УДК 539.3

УТОЧНЕННАЯ ПОСТАНОВКА ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ *

В. А. Иванов[1], *В. Н. Паймушин*[2]

[1] *Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань*
[2] *Казанский государственный технический университет, 420111 Казань*

1. Введение. При прочностном анализе трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем зачастую требуется определение как низших форм свободных колебаний, достаточно точно описывающихся приближенными моделями без учета поперечного обжатия среднего слоя, так и высших форм колебаний, сопровождающихся частым волнообразованием несущих слоев и поперечными деформациями заполнителя. Для описания последних, как правило, требуется привлечение уточненных соотношений теории трехслойных оболочек с учетом поперечного обжатия заполнителя.

Из известных вариантов таких соотношений простейшими являются соотношения, базирующиеся на линейной аппроксимации перемещений в среднем слое в рамках модели трансверсально-мягкого заполнителя, детально исследованные во многих работах (в частности, в [1]). Однако точность этих соотношений представляется недостаточной при относительно малом значении параметра r, характеризующего отношение толщины несущего слоя к толщине заполнителя, и при исследовании свободных колебаний трехслойных конструкций, предварительно нагруженных статическими усилиями, вызывающими в них моментное начальное напряженно-деформированное состояние (НДС). Данный вывод вытекает из анализа результатов работ, связанных с изучением устойчивости трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем, находящихся в условиях моментного НДС. Уточненные уравнения для постановки таких задач были выведены в [2].

Следует отметить, что при малом значении параметра r и потере устойчивости с частым волнообразованием, а также при реализации высокочастотных форм колебаний решение соответствующих задач численными методами весьма затруднительно ввиду необходимости аппроксимации этих задач на весьма густых сетках. Поэтому целесообразна разработка смешанных методов их решения, базирующихся на использовании аналитических методов в комбинации с численными.

В связи с изложенным в данной работе предлагается обобщение выведенных в [3] соотношений для описания динамических процессов в трехслойных оболочках с трансверсально-мягкими заполнителями при учете конечности перемещений в несущих слоях в квадратичном приближении. Линеаризацией этих соотношений в окрестности некоторого моментного начального НДС построены уточненные уравнения для определения ди-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16516).

намических характеристик конструкции при их предварительном статическом нагружении. Путем введения упрощающих предположений, не допускающих потери числа определяющих параметров, произведена редукция этих соотношений к меньшему числу уравнений для определения собственных частот колебаний, являющихся точными для пластин и пологих оболочек и асимптотически точными для определения высших форм колебаний для непологих оболочек. Найдено приближенное аналитическое решение этих уравнений, позволяющее реализовать смешанный численно-аналитический алгоритм определения динамических характеристик.

2. Перемещения и деформации в трехслойной оболочке. Для вывода уравнений движения трехслойных оболочек общего вида воспользуемся основными соотношениями и обозначениями работы [2]. В рамках принятой в ней модели для описания процессов деформирования несущих слоев используются классические гипотезы Кирхгофа — Лява, на основании которых при среднем изгибе срединной поверхности $\sigma_{(k)}$ перемещения в k-м несущем слое будут определяться по известным формулам

$$u_i^{z(k)} = u_i^{(k)} - z_{(k)}\omega_i^{(k)}, \quad w^{z(k)} = w^{(k)}, \tag{2.1}$$

где $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ — тангенциальные перемещения и прогибы срединных поверхностей $\sigma_{(k)}$; $\omega_i^{(k)}$ — углы поворота волокон, нормальных к $\sigma_{(k)}$, вычисляемые по формулам

$$\omega_i^{(k)} = \nabla_i w^{(k)} + b_i^j u_j^{(k)}.$$

Для компонент тензора тангенциальных деформаций в рамках представления (2.1) при среднем изгибе справедливы формулы

$$\varepsilon_{ij}^{z(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} + z_{(k)}\text{æ}_{ij}^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)},$$

$$e_{ij}^{(k)} = \nabla_i u_j^{(k)} - b_{ij}w^{(k)}, \quad 2\text{æ}_{ij}^{(k)} = -\nabla_i\omega_j^{(k)} - \nabla_j\omega_i^{(k)}$$

($\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\text{æ}_{ij}^{(k)}$ — ковариантные компоненты тензоров тангенциальных деформаций и искривлений поверхностей $\sigma_{(k)}$).

Для описания НДС маложесткого среднего слоя воспользуемся уточненной моделью трансверсально-мягкого заполнителя [3]. Можно показать, что в рамках этой модели и установленных в [3] оценок для динамических процессов с частотами колебаний ω, удовлетворяющих условию

$$\omega^2 \ll G/(\rho H^2) \tag{2.2}$$

(G, ρ — характерный модуль поперечного сдвига и плотность заполнителя, H — толщина трехслойной оболочки), НДС заполнителя с принятой степенью точности описывается приведенными в [3] уравнениями равновесия. При этом для компонент вектора перемещений среднего слоя имеем

$$U_i = u_i + zd_{is}q^s - z\,\frac{\omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)}}{2h} - \frac{z^2}{4h}\,(\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)}) +$$
$$+ \Big(\frac{z^3}{3} - h^2 z\Big)\frac{\nabla_i\nabla_s q^s}{2E_3} + \Big(\frac{z^2}{2} + hz\Big)\frac{\nabla_i\beta_3}{2h} - \nabla_i\Lambda_3,$$

$$U_3 = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + z\,\frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{2h} - \frac{z^2 - h^2}{2E_3}\,\nabla_i q^i - \frac{z+h}{2h}\,\beta_3 + \lambda_3.$$

Входящие в эти формулы перемещения u_i и прогиб w точек срединной поверхности заполнителя σ через перемещения точек срединных поверхностей несущих слоев и поперечные касательные напряжения q^i могут быть выражены формулами

$$u_i = \frac{u_i^{(1)} + u_i^{(2)}}{2} - \frac{(2t_{(1)} + h)\omega_i^{(1)} - (2t_{(2)} + h)\omega_i^{(2)}}{4} + \Theta_i,$$

$$w = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + \frac{h^2}{3E_3} \nabla_i q^i + \beta,$$

следующими из кинематических условий сопряжения слоев.

3. Уравнения движения. Граничные и начальные условия. Для получения уравнений движения трехслойной оболочки воспользуемся вариационным принципом Остроградского — Гамильтона

$$\delta L = \int_{t_н}^{t_к} (\delta T - \delta I)\, dt. \tag{3.1}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы; I — полная потенциальная энергия, вариация которой определена в [3].

Для вычисления вариации кинетической энергии трехслойной оболочки, следуя [1], будем пренебрегать инерцией вращения нормальных элементов отдельных слоев относительно их срединных поверхностей, а также инерцией, связанной с деформацией поперечного сдвига и трансверсальной деформацией заполнителя по сравнению с инерцией, связанной с перемещениями срединных поверхностей. Тогда

$$T = \frac{1}{2} \iint_\sigma m_3 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] d\sigma +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \iint_{\sigma_{(k)}} m_{(k)} \left[\left(\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}\right)^2 \right] d\sigma_{(k)}, \tag{3.2}$$

где $m_{(k)}$, m_3 — массы несущих слоев и заполнителя, отнесенные к площадям соответствующих срединных поверхностей $\sigma_{(k)}$ и σ; t — время.

