнейшем.

В новых переменных (2.7), (2.8) система (2.6) принимает вид

$$\begin{gathered} P_\alpha + Q_\beta + R_\gamma = 0, \qquad (\lambda_{10} + \lambda_{20})P_\alpha + (\lambda_{10} + \lambda_{30})Q_\beta + (\lambda_{20} + \lambda_{30})R_\gamma = 0, \\ \lambda_{10}\lambda_{20}P_\alpha + \lambda_{10}\lambda_{30}Q_\beta + \lambda_{20}\lambda_{30}R_\gamma = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Определитель системы (2.9), рассматриваемой как системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно переменных $P_\alpha$, $Q_\beta$, $R_\gamma$, равен $\Delta \neq 0$. Следовательно, система (2.9) имеет только нулевое решение $P_\alpha = Q_\beta = R_\gamma = 0$.

Таким образом, согласно определению (2.8) величин $P$, $Q$, $R$

$$V - \lambda_{30}Y = \varphi_1(\beta, \gamma), \quad V - \lambda_{20}Y = \varphi_2(\alpha, \gamma), \quad V - \lambda_{10}Y = \varphi_3(\alpha, \beta). \tag{2.10}$$

Функции $P$, $Q$, $R$, а следовательно, и функции (2.10) связаны одним линейным соотношением, вытекающим из (2.8):

$$(\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_1(\beta, \gamma) + (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_2(\alpha, \gamma) + (\lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_3(\alpha, \beta) = 0. \tag{2.11}$$

Продифференцируем уравнение (2.11) по $\gamma$ и $\beta$. Затем дважды повторим эту процедуру, осуществляя циклическую перестановку переменных. В результате получим

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta\partial\gamma} = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\alpha\partial\gamma} = \frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi_1 = \varphi_1^1(\beta) + \varphi_1^2(\gamma), \quad \varphi_2 = \varphi_2^1(\alpha) + \varphi_2^2(\gamma), \quad \varphi_3 = \varphi_3^1(\alpha) + \varphi_3^2(\beta). \tag{2.12}$$

Подставим (2.12) в уравнение (2.11). Получим, что сумма трех функций, каждая из которых зависит от своего аргумента, равна нулю. Следовательно, имеет место разделение переменных и функции $\varphi_i^j$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$ связаны соотношениями

$$\begin{gathered} (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_3^1(\alpha) = b - a, \\ (\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_1^1(\beta) + (\lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_3^2(\beta) = a - c, \\ (\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_1^2(\gamma) + (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_2^2(\gamma) = c - b, \end{gathered} \tag{2.13}$$

где $a$, $b$, $c$ — произвольные числа («константы разделения»).

Вернемся к системе (2.10). Выразим из нее функции $Y$ и $V$. Для этого получим из (2.10) два линейно независимых уравнения. Первым из них будет сумма уравнений (2.10), а вторым — их линейная комбинация: в (2.10) первое уравнение умножается на $\lambda_{20}$, второе — на $\lambda_{10}$, третье — на $\lambda_{30}$. Тогда искомая система принимает вид

$$3V - h_0Y = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \qquad h_0V - k_0Y = \lambda_{20}\varphi_1 + \lambda_{10}\varphi_2 + \lambda_{30}\varphi_3. \tag{2.14}$$

Здесь $h_0$, $k_0$ — первый и второй инварианты матрицы $J_0$. Пусть имеет место регулярный случай — определитель системы (2.14) $d = h_0^2 - 3k_0 \neq 0$. В силу произвольности функций $\varphi_k$ его можно считать равным единице, введя вместо $\varphi_k$ новые функции $d^{-1}\varphi_k$.

При этом условии решения системы (2.14) имеют вид

$$Y = (2\lambda_{20} - \lambda_{10} - \lambda_{30})\varphi_1 + (2\lambda_{10} - \lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_2 + (2\lambda_{30} - \lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_3, \qquad (2.15\text{а})$$

$$V = (\lambda_{20}^2 - \lambda_{10}\lambda_{30})\varphi_1 + (\lambda_{10}^2 - \lambda_{20}\lambda_{30})\varphi_2 + (\lambda_{30}^2 - \lambda_{10}\lambda_{20})\varphi_3. \qquad (2.15\text{б})$$

В правой части формул (2.15) выделим слагаемые, зависящие только от аргументов $\alpha, \beta$ и $\gamma$ соответственно.

Покажем, что решение (2.15) зависит лишь от трех функций, каждая из которых зависит от своего аргумента. Для доказательства используются соотношения (2.13), а также то, что ввиду однородности исходной системы (2.6) ее решения $Y$ и $V$ (2.15) определены с точностью до аддитивных констант.