Согласно принципу Остроградского — Гамильтона, когда происходит сравнение состояний движения при фиксированных положениях $t_н$ и $t_к$, вариации перемещений и углов поворота для отдельных слоев оболочки при $t = t_н$ и $t = t_к$ будут обращаться в нуль. В результате этого и после традиционных преобразований и указанных выше упрощений для вариации кинетической энергии (3.2) получим выражение

$$\int_{t_н}^{t_к} \delta T\, dt = -\int_{t_н}^{t_к} \Big\{ \iint_\sigma \Big[\sum_{k=1}^{2} (Q_{(k)}^i \delta u_i^{(k)} + Q_{(k)}^3 \delta w^{(k)}) - \frac{m_3 h^2 \nabla_i \ddot{w}_3}{3E_3} \delta q^i \Big] d\sigma -$$
$$- \frac{m_3}{4} \int_c \Big[\sum_{k=1}^{2} (2t_{(k)} + h) \ddot{u}_i n^i \delta_{(k)} \delta w^{(k)} - \frac{4h^2}{3E_3} \ddot{w}_3 n_i \delta q^i \Big] ds \Big\} dt, \tag{3.3}$$

в котором

$$
\begin{aligned}
&Q^i_{(k)} = m_{(k)}\ddot{u}_i^{(k)} + \frac{m_3\ddot{u}_i}{2},\\
&Q^3_{(k)} = m_{(k)}\ddot{w}^{(k)} + \frac{m_3}{2}\Big(\ddot{w}_3 + \frac{2t_{(k)} + h}{2}\,\delta_{(k)}\nabla_i\ddot{u}^i\Big),\\
&\ddot{w}_3 = \frac{\ddot{w}^{(1)} + \ddot{w}^{(2)}}{2} + \ddot{\beta}, \quad \delta_{(k)} = (-1)^{k+1} \qquad (k = 1,\, 2),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

а точка над функцией означает производную по времени.

Вариацию интеграла действия (3.1) при подстановке в него вариации потенциальной энергии δI из [2] и найденной вариации кинетической энергии (3.3) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
0 = \int\limits_{t_{\text{н}}}^{t_{\text{к}}} \Big\langle &\sum_{k=1}^{2}(L^{(k)}_{n\tau} - G^{(k)}_{n\tau})\delta w^{(k)}\Big|_c + \int\limits_c \Big\{\sum_{k=1}^{2}\Big[(\Phi^{(k)}_n - T^{(k)}_n)\delta u^{(k)}_n +\\
&+ (\Phi^{(k)}_{n\tau} - T^{(k)}_{n\tau})\delta u^{(k)}_\tau + \Big(\Phi^{(k)}_m - \frac{dL^{(k)}_{n\tau}}{ds} - S^i_{(k)}n_i + \frac{dG^{(k)}_{n\tau}}{ds} +\\
&+ \frac{2t_{(k)} + h}{4}\, m_3\ddot{u}_i n^i\delta_{(k)}\Big)\delta w^{(k)} - (L^{(k)}_n - G^{(k)}_n)\,\delta\omega^{(k)}_n -\\
&-\Big(\frac{2h^3}{3E_3}\,q^i n_i\nabla_s + \frac{4m_3h^2}{3E_3}\,\ddot{w}_3 n_s\Big)\,\delta q^s\Big]\Big\}\,ds + \iint\limits_\sigma \Big\{\sum_{k=1}^{2}\Big[(f^i_{(k)} - Q^i_{(k)})\,\delta u^{(k)}_i +\\
&+ (f^3_{(k)} - Q^3_{(k)})\,\delta w^{(k)} + \Big(\mu_i + \frac{m_3h^2\nabla_i\ddot{w}_3}{3E_3}\Big)\,\delta q^i\Big]\Big\}\,d\sigma\Big\rangle dt.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Качественный анализ уравнения (3.5) показывает, что члены, содержащие множитель m_3 в явном виде, согласно принятому ограничению на динамическое поведение конструкции (2.2), являются малыми по сравнению с другими членами и в дальнейших исследованиях не учитываются.

В силу произвольности вариации $\delta u^{(k)}_i$, $\delta w^{(k)}$, δq^i и принятых предположений (2.2) из (3.5) следует система восьми дифференциальных уравнений движения, которые в обозначениях работы [2] могут быть представлены как

$$
\begin{aligned}
&f^j_{(k)} = \nabla_i T^{ij}_{(k)} - S^i_{(k)}b^j_i + X^j_{(k)} + q^j\delta_{(k)} = Q^j_{(k)},\\
&f^3_{(k)} = \nabla_i S^i_{(k)} + T^{ij}_{(k)}b_{ij} + X^3_{(k)} + \frac{E_3\delta_{(k)}}{2h}\,(w^{(2)} - w^{(1)} - \beta_3) = Q^3_{(k)},\\
&\mu_i = u^{(1)}_i - u^{(2)}_i - (t_{(1)} + h)\,\omega^{(1)}_i - (t_{(2)} + h)\,\omega^{(2)}_i +\\
&\qquad\qquad + 2hd_{is}q^s - \frac{2h^3}{3E_3}\,\nabla_i\nabla_s q^s + \nabla_i m_T = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Здесь

$$
S^j_{(k)} = \nabla_i M^{ij}_{(k)} + T^{ij}_{(k)}\omega^{(k)}_i + M^j_{(k)} + (t_{(k)} + h)\,q^j, \qquad m_T = \int\limits_{-h}^{h} \alpha_3 T z\,dz. \tag{3.7}
$$

При заданных усилиях $\Phi^{(k)}_n$, $\Phi^{(k)}_{n\tau}$, $\Phi^{(k)}_m$ и моментах $L^{(k)}_{n\tau}$, $L^{(k)}_n$, приложенных к граничным срезам $c_{(k)}$ срединных поверхностей несущих слоев, различные комбинации граничных условий могут быть сформулированы исходя из выражений, содержащихся в контурных интегралах вариационного уравнения (3.5):

$$
\begin{aligned}
&T_{n}^{(k)} = \bar{\Phi}_{n}^{(k)}, && \text{если} \quad \delta u_n^{(k)} \neq 0,\\
&T_{n\tau}^{(k)} = \Phi_{n\tau}^{(k)}, && \text{если} \quad \delta u_\tau^{(k)} \neq 0,\\
&S_{(k)}^{i} n_i - \frac{dG_{n\tau}^{(k)}}{ds} = \Phi_m^{(k)} - \frac{dL_{n\tau}^{(k)}}{ds}, && \text{если} \quad \delta w^{(k)} \neq 0,\\
&G_{n}^{(k)} = \bar{L}_{n}^{(k)}, && \text{если} \quad \delta \omega_n^{(k)} \neq 0,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$q^i n_i = 0$, если заполнитель на контуре свободен от внешних усилий, или $\nabla_s q^s = 0$, если граничный срез заполнителя закреплен.

Кроме того, в свободных угловых точках несущих слоев должны быть выполнены статические условия

$$G_{n\tau}^{(k)} = L_{n\tau}^{(k)}, \quad \text{если} \quad \delta w^{(k)} \neq 0. \tag{3.9}$$

Для интегрирования уравнений движения (3.6), кроме кинематических и статических условий (3.8), (3.9), необходимо задание начальных условий при $t = 0$:

$$u_i^{(k)} = v_i^{(k)}, \quad w^{(k)} = v_3^{(k)}, \quad \dot{u}_i^{(k)} = a_i^{(k)}, \quad \dot{w}^{(k)} = a_3^{(k)} \tag{3.10}$$

($v_i^{(k)}$, $v_3^{(k)}$, $a_i^{(k)}$, $a_3^{(k)}$ — заданные перемещения и скорости несущих слоев).

Система дифференциальных уравнений (3.6) и кинематических соотношений (3.8)–(3.10) должна быть дополнена физическими соотношениями в несущих слоях. Если они находятся в условиях температурных воздействий, то в пределах линейно-упругого их деформирования будут иметь вид

$$T_{(k)}^{ij} = B_{(k)}^{ijsn} \varepsilon_{sn}^{(k)} - \overset{t}{T}{}_{(k)}^{ij}, \quad M_{(k)}^{ij} = D_{(k)}^{ijsn} æ_{sn}^{(k)} - \overset{t}{M}{}_{(k)}^{ij},$$

где $B_{(k)}^{ijsn} = 2E_{(k)}^{ijsn} t_{(k)}$; $D_{(k)}^{ijsn} = 2E_{(k)}^{ijsn} t_{(k)}^3/3$; $E_{(k)}^{ijsn}$ — четырехвалентный тензор упругих констант материала; $\overset{t}{T}{}_{(k)}^{ij}$, $\overset{t}{M}{}_{(k)}^{ij}$ — двухвалентные тензоры внутренних температурных усилий и моментов.

4. Линеаризованные уравнения движения оболочек общего вида, находящихся в условиях начального статического нагружения. В реальных условиях эксплуатации трехслойные элементы конструкции, как правило, испытывают некоторые динамические воздействия после их статического нагружения. Поэтому один из этапов общего их прочностного анализа состоит в определении динамических характеристик (частот и форм колебаний), допускающих исследования исходя из линеаризованных уравнений движения. Для построения таких уравнений предположим, что полные перемещения $\overset{*}{u}{}_i^{(k)}$, $\overset{*}{w}{}^{(k)}$ и напряжения $\overset{*}{q}{}^i$ складываются из статических перемещений $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ и напряжений q^i, переводящих оболочку из недеформированного состояния в статическое деформированное невозмущенное, и бесконечно малых добавочных динамических перемещений $\overset{\circ}{u}{}_i^{(k)}$, $\overset{\circ}{w}{}^{(k)}$ и напряжений $\overset{\circ}{q}{}^i$, определяющих переход в возмущенное состояние. Кроме того, принимается, что заданные нагрузки $X_{(k)}^i$, $X_{(k)}^3$, $\Phi_n^{(k)}$, $\Phi_{n\tau}^{(k)}$, $\Phi_m^{(k)}$ и моменты $M_{(k)}^i$, $G_{n\tau}^{(k)}$, $G_n^{(k)}$, а также распределение температур в слоях $T^{(k)}$, T не зависят от времени. Тогда линеаризацией основных уравнений в окрестности статического деформированного состояния можно получить систему линеаризованных уравнений движения

$$\mathring{f}^{j}_{(k)} = \nabla_i \mathring{T}^{ij}_{(k)} - \mathring{S}^{i}_{(k)} b^j_i + \mathring{q}^{j}\, \delta_{(k)} = \mathring{Q}^{j}_{(k)},$$

$$\mathring{f}^{3}_{(k)} = \nabla_i \mathring{S}^{i}_{(k)} + \mathring{T}^{ij}_{(k)} b_{ij} + \frac{E_3}{2h}\,(\mathring{w}^{(2)} - \mathring{w}^{(1)})\,\delta_{(k)} = \mathring{Q}^{3}_{(k)}, \tag{4.1}$$

$$\mathring{\mu}_i = \mathring{u}^{(1)}_i - \mathring{u}^{(2)}_i - (t_{(1)} + h)\,\mathring{\omega}^{(1)}_i - (t_{(2)} + h)\,\mathring{\omega}^{(2)}_i + 2hd_{is}\mathring{q}^{s} - \frac{2h^3}{3E_3}\nabla_i\nabla_s \mathring{q}^{s} = 0.$$

Здесь

$$\mathring{T}^{ij}_{(k)} = B^{ijsn}_{(k)}(\mathring{e}^{(k)}_{sn} + \mathring{e}^{(k)}_{ns} + \mathring{\omega}^{(k)}_s\, \omega^{(k)}_n + \mathring{\omega}^{(k)}_n\, \omega^{(k)}_s)/2,$$

$$\mathring{M}^{ij}_{(k)} = -D^{ijsn}_{(k)}(\nabla_s \mathring{\omega}^{(k)}_n + \nabla_n \mathring{\omega}^{(k)}_s)/2, \tag{4.2}$$

$$\mathring{S}^{j}_{(k)} = \nabla_i \mathring{M}^{ij}_{(k)} + \mathring{T}^{ij}_{(k)} \omega^{(k)}_i + T^{ij}_{(k)} \mathring{\omega}^{(k)}_i + (t_{(k)} + h)\,\mathring{q}^{i},$$

а для $\mathring{Q}^{i}_{(k)}$, $\mathring{Q}^{3}_{(k)}$ имеют место соотношения (3.4), в которых

$$\frac{\partial^2 \mathring{u}_i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\mathring{u}^{(1)}_i + \mathring{u}^{(2)}_i}{2} - \frac{(2t_{(1)} + h)\,\mathring{\omega}^{(1)}_i - (2t_{(2)} + h)\,\mathring{\omega}^{(2)}_i}{4}\right],$$

$$\frac{\partial^2 \mathring{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\mathring{w}^{(1)} + \mathring{w}^{(2)}}{2}. \tag{4.3}$$

Отвечающие выведенным уравнениям (4.1)–(4.3) граничные условия по виду совпадают с условиями (3.8), (3.9), если в них положить

$$\Phi^{(k)}_n = \Phi^{(k)}_{n\tau} = \Phi^{(k)}_m = L^{(k)}_n = L^{(k)}_{n\tau} = 0.$$

Начальные условия по-прежнему записываются в виде (3.10).

5. Упрощенные линеаризованные уравнения движения. Пусть при колебаниях оболочки превалирующими являются прогибы несущих слоев $w^{(k)}$ и есть оценки

$$\nabla_i \sim \frac{\partial}{\partial x_i} \sim \frac{1}{\lambda},$$

где λ — характерный размер волнообразования.