Выделим в формуле (2.15а) слагаемое, зависящее только от $\alpha$:

$$(2\lambda_{10} - \lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_2^1(\alpha) + (2\lambda_{30} - \lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_3^1(\alpha) =$$
$$= (\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_3^1(\alpha) - [(\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_3^1(\alpha)]. \qquad (2.16)$$

В силу первого уравнения из (2.13) выражение в квадратных скобках в (2.16) равно постоянному числу $b - a$ и, следовательно, без ограничения общности может быть опущено в формуле решения. Таким образом, в формуле (2.15а) слагаемое, зависящее от $\alpha$, имеет вид

$$f_1(\alpha) = (\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_3^1(\alpha). \qquad (2.17)$$

Выделим компоненту решения, зависящую только от $\alpha$, в формуле (2.15б) и разобьем ее на два слагаемых:

$$(\lambda_{10}^2 - \lambda_{20}\lambda_{30})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{30}^2 - \lambda_{10}\lambda_{20})\varphi_3^1(\alpha) = \lambda_3[(\lambda_{10} - \lambda_{20})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_3^1(\alpha)] -$$
$$- \lambda_1[(\lambda_{30} - \lambda_{10})\varphi_2^1(\alpha) + (\lambda_{20} - \lambda_{30})\varphi_3^1(\alpha)] = \lambda_{30} f_1(\alpha) - \lambda_{10}(b - a), \qquad (2.18)$$

где последнее равенство справедливо в силу (2.17) и первого уравнения из (2.13). Поскольку $Y$ и $V$ определены с точностью до аддитивных констант, постоянное слагаемое в (2.18) можно опустить.

Аналогичные формулы имеют место и для компонент решения $V$ и $Y$, зависящих только от $\beta$ и $\gamma$. Таким образом, справедлива

**Лемма.** *Общее решение системы* (2.16) *имеет вид*

$$Y = f_1(\alpha) + f_2(\beta) + f_3(\gamma), \qquad V = \lambda_{30} f_1(\alpha) + \lambda_{20} f_2(\beta) + \lambda_{10} f_3(\gamma), \qquad (2.19)$$

*где* $f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *— произвольные функции своих аргументов.*

Компоненты скорости $(u, v, w)$ как функции всех переменных получаются из (2.4) подстановкой в правые части выражений (2.19), стиранием нулей при $u_0, v_0$ и подстановкой $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{u}$. Решение $(u, v)$ определяется из полученной системы неявным образом.

**3. Подмодели небарохронного вида**. Согласно работе [2] для УГД с уравнением состояния общего вида имеется 3 таких РЕЧИР типа (1,2) и 14 РЕЧИР типа (1,1). Первые порождаются 5- и 6-мерными, а вторые — 4-мерными подалгебрами из $\Theta L_{11}$. Все эти подалгебры содержат операторы, преобразующие время $t$.

РЕЧИР такого вида имеют инвариантную независимую переменную $\lambda$, которая является функцией только исходных независимых переменных $\lambda = \lambda(t, \boldsymbol{x})$, причем $\nabla\lambda \neq 0$. Переменные $p$, $\rho$ и $S$ также являются инвариантами подалгебр. Кроме того, для подмоделей с дефектом $\delta = 2$ одна, а для подмоделей с $\delta = 1$ две компоненты скорости выражаются через инварианты. Оставшиеся компоненты скорости (две или одна) являются лишними функциями.

Все эти подмодели имеют общую структуру и интегрируются по единой схеме, включающей следующие этапы:

I. Инвариантная подсистема после введения вспомогательной функции сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению для этой функции. В дальнейшем оно называется уравнением (В). Все инвариантные функции восстанавливаются по решению (В) квадратурами. Уравнение (В) есть уравнение импульсов для инвариантной компоненты скорости. Для некоторых подмоделей его можно проинтегрировать и получить инвариантную компоненту интеграла Бернулли. Последний является конечным соотношением, связывающим эту компоненту и энтальпию газа. Поскольку инвариантная компонента скорости и энтальпия выражаются через вспомогательную функцию и ее производные, то после подстановки в уравнение (В) этих представлений оно становится обыкновенным дифференциальным уравнением для вспомогательной функции.

II. Переопределенная система, точнее, ее пассивная часть подобна системе, описывающей двумерные барохронные движения газа, и интегрируется аналогично ей [3].