В случае $\lambda \sim H$ можно установить, что имеет место соотношение

$$\mathring{\omega}^{(k)}_j \simeq \nabla_j \mathring{w}^{(k)},$$

известное в теории пологих оболочек. При этом допустимо отбрасывание слагаемых $\mathring{S}^{i}_{(k)} b^j_i$ в уравнениях системы (4.1). В результате они принимают вид

$$\mathring{f}^{j}_{(k)} = \nabla_i \mathring{T}^{ij}_{(k)} + \mathring{q}^{j}_{(k)}\,\delta_{(k)} = \mathring{Q}^{j}_{(k)}, \tag{5.1}$$

в то время как другие уравнения системы (4.1) не изменяются.

Другой предельный случай наблюдается при колебаниях с образованием длинных волн $\lambda \sim L$, где L — характерный размер оболочки. При этом поперечные касательные напряжения в заполнителе $\overset{\circ}{q}{}^{i}$ имеют малый показатель изменяемости, что позволяет установить оценку

$$\nabla_i \nabla_s \overset{\circ}{q}{}^{s} \sim \overset{\circ}{q}{}^{i} / L^2. \tag{5.2}$$

Так как в таких оболочках $h_{(k)}/L \ll 1$, то последнее уравнение системы (4.1), получающееся в результате пренебрежения слагаемым (5.2) по сравнению с другими, можно разрешить относительно $\overset{\circ}{q}{}^{i}$:

$$\overset{\circ}{q}{}^{i} = \frac{A^{si}\left[\overset{\circ}{u}{}_i^{(2)} - \overset{\circ}{u}{}_i^{(1)} + (t_{(1)} + h)\overset{\circ}{\omega}{}_i^{(1)} + (t_{(2)} + h)\overset{\circ}{\omega}{}_i^{(2)}\right]}{2h} \tag{5.3}$$

В рассматриваемом случае внешний вид уравнений $\overset{\circ}{f}{}^{i}_{(k)} = \overset{\circ}{Q}{}^{i}_{(k)}$, $\overset{\circ}{f}{}^{3}_{(k)} = \overset{\circ}{Q}{}^{3}_{(k)}$ остается без изменений, но входящие в них неизвестные $\overset{\circ}{q}{}^{i}$ могут быть исключены с помощью соотношений (5.3) и выражены через неизвестные $\overset{\circ}{u}{}_i^{(k)}$, $\overset{\circ}{w}{}_i^{(k)}$.

Предельно упрощенные линеаризованные уравнения движения получаются из системы (5.1) при соотношениях (4.2), в которых отброшены «деформационные» параметрические слагаемые, т. е. при $\overset{\circ}{\omega}{}_i^{(k)} = 0$. Тогда

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{f}{}^{j}_{(k)} = \nabla_i \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} + \overset{\circ}{q}{}^{j}\, \delta_{(k)} = \overset{\circ}{Q}{}^{j}_{(k)}, \\
\overset{\circ}{f}{}^{3}_{(k)} = \nabla_i \nabla_j \overset{\circ}{M}{}^{ij}_{(k)} + \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} b_{ij} + T^{ij}_{(k)} \nabla_i \nabla_j \overset{\circ}{w}{}^{(k)} + \nabla_i w^{(k)} \nabla_j \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} - \\
- (t_{(k)} + h)\nabla_i \overset{\circ}{q}{}^{i} + \frac{E_3 \delta_{(k)}}{2h}(\overset{\circ}{w}{}^{(2)} - \overset{\circ}{w}{}^{(1)}) = \overset{\circ}{Q}{}^{3}_{(k)},
\end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\overset{\circ}{\mu}_i = \overset{\circ}{u}{}_i^{(1)} - \overset{\circ}{u}{}_i^{(2)} - (t_{(1)} + h)\nabla_i \overset{\circ}{w}{}^{(1)} - (t_{(2)} + h)\nabla_i \overset{\circ}{w}{}^{(2)} + 2hd_{is}\overset{\circ}{q}{}^{s} - \frac{2h^3}{3E_3}\nabla_i \nabla_s \overset{\circ}{q}{}^{s} = 0,$$

где ∇^2 — оператор Лапласа в общих координатах;

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{Q}{}^{j}_{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{ m_{(k)} \overset{\circ}{u}{}_j^{(k)} + \frac{m_3}{4}\left[\overset{\circ}{u}{}_j^{(1)} + \overset{\circ}{u}{}_j^{(2)} - \nabla_j \frac{(2t_{(1)} + h)\overset{\circ}{w}{}^{(1)} - (2t_{(2)} + h)\overset{\circ}{w}{}^{(2)}}{2}\right]\right\}, \\
\overset{\circ}{Q}{}^{3}_{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big\langle m_{(k)} \overset{\circ}{w}{}^{(k)} + \frac{m_3}{4}\Big\{ \overset{\circ}{w}{}^{(1)} + \overset{\circ}{w}{}^{(2)} + (2t_{(k)} + h) \times \\
\times \left[\nabla_i \frac{\overset{\circ}{u}{}_i^{(1)} + \overset{\circ}{u}{}_i^{(2)}}{2} - \nabla^2 \frac{(2t_{(1)} + h)\overset{\circ}{w}{}^{(1)} - (2t_{(2)} + h)\overset{\circ}{w}{}^{(2)}}{4}\right]\delta_{(k)}\Big\}\Big\rangle.
\end{gathered} \tag{5.5}$$

6. Уравнения для исследования изгибных колебаний пологих оболочек. Данные уравнения могут быть составлены из (5.4), (5.5) при $\ddot{u}_j^{(k)} = 0$. При этом инерционные члены $Q^j_{(k)}$, $Q^3_{(k)}$ принимают вид

$$\begin{gathered}
Q^j_{(k)} = Q^j = \frac{m_3}{8}\left[(2t_{(2)} + h)\nabla_j \ddot{w}^{(2)} - (2t_{(1)} + h)\nabla_j \ddot{w}^{(1)}\right], \\
\overset{\circ}{Q}{}^{(3)}_{(k)} = m_{(k)}\ddot{w}^{(k)} + \frac{m_3}{4}\Big[\ddot{w}^{(1)} + \ddot{w}^{(2)} + \\
+ (2t_{(k)} + h)\nabla^2 \frac{(2t_{(2)} + h)\ddot{w}^{(2)} - (2t_{(1)} + h)\ddot{w}^{(1)}}{4}\, \delta_{(k)}\Big].
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Здесь и ниже индекс $\circ$ над функцией опускается, но вводится для характеристик НДС при статическом деформировании.

Рассматривая пологие оболочки, будем в дальнейшем отождествлять криволинейные координаты x^1, x^2 с координатами x, y ортогональной декартовой системы координат, что позволяет принять коэффициенты первой квадратичной формы поверхности σ равными единице. При этом компоненты второго метрического тензора имеют вид $b_{11} = -1/R_1$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = -1/R_2$, если направления x, y совпадают с направлениями главных кривизн. В данной системе координат справедливы соотношения (R_1, R_2 — радиусы главных кривизн)

$$T^{ij}_{(k)} = B^{ijsn}_{(k)} \varepsilon^{(k)}_{sn}; \qquad M^{ij}_{(k)} = -D^{ijsn}_{(k)} æ^{(k)}_{sn}; \tag{6.2}$$

$$\varepsilon^{(k)}_{11} = \frac{\partial u^{(k)}_1}{\partial x} + \frac{w^{(k)}}{R_1}, \quad \varepsilon^{(k)}_{12} = \frac{\partial u^{(k)}_1}{\partial y} + \frac{\partial u^{(k)}_2}{\partial x}, \quad \varepsilon^{(k)}_{22} = \frac{\partial u^{(k)}_2}{\partial y} + \frac{w^{(k)}}{R_2},$$
$$æ^{(k)}_{11} = \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2}, \quad æ^{(k)}_{12} = \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x \partial y}, \quad æ_{22} = \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2}. \tag{6.3}$$

Пусть главные направления анизотропии в несущих слоях оболочки ортогональны, но не совпадают с направлениями осей координат x и y. Тогда вместо упругих констант $B^{ijsn}_{(k)}$ удобнее ввести константы $c^{ij}_{(k)}$ по формулам

$$\begin{gathered} B^{1111}_{(k)} = c^{11}_{(k)}, \quad B^{1221}_{(k)} = B^{1121}_{(k)} = c^{13}_{(k)}, \quad B^{2211}_{(k)} = B^{1122}_{(k)} = c^{12}_{(k)}, \\ B^{1221}_{(k)} = c^{33}_{(k)}, \quad B^{1222}_{(k)} = B^{2221}_{(k)} = c^{23}_{(k)}, \quad B^{2222}_{(k)} = c^{22}_{(k)}, \end{gathered} \tag{6.4}$$

описанные в [4].

Для трансверсально-мягкого заполнителя в выбранной системе координат упругие постоянные определяются по формулам $A^{11} = G_{11}$, $A^{12} = G_{12}$, $A^{22} = G_{22}$, в которых G_{ij} могут быть выражены через модули поперечного сдвига заполнителя G_{13}, G_{33}. При этом

$$d_{11} = \frac{G_{22}}{G_s}, \quad d_{12} = d_{21} = \frac{G_{12}}{G_s}, \quad d_{22} = \frac{G_{11}}{G_s}, \quad G_s = G_{11}G_{22} - G^2_{12}. \tag{6.5}$$

Использование соотношений (6.1)–(6.5) позволит систему уравнений (5.4) привести к системе восьми дифференциальных уравнений относительно неизвестных $u^{(k)}_i$, $w^{(k)}$ и q^i, которую удобнее свести к двум разрешающим уравнениям, записанным относительно прогибов несущих слоев. Для этого подставим усилия и моменты (6.2) совместно с (6.3)–(6.5) в уравнения (5.4), (6.1). При этом во всех последующих построениях значения упругих и жесткостных параметров, а также кривизны будем считать постоянными. После преобразований, заключающихся в разрешении уравнений (5.4) относительно касательных перемещений $u^{(k)}_i$ так, как сделано в [5], эта система для каждого несущего слоя приводится к виду

$$\begin{gathered} \nabla^4_{z(k)} u^{(k)}_1 = -\nabla^2_{x(k)} P^{(1)}_k + \nabla^2_{xy(k)} P^{(2)}_k, \\ \nabla^4_{z(k)} u^{(k)}_2 = -\nabla^2_{y(k)} P^{(2)}_k + \nabla^2_{xy(k)} P^{(1)}_k, \\ \frac{t^3_{(k)}}{3} \nabla^4_{z(k)} L_{(k)} w^{(k)} + \nabla^4_{(k)} w^{(k)} = \nabla^4_{z(k)} (Z_{(k)} - P^{(3)}_k), \end{gathered} \tag{6.6}$$

где введены следующие обозначения:

для операторов

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2_{x(k)} = c^{33}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c^{23}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c^{22}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
&\nabla^2_{xy(k)} = c^{13}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (c^{12}_{(k)} + c^{33}_{(k)})\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c^{23}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
&\nabla^2_{y(k)} = c^{11}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2c^{13}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + c^{33}_{(k)}\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
&\nabla^4_{(k)} = a_{(k)}\Big(\frac{\partial^4}{R_2^2\partial x^4} + \frac{2}{R_1R_2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{R_1^2\partial y^4}\Big),\\
&\nabla^4_{z(k)} = a^{22}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a^{23}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} +\\
&\qquad + (2a^{12}_{(k)} + 2a^{33}_{(k)})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + 4a^{23}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} + a^{22}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial y^4},\\
&L_{(k)} = c^{11}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4c^{13}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} +\\
&\qquad + 2(c^{12}_{(k)} + 2c^{33}_{(k)})\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + 4c^{23}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} + c^{22}_{(k)}\frac{\partial^4}{\partial y^4};
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

для упругих постоянных $a^{ij}_{(k)}$, представляющих собой алгебраические дополнения определителя $|c^{ij}_{(k)}|$,

$$a_{(k)} = |c^{ij}_{(k)}|;$$

для параметрического члена

$$Z_{(k)} = \overset{\circ}{T}{}^{11}_{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x^2} + 2\overset{\circ}{T}{}^{12}_{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial x\,\partial y} + \overset{\circ}{T}{}^{22}_{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial y^2}; \tag{6.8}$$

$$
\begin{aligned}
&P^i_{(k)} = Q^i_{(k)} - q^i\delta_{(k)},\\
&P^3_{(k)} = \frac{E_3}{2h}(w^{(2)} - w^{(1)})\delta_{(k)} + (t_{(k)} + h)\nabla_i q^i - Q^3_{(k)}.
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

В силу пологости оболочки при выводе уравнений (6.6) отбрасывались члены, содержащие в качестве множителя ее кривизну.

Для последующих преобразований выразим q^i через перемещения оболочек. Из уравнений (5.4) ($\mu_i = 0$) найдем

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2_s q^1 = \Big(G_{11} - \frac{h^2G_s}{3E_3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \Big(G_{12} + \frac{h^2G_s}{3E_3}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big)\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big),\\
&\nabla^2_s q^2 = \Big(G_{12} + \frac{h^2G_s}{3E_3}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big)\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \Big(G_{22} - \frac{h^2G_s}{3E_3}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big).
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Здесь

$$u = \frac{u_1^{(1)} - u_1^{(2)}}{2h}, \qquad v = \frac{u_2^{(1)} - u_2^{(2)}}{2h},$$

$$w = \frac{(t_{(1)} + h)w^{(1)} + (t_{(2)} + h)w^{(2)}}{2h}, \qquad \overline{\nabla}_s^2 = 1 - \frac{h^2}{3E_3}\nabla_s^2, \tag{6.11}$$

$$\nabla_s^2 = G_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2G_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + G_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