A. Рассмотрим данную схему на примере подмодели типа (1,2), порожденной подалгеброй $L_5 = \{\partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, t\partial_z + \partial_w, y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v + \partial_t\}$. Она имеет инварианты $(x, u, \rho, p, S)$, лишние функции $(v, w)$.

Представление решения имеет вид

$$v = v(t, \boldsymbol{x}), \qquad w = w(t, \boldsymbol{x}), \qquad (u, \rho, p, S) \mid x.$$

Уравнения подмодели записываются следующим образом:

$$uu' + \rho^{-1}p' = 0, \tag{3.1а}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z = 0, \tag{3.1б}$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0, \tag{3.1в}$$

$$u\rho' + \rho(u' + v_y + w_z) = 0, \tag{3.1г}$$

$$uS' = 0, \tag{3.1д}$$

где штрих означает производную по $x$. Согласно уравнению (3.1д) для энтропии имеем две возможности.

1. Пусть $u = 0$. В этом случае из (3.1а) имеем $p = p_0 = \mathrm{const}$. Тогда система (3.1) описывает двумерные изобарические движения газа [9]. Соответствующее решение может быть записано в виде

$$u = 0, \tag{3.2а}$$

$$z = (y - tv)f_1'(x, v) + f_2(x, v) + f_1(x, v), \tag{3.2б}$$

$$w = f_1(x, v), \tag{3.2в}$$

$$\rho = R(x, v, y - tv), \tag{3.2г}$$

$$S = H(x, v, y - tv), \tag{3.2д}$$

$$p_0 = F(\rho, S), \tag{3.2е}$$

где $f_1$, $f_2$, $R$, $H$ — произвольные функции своих аргументов. Две последние связаны соотношением (3.2е) — изобарическим уравнением состояния. Компонента скорости $v$ задается соотношением (3.2б) как неявная функция переменных $(t, x, y, z)$.

Данное решение представляет собой двойную волну [9], поскольку все искомые функции зависят от двух лагранжевых инвариантов $v, y - tv$, являющихся функционально независимыми по переменным $(y, z)$ при $v_z \neq 0$.

2. Пусть $u \neq 0$. Тогда из (3.1д) имеем $S = S_0 = \text{const}$. Подмодель описывает изэнтропическое движение газа. Введем лагранжеву переменную

$$\xi = t - \int u^{-1}\,dx.$$

Тогда уравнения (3.1б)–(3.1г) преобразуются в стандартную систему

$$v_t + vv_y + wv_z = 0, \quad w_t + vw_y + ww_z = 0, \quad v_y + w_z = h(x), \tag{3.3}$$

где

$$h = -(u(\ln\rho)' + u'). \tag{3.4}$$

Система (3.3) подобна системе, описывающей двумерные барохронные движения газа [3], и интегрируется аналогично ей. Условиями совместности системы (3.3) являются уравнения

$$Dh + h^2 = 2k, \qquad Dk + hk = 0, \tag{3.5}$$

где $h = \operatorname{sp} J$, $k = \det J$ и $D = u\partial_x$.

Введем новую независимую переменную $X = X(x)$:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{u}, \tag{3.6}$$

так что $X = \displaystyle\int \frac{dx}{u(x)}$. Тогда уравнения (3.5) в точности совпадают с условиями совместности уравнений двумерных барохронных движений (роль $t$ играет $X$).

Как известно [6], уравнения (3.5) имеют общее решение

$$h = Q_X/Q, \tag{3.7а}$$

$$k = Q_{XX}/2Q, \tag{3.7б}$$

где $Q = 1 + h_0X + k_0X^2$, $h_0$, $k_0 = \text{const}$.

Собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(x)$ $(k = 1, 2)$ матрицы $J$ удовлетворяют уравнениям $\lambda_{kX} + \lambda_k^2 = 0$, $k = 1, 2$, имеющим решения

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{k0}}{1 + \lambda_{k0}X}, \quad \lambda_{k0} = \text{const}, \quad k = 1, 2. \tag{3.8}$$

При этом $\lambda_1 + \lambda_2 = h$, $\lambda_1\lambda_2 = k$ и $\lambda_{10} + \lambda_{20} = h_0$, $\lambda_{10}\lambda_{20} = k_0$. В зависимости от знака дискриминанта $d_0 = h_0^2/4 - k_0$ имеем соответствующее представление решения системы (3.3) [5].