После подстановки (6.9)–(6.11) в (6.6) и некоторых преобразований от системы восьми дифференциальных уравнений приходим к системе четырех дифференциальных уравнений, записанных относительно четырех введенных выше функций u, v, $w^{(k)}$:

$$\begin{gathered}
2h\overline{\nabla}_s^2\nabla_{z(1)}^4\nabla_{z(2)}^4 u = (\nabla_{x(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 + \nabla_{x(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\Big[G_{11}\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \\
+ G_{12}\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) - \frac{h^2 G_s}{3E_3}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] - (\nabla_{xy(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 + \nabla_{xy(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\times \\
\times\Big[G_{12}\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + G_{22}\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) + \frac{h^2 G_s}{3E_3}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] + \\
+ (\nabla_{x(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 - \nabla_{x(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\overline{\nabla}_s^2 Q^1 - (\nabla_{xy(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 - \nabla_{xy(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\overline{\nabla}_s^2 Q^2,
\end{gathered} \tag{6.12}$$

$$\begin{gathered}
2h\overline{\nabla}_s^2\nabla_{z(1)}^4\nabla_{z(2)}^4 v = (\nabla_{y(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 + \nabla_{y(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\Big[G_{12}\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \\
+ G_{22}\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) + \frac{h^2 G_s}{3E_3}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] - (\nabla_{xy(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 + \nabla_{xy(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\times \\
\times\Big[G_{11}\Big(u + \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + G_{12}\Big(v + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) - \frac{h^2 G_s}{3E_3}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big] - \\
- (\nabla_{xy(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 - \nabla_{xy(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\overline{\nabla}_s^2 Q^1 + (\nabla_{y(1)}^2\nabla_{z(2)}^4 - \nabla_{y(2)}^2\nabla_{z(1)}^4)\overline{\nabla}_s^2 Q^2;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\frac{t_{(k)}^2}{3}\overline{\nabla}_s^2\nabla_{z(k)}^4 L_{(k)}w^{(k)} + \overline{\nabla}_s^2\nabla_{(k)}^4 w^{(k)} - \overline{\nabla}_s^2\nabla_{z(k)}^4\Big[Z_{(k)} + \frac{E_3}{2h}(w^{(2)} - w^{(1)}) - Q_{(k)}^3\Big] = \\
= (t_{(k)} + h)\nabla_{z(k)}^4\Big[\nabla_s^2 w + \Big(G_{11}\frac{\partial}{\partial x} + G_{12}\frac{\partial}{\partial y}\Big)u + \Big(G_{22}\frac{\partial}{\partial y} + G_{12}\frac{\partial}{\partial x}\Big)v\Big].
\end{gathered} \tag{6.13}$$

Если в системе уравнений (6.12) выразить u, v через w и подставить их в уравнения (6.13), то приходим к системе двух разрешающих уравнений для исследования изгибных колебаний трехслойной оболочки, записанных через прогибы внешних слоев:

$$\begin{gathered}
\Big(\frac{t_{(k)}^2}{3}L_{(k)} + \frac{\nabla_{(k)}^4}{\nabla_{z(k)}^4}\Big)w^{(k)} + \frac{E_3}{2h}(w^{(1)} - w^{(2)})\delta_{(k)} - Z_{(k)} - (t_{(k)} + h)P_s w + \\
+ m_{(k)}\ddot{w}^{(k)} + \frac{m_3}{4}\Big\{\ddot{w}^{(1)} + \ddot{w}^{(2)} - (2t_{(k)} + h)\delta_{(k)}\nabla^2\Big[\frac{(2t_{(1)} + h)\ddot{w}^{(1)}}{4} - \\
- \frac{(2t_{(2)} + h)\ddot{w}^{(2)}}{4}\Big] + (t_{(k)} + h)P_\omega\,\frac{(2t_{(2)} + h)\ddot{w}^{(2)} - (2t_{(1)} + h)\ddot{w}^{(1)}}{2}\Big\} = 0.
\end{gathered} \tag{6.14}$$

Здесь введены формальные обозначения для операторов

$$P_s = \frac{\nabla_s^2 - G_s L_z}{\nabla_s^2 - G_{11}L_x + 2G_{12}L_{xy} - G_{22}L_y + G_s\left(L_x L_y - L_{xy}^2 + \frac{h^2}{3E_3} L_z\right)},$$

$$(\nabla_s^2 - G_s L_z)P_\omega = P_s\left\{\left[(G_{11} - G_s L_y)\frac{\partial}{\partial x} + (G_{12} - G_s L_{xy})\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial \overline{L}_x}{\partial x} - \frac{\partial \overline{L}_{xy}}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[(G_{22} - G_s L_x)\frac{\partial}{\partial y} + (G_{12} - G_s L_{xy})\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial \overline{L}_y}{\partial y} - \frac{\partial \overline{L}_{xy}}{\partial x}\right)\right\}, \quad (6.15)$$

при этом

$$L_p = \frac{1}{2h}\left(\frac{\nabla_{p(1)}^2}{\nabla_{z(1)}^4} + \frac{\nabla_{p(2)}^2}{\nabla_{z(2)}^4}\right), \quad \overline{L}_p = \frac{1}{2h}\left(\frac{\nabla_{p(1)}^2}{\nabla_{z(1)}^4} - \frac{\nabla_{p(2)}^2}{\nabla_{z(2)}^4}\right),$$

$$L_z = \frac{1}{2h}\left(\frac{L_{(1)}}{\nabla_{z(1)}^4} + \frac{L_{(2)}}{\nabla_{z(2)}^4}\right), \qquad p = x,\ xy,\ y. \quad (6.16)$$

Операторы (6.15), (6.16) являются операторами с постоянными коэффициентами, содержащими лишь четные производные по координатам x и y. Поэтому при их применении используется свойство

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\, \partial y^j} = (-1)^{(i+j)/2}\alpha^i \beta^j, \quad (6.17)$$

где сумма $i+j$ — четная величина; α и β — параметры, характеризующие изменяемость функций вдоль координатных линий.

Отметим, что выведенные здесь уравнения являются точными для исследования изгибных форм колебаний пластин и пологих панелей с постоянными кривизнами и асимптотически точными для изучения высших форм изгибных колебаний непологих оболочек.

7. Приближенное решение задачи о собственных изгибных колебаниях пологих оболочек, предварительно нагруженных статическими усилиями. Получить точные аналитические решения уравнений (6.14) в общем виде не удается. Предполагая, что собственные частоты колебаний ω незначительно зависят от краевых условий, ограничимся приближенным описанием форм колебаний конструкции в виде

$$w^{(k)} = W_{mn}^{(k)} \cos\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}\right) \exp(-i\omega t) \quad (7.1)$$

для пластин и панелей или в виде

$$w^{(k)} = W_{mn}^{(k)} \cos[m(\vartheta - \theta_0) + n\beta] \exp(-i\omega t) \quad (7.2)$$

для оболочек вращения, замкнутых в окружном направлении β. Здесь $W_{mn}^{(k)}$ — амплитуда прогиба k-го внешнего слоя; m, n — числа полуволн колебаний вдоль x, y для пластин и панелей или в направлении θ и β для оболочек вращения; a, b — размеры пластины или панели в плане; θ_0 — угол среза оболочки вращения.