Так, если $d_0 > 0$, матрица $J_0$ имеет два различных вещественных собственных значения. В этом случае функции $(v, w)\big|(t, X, y, z)$ определяются неявным образом из системы уравнений

$$F_k\left(y - \frac{1}{\lambda_k}v, z - \frac{1}{\lambda_k}w, i - X\right) = 0, \qquad k = 1, 2 \tag{3.9}$$

для произвольных функций $F_k$, таких что их градиенты по первой паре переменных линейно независимы. Это условие гарантирует локальную разрешимость системы (3.9) относительно $(v, w)$. Поскольку уравнения (3.9) можно разрешить относительно одного из аргументов, то полученное решение зависит от двух произвольных функций двух переменных.

Оставшаяся инвариантная подсистема, состоящая из уравнений (3.1а), (3.4), (3.5) (или (3.7)), сводится к уравнению (В) (3.1а) и квадратурам. Уравнение неразрывности (3.4) в терминах переменной $X$ интегрируется в явном виде. Действительно,

$$u(\ln\rho)_x = \frac{d\ln\rho}{dX}, \quad u_x = \frac{1}{u}\frac{du}{dX} = \frac{d\ln u}{dX}.$$

Подставляя эти выражения и представление (3.7а) для $h$ в (3.4), после интегрирования получим $\rho = R_0/uQ$, $R_0 = \mathrm{const}$. Меняя роли зависимой и независимой переменных, т. е. рассматривая $x = x(X)$, получим явную формулу для плотности

$$\rho = \frac{R_0}{(1 + h_0X + k_0X^2)x_X}. \tag{3.10}$$

Итак, все искомые функции представлены как функции переменных $(t, X, y, z)$. Компонента $u$ определяется из (3.6), $(v, w)$ — из (3.9), $\rho$ — из (3.10).

Для окончательного определения решения остается найти функцию $x = x(X)$. Она удовлетворяет уравнению импульсов (3.1а), которое интегрируется один раз и принимает вид инвариантной компоненты интеграла Бернулли

$$\frac{1}{2}u^2 + I(\rho) = b_0, \qquad b_0 = \mathrm{const}, \tag{3.11}$$

где энтальпия $I(\rho) = \int \rho^{-1}\,dp$. Уравнение (В) (3.11), в которое подставлены $u$ из (3.6) и $\rho$ из (3.10), есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $x = x(X)$.

Запишем его в развернутом виде для газа с политропным уравнением состояния $p = \rho^\gamma$:

$$(1 + h_0X + k_0X^2)^{\gamma-1}(x_X^{\gamma+1} - 2b_0x_X^{\gamma-1}) + æ = 0, \tag{3.12}$$

где $æ = 2\gamma R_0^{\gamma-1}/(\gamma - 1) = \mathrm{const}$. Для некоторых значений $\gamma$ уравнение (3.12) может быть проинтегрировано в элементарных функциях.

Б. Опишем интегрирование уравнений подмодели типа (1,1), порождаемой подалгеброй $L_4 = \{\partial_y, \partial_z, y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, t\partial_x + \partial_u + \partial_t\}$. Для этого удобно ввести полярные координаты в плоскости годографа $(v, w)$: $v = q\cos\varphi$, $w = q\sin\varphi$.

Подалгебра имеет инварианты $\lambda = x - t^2/2$, $u - t$, $q$, $\rho$, $S$, $p$, лишнюю функцию $\varphi$. Представление решения имеет вид

$$u = t + U(\lambda), \quad v = q(\lambda)\cos\varphi, \quad w = q(\lambda)\sin\varphi, \quad (\rho, S, p)\big|\lambda, \quad \varphi = \varphi(t, x, y, z).$$

Подмодель описывается уравнениями

$$UU' + 1 + \rho^{-1}p' = 0, \tag{3.13а}$$

$$\varphi_t + U\varphi_\lambda + q(\varphi_y\cos\varphi + \varphi_z\sin\varphi) = 0, \tag{3.13б}$$

$$Uq' = 0, \tag{3.13в}$$

$$U\rho' + \rho(U' + q(-\varphi_y\sin\varphi + \varphi_z\cos\varphi)) = 0, \tag{3.13г}$$

$$US' = 0, \tag{3.13д}$$

где штрих означает производную по $\lambda$.

1. Пусть $U = 0$. Тогда система (3.13) сводится к стандартной системе, подобной системе для винтовых барохронных движений газа с нулевой дивергенцией. Она интегрируется в конечном виде $u = t$, $v = q\cos\varphi$, $w = q\sin\varphi$, $(\rho, S, p) \mid \lambda$, где функции $\rho, S$ и

$p$ удовлетворяют уравнению состояния $p = F(\rho, S)$ и соотношению $p' + \rho = 0$. Функция $q = q(\lambda)$ произвольна, а функция $\varphi = \varphi(t, \lambda, y, z)$ определяется неявным образом из уравнения $y\cos\varphi + z\sin\varphi = f(\lambda, \varphi) + tq$ для произвольной функции $f$ своих аргументов.