Отметим, что функции (7.1), (7.2) удовлетворяют условию (6.17) и могут быть точными интегралами уравнения (6.14), если усилия начального напряженного состояния $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)}$, входящие в состав параметрического члена $Z_{(k)}$, являются постоянными. В противном случае ($\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} \neq \text{const}$)

уравнения (6.14) могут быть проинтегрированы по методу Бубнова — Галеркина. Результат такого интегрирования после некоторых преобразований запишем как

$$
\begin{aligned}
&(\Omega^2_{(1)mn} - \omega^2 M^{(1)}_{mn})W^{(1)}_{mn} + (P_{mn} - \omega^2 M^{(-)}_{mn})W^{(2)}_{mn} = 0,\\
&(P_{mn} - \omega^2 M^{(+)}_{mn})W^{(1)}_{mn} + (\Omega^2_{(2)mn} - \omega^2 M^{(2)}_{mn})W^{(2)}_{mn} = 0,
\end{aligned}
\qquad (7.3)
$$

где введены обозначения, полученные после следующих операций:

1) перевода соответствующих дифференциальных операторов (6.7), (6.11), (6.15), (6.16), входящих в уравнения (6.14), в алгебраические:

$$L^{(k)}_{mn} = c^{11}_{(k)}m^4 + 4c^{13}_{(k)}m^3n\lambda + 2(c^{12}_{(k)} + 2c^{33}_{(k)})m^2n^2\lambda^2 + 4c^{23}_{(k)}mn^3\lambda^3 + c^{22}_{(k)}n^4\lambda^4,$$

$$\Delta^{(k)}_{mn} = a^{22}_{(k)}m^4 - 2a^{23}_{(k)}m^3n\lambda + (2a^{12}_{(k)} + a^{33}_{(k)})m^2n^2\lambda^2 - 2a^{13}_{(k)}mn^3\lambda^3 + a^{11}_{(k)}n^4\lambda^4,$$

$$\Delta^s_{mn} = m^2 + 2g_{1s}mn\lambda + q_{2s}n^2\lambda^2,$$

$$L^{(i)}_{1mn} = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k(1-i)}\frac{c^{33}_{(k)}m^2 + 2c^{23}_{(k)}mn\lambda + c^{22}_{(k)}n^2\lambda^2}{K_{(k)}\Delta^{(k)}_{mn}},$$

$$L^{(i)}_{2mn} = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k(1-i)}\frac{c^{11}_{(k)}m^2 + 2c^{12}_{(k)}mn\lambda + c^{33}_{(k)}n^2\lambda^2}{K_{(k)}\Delta^{(k)}_{mn}},$$

$$L^{(i)}_{3mn} = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k(1-i)}\frac{c^{13}_{(k)}m^2 + (c^{12}_{(k)} + c^{33}_{(k)})mn\lambda + c^{23}_{(k)}n^2\lambda^2}{K_{(k)}\Delta^{(k)}_{mn}},$$

$$L^s_{mn} = \sum_{k=1}^{2}\frac{L^{(k)}_{mn}}{K_{(k)}\Delta^{(k)}_{mn}}, \qquad \nabla^s_{mn} = 1 + \frac{4r^2_{(1)}}{\varphi_{(1)}K_{(1)}}\Delta^s_{mn},$$

$$P^s_{mn} = \frac{\Delta^s_{mn} + g_sL^s_{mn}}{\Delta^s_{mn} + L^{(1)}_{1mn} - 2g_{1s}L^{(1)}_{3mn} + g_{2s}L^{(1)}_{2mn} + æ_sL^s_{mn} + q_s(L^{(1)}_{1mn}L^{(1)}_{2mn} - L^{(1)2}_{3mn})},$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta^s_{mn} + g_sL^s_{mn})P^{\omega}_{mn} = P^s_{mn}\Bigl\{&[(g_sL^{(1)}_{2mn} + 1)m + g_{1s}L^{(1)}_{3mn}n\lambda](L^{(2)}_{1mn}m - L^{(2)}_{3mn}n\lambda) +\\
&+ [(g_sL^{(1)}_{1mn} + g_{2s})n\lambda + (g_sL^{(1)}_{3mn} + g_{1s})m](L^{(2)}_{2mn}n\lambda - L^{(2)}_{3mn}m)\Bigr\},
\end{aligned}
$$

$$P_{mn} = \frac{E_3}{2h}\Bigl[\frac{3P^s_{mn}r_{(1)}}{K_{(1)}\varphi_{(1)}r_{(2)}}(1 + 2r_{(1)})(1 + 2r_{(2)}) - 1\Bigr],$$

$$\Omega^2_{kmn} = \frac{D_{(k)}\pi^4}{a^4}\Bigl[L^{(k)}_{mn} + \frac{(m^2 + \delta n^2\lambda^2)^2}{c^2_{(k)}\Delta^{(k)}_{mn}} + \frac{\varphi_{(k)}}{2} + l^{(k)}_{mn} + \frac{3P^s_{mn}(1 + 2r_{(k)})^2}{2K_{(k)}}\Bigr],$$

$$M^{(k)}_{mn} = m_{(k)} + \frac{m_3}{4}\Bigl\{1 + (1 + r_{(k)})\frac{t^2_{(k)}\pi^2}{a^2}[(1 + r_{(k)})\lambda^2_{mn} + (1 + 2r_{(k)})P^{\omega}_{mn}\delta_{(k)}]\Bigr\},$$

$$M^{(+)}_{mn} = \frac{m_3}{4}\Bigl\{1 - (1 + r_{(2)})\frac{t_{(1)}t_{(2)}\pi^2}{a^2}[(1 + r_{(1)})\lambda^2_{mn} + (1 + 2r_{(1)})P^{\omega}_{mn}]\Bigr\},$$

$$M^{(-)}_{mn} = \frac{m_3}{4}\Bigl\{1 - (1 + r_{(1)})\frac{t_{(1)}t_{(2)}\pi^2}{a^2}[(1 + r_{(2)})\lambda^2_{mn} - (1 + 2r_{(2)})P^{\omega}_{mn}]\Bigr\};$$

2) обезразмеривания геометрических параметров конструкции в соответствии с формулами

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \delta = \frac{R_2}{R_1}, \quad r_{(k)} = \frac{h}{2t_{(k)}};$$

3) обезразмеривания физических и физико-геометрических параметров конструкции

$$c^2_{(k)} = \frac{\pi^4 R_2^2 t^2_{(k)}}{3a^4 a_{(k)}}, \qquad \varphi_{(k)} = \frac{E_3 a^4}{D_{(k)}\pi^4 h}, \qquad K_{(k)} = \frac{B_{(k)}\pi^2 h}{a^2 G_{11}},$$

$$g_{is} = \frac{G_{is}}{G_{11}}, \qquad æ_s = \frac{4g_s r^2_{(1)}}{\varphi_{(1)} K_{(1)}}, \qquad g_s = g_{2s} - g_{1s},$$

где $B_{(k)}$ — характерная жесткость на растяжение — сжатие k-го несущего слоя;

4) интегрирования параметрического члена $Z_{(k)}$ из (6.8) и его обезразмеривания:

$$l^{(k)}_{mn} = \mu^{11}_{(k)} m^2 + 2\mu^{12}_{(k)} mn\lambda + \mu^{22}_{(k)} n^2 \lambda^2. \tag{7.4}$$

Здесь

$$\mu^{ij}_{(k)} = \frac{2\lambda}{D_{(k)}\pi^2} \int\limits_0^a \int\limits_0^b \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy \tag{7.5}$$

для пластин и панелей;

$$\mu^{ij}_{(k)} = \frac{2R_1^2}{D_{(k)}\pi\theta_0} \int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} \cos^2[m(\theta - \theta_0) + n\beta]\, d\theta\, d\beta \tag{7.6}$$

для оболочек вращения.

Следует заметить, что при $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} \neq \mathrm{const}$ из (7.5), (7.6) вытекает

$$\mu^{ij}_{(k)} = \frac{\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} a^2}{D_{(k)}\pi^2} \qquad \text{для пластин и панелей,}$$

$$\mu^{ij}_{(k)} = \frac{\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)} R_1^2}{D_{(k)}} \qquad \text{для оболочек вращения.}$$

Из условия нетривиальности решения системы (7.3) приходим к квадратному уравнению для определения ω^2 (частоты свободных колебаний), корни которого представим в виде

$$\omega^2_{1,2} = A_{mn} \pm \sqrt{A^2_{mn} - B_{mn}}, \tag{7.7}$$

где

$$A_{mn} = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega^2_{(1)mn} M^{(2)}_{mn} + \Omega^2_{(2)mn} M^{(1)}_{mn} - P_{mn}\left(M^{(+)}_{mn} + M^{(-)}_{mn}\right)}{M^{(1)}_{mn} M^{(2)}_{mn} - M^{(+)}_{mn} M^{(-)}_{mn}};$$

$$B_{mn} = \frac{\Omega^2_{(1)mn}\Omega^2_{(2)mn} - \tilde{M}^{(+)}_{mn}\tilde{M}^{(-)}_{mn}}{M^{(1)}_{mn} M^{(2)}_{mn} - M^{(+)}_{mn} M^{(-)}_{mn}}.$$

При малой изменяемости касательных напряжений q^i вдоль координат, имеющей место при колебаниях с образованием длинных волн $\lambda \sim L$ [1], при вычислении $\omega^2_{1,2}$ следует принять $æ_s = 0$, $\overline{\Delta}{}^s_{mn} = 1$.

Если в конструкции реализуются лишь синфазные формы [1] собственных колебаний, характеризуемых $W^{(1)}_{mn} = W^{(2)}_{mn} = W_{mn}$, их частоты вычисляются по формуле

$$\omega^2 = \frac{\overline{\Omega}^2_{(1)mn} + \Omega^2_{(2)mn}}{M_{mn}},$$

которая получается из (7.7) при $\varphi_{(k)} \to \infty$. При этом

$$\overline{\Omega}^2_{(1)mn} = \frac{D_{(1)}\pi^4}{a^4}\Big[L^{(1)}_{mn} + \frac{(m^2 + \delta n^2\lambda^2)^2}{c^2_{(1)}\Delta^{(1)}_{mn}} + l^{(1)}_{mn} + \frac{3P^s_{mn}}{K_{(1)}}\Big(1 + \frac{r_{(1)}}{r_{(2)}} + 4r_{(1)}\Big)^2\Big],$$

$$\overline{\Omega}^2_{(2)mn} = \frac{D_{(2)}\pi^4}{a^4}\Big[L^{(2)}_{mn} + \frac{(m^2 + \delta n^2\lambda^2)^2}{c^2_{(2)}\Delta^{(2)}_{mn}} + l^{(2)}_{mn} + \frac{3P^s_{mn}}{K_{(2)}}\Big(1 + \frac{r_{(2)}}{r_{(1)}} + 4r_{(1)}\Big)^2\Big],$$

$$M_{mn} = m_{(1)} + m_{(2)} + m_{(3)} + \frac{\pi^2 a^2 m_3}{4}(t_{(1)} - t_{(2)}) \times$$
$$\times [(t_{(1)} - t_{(2)})\lambda^2_{mn} + (t_{(1)} + t_{(2)} + 2h)P^{\omega}_{mn}].$$

Из приведенных выше соотношений для $\omega^2_{1,2}$ (7.7) усматривается следующая структурная формула для определения собственных частот колебаний:

$$\frac{a^4 m_{(1)}\omega^2_{1,2}}{D_{(1)}\pi^4} = f\Big(\psi_{(k)}, \psi, e_{(k)}, g_{(k)}, \nu^1_{(k)}, \frac{m_{(2)}}{m_{(1)}}, \frac{m_{(3)}}{m_{(1)}}, c^2_{(k)}, \frac{t_{(k)}}{h},$$
$$\lambda, \delta, r_{(k)}, \varphi_{(k)}, K_{(k)}, g_{is}, \mu^{ij}_{(k)}; m, n\lambda, \theta\Big). \quad (7.8)$$

Здесь $\psi_{(k)}$, ψ — углы армировки несущих слоев и заполнителя; $e_{(k)}$, $g_{(k)}$, $\nu^1_{(k)}$ — отношения модулей упругости и сдвига, а также коэффициент Пуассона во внешних слоях; остальные параметры приведены выше.

8. Алгоритмы смешанных численно-аналитических методов решения задач. Построенное в п. 7 аналитическое решение является точным для прямоугольных пластин и пологих панелей с шарнирно опертыми краями и асимптотически точным для вычисления частот высших форм колебаний непологих оболочек вращения, мало зависящих от граничных условий. Однако данное утверждение справедливо лишь тогда, когда точно определены усилия $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)}$ начального статического нагружения. Задача определения этих усилий с необходимой степенью точности может быть решена одним из известных численных методов, что позволяет предложить численно-аналитический алгоритм решения общей задачи по исследованию динамических характеристик трехслойных конструкций рассматриваемого класса. В соответствии с этим алгоритмом усилия $\overset{\circ}{T}{}^{ij}_{(k)}$ определяются численным решением уравнений, описывающих начальное статическое равновесие конструкций, а входящие в (7.4) коэффициенты $\mu^{ij}_{(k)}$ вычисляются по (7.5), (7.6).

Выведенная формула (7.8) для определения собственных частот может быть также использована в качестве структурной формулы при применении предложенного в [6] смешанного аналитико-вычислительно-экспериментального подхода, что требует идентификации входящих в (7.8) параметров m, n, θ, являющихся свободными в рамках этого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В., Новичков Ю. Н.** Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1989.
2. **Паймушин В. Н., Орлов Ю. В.** Проблема устойчивости моментного равновесия трехслойных элементов конструкций в уточненной постановке // Изв. вузов. Авиац. техника. 1990. № 2. С. 17–22.
3. **Паймушин В. Н.** Вариант нелинейной теории тонких трехслойных оболочек, находящихся в условиях термосилового воздействия // Актуальные проблемы механики оболочек: Межвуз. сб. Казань, 1991. С. 64–70.
4. **Королев В. И.** Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965.
5. **Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В.** Расчет оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1987.
6. **Паймушин В. Н.** Аналитико-вычислительно-экспериментальная методология определения критических нагрузок и частот свободных колебаний деформируемых твердых тел // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 1. С. 52–53.

Поступила в редакцию 28/VII 1994 г.