2. Пусть $U \neq 0$. Из (3.13д) следует $S = S_0 = \mathrm{const}$, подмодель описывает изэнтропические движения газа. Из уравнения (3.13в) следует $q = q_0 = \mathrm{const}$.

Введем лагранжеву переменную $\xi = t - \int U^{-1}\,d\lambda$. Тогда уравнения (3.13б), (3.13г) образуют стандартную систему, подобную системе, описывающей винтовые барохронные движения:

$$\varphi_t + q_0(\varphi_y\cos\varphi + \varphi_z\sin\varphi) = 0, \quad -\varphi_y\sin\varphi + \varphi_z\cos\varphi = h/q_0, \tag{3.14}$$

где

$$h = -[U(\ln\rho)' + U']. \tag{3.15}$$

Условия совместности системы (3.14) имеют вид

$$Uh' + h^2 = 0. \tag{3.16}$$

а) Пусть $h \neq \mathrm{const}$. Введем функцию $\sigma = \sigma(\lambda)$, так что $\sigma = 1/h$. Тогда из (3.16) получаем представление

$$U = \frac{1}{\sigma'}, \qquad h = \frac{1}{\sigma}. \tag{3.17}$$

Уравнение неразрывности (3.15) с учетом (3.17) интегрируется в конечном виде. Получаем следующее представление для решения:

$$u = t + 1/\sigma', \quad v = q_0\cos\varphi, \quad w = q_0\sin\varphi, \quad \rho = R_0\sigma'/\sigma, \qquad S = S_0, \quad p = F(\rho), \tag{3.18}$$

где $q_0$, $R_0$, $S_0 = \mathrm{const}$. Функция $\varphi = \varphi(t, \lambda, y, z)$ в (3.18) определяется неявно соотношением $\Phi(\xi, y - q_0\sigma\cos\varphi, z - q_0\sigma\sin\varphi) = 0$ для произвольной функции $\Phi$.

Вспомогательная функция $\sigma = \sigma(\lambda)$ находится из уравнения (B) — инвариантной компоненты интеграла Бернулли, которое получается интегрированием уравнения импульсов (3.13а):

$$\frac{1}{2}U^2 + \lambda + I(\rho) = b_0, \qquad b_0 = \mathrm{const}. \tag{3.19}$$

В уравнение (3.19) следует подставить представления (3.17) для $U$ и $\rho$ через $\sigma$ и $\sigma'$. Для газа с политропным уравнением состояния $p = \rho^\gamma$ уравнение (3.19) имеет вид

$$æ\sigma'^{\gamma+1} + 2(\lambda - b_0)\sigma^{\gamma-1}\sigma'^2 + \sigma^{\gamma-1} = 0,$$

где $æ = 2\gamma R_0^{\gamma-1}/(\gamma - 1) = \mathrm{const}$.

б) Пусть $h = h_0 = \mathrm{const}$. Тогда из уравнения (3.16) следует $h_0 = 0$. В этом случае функции $U = U(\lambda), \rho = \rho(\lambda)$ определяются из интегралов расхода и Бернулли

$$\rho U = Q_0, \qquad \frac{1}{2}U^2 + \lambda + I(\rho) = b_0, \qquad b_0 = \mathrm{const}. \tag{3.20}$$

Функция $\varphi = \varphi(\lambda, \xi, y, z)$ находится неявно из уравнения $y\cos\varphi + z\sin\varphi = f(\xi, \varphi) + tq_0$ с произвольной функцией $f$ своих аргументов. Переменная $\xi$ определяется по $U = U(\lambda)$, найденной из (3.20).

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и участникам семинара «Групповой анализ дифференциальных уравнений» за содержательное обсуждение представленных результатов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
3. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 990–999.
4. **Овсянников Л. В.** Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–13.
5. **Чупахин А. П.** О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
6. **Chupakhin A. P.** Submodel of barochronic gas motions // Proc. Intern. Conf. Modern Group Analysis VI, Johannesburg, South Africa, 15–20 Jan. 1996. New Delhi; New Age. 1997. P. 55–64.
7. **Рыков Ю. Г.** Вариационный принцип для двумерной системы уравнений газовой динамики без давления // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 1. С. 165, 166.
8. **Weinan E., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G.** Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for system of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 349–380.
9. **Овсянников Л. В.** Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.


*Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.*