

УДК 536.425

Моделирование теплообмена в слоистых стеклометаллических материалах при индукционном нагреве*

О.Н. Любимова, М.А. Барботько

Дальневосточный Федеральный университет, Владивосток

E-mail: barbotko_ma@dvfu.ru

Исследуются процессы изменения свойств при теплообмене слоистого стеклометаллического композиционного материала (стеклометаллокомпозита), полученного методом индукционного нагрева и последующего отжига. Рассматриваемый объект из стеклометаллокомпозита имеет цилиндрическую форму (с наружным металлическим и внутренним стеклянным сплошными цилиндрами). Он используется в том числе и как модельный образец при экспериментальных исследованиях сильно сжатых хрупких горных пород. Сложность при моделировании теплообмена в данном образце обусловлена процессом стеклования, индукционным нагревом и учетом излучения на внешней поверхности металла. Структурные и механические релаксационные процессы в стекле рассчитываются по методу Тула–Нарайанасвами–Мойнихана–Мазурина, который основан на представлении о структурной температуре как дополнительном параметре, характеризующем состояние стекла, и принципе суперпозиции Больцмана–Вольтерра. В работе предлагается математическая модель и метод расчета температурных полей и теплофизических свойств в композите в процессе его получения. Получены результаты численного решения для различных режимов и свойств стеклометаллокомпозита. Предложенные модель и метод могут быть полезными при расчетах параметров режима отжига при нанесении стеклянных покрытий и для вычисления эволюции свойств любых слоистых композиционных материалов, содержащих стеклующиеся слои.

Ключевые слова: индукционный нагрев, стеклометаллический композит, стеклование, сложный теплообмен в слоистых материалах.

Введение

Режим получения многих конструкционных материалов часто предусматривает интенсивное тепловое воздействие, при котором возможно изменение фазового состояния материалов, входящих в их состав. Одним из перспективных новых материалов является стеклометаллический конструкционный материал — стеклометаллокомпозит [1], а наиболее технологичным и экономичным методом его получения — индукционный нагрев [2]. Определяющим фактором в пользу индукционного нагрева является не только высокая производительность процесса, но и более низкое по сравнению с пламенным и косвенным нагревом образование окалины у металлических слоев, что уменьшает их потери и повышает качество соединения со стеклянными слоями. При индукционном нагреве происходят следующие процессы: передача энергии от индуктора, питаемого переменным током определенной частоты, к нагреваемому изделию посредством электромагнитного поля; изменение температуры в материале заданной конфигурации от начальной до требуемой по технологии; структурные изменения, имеющие место в материале

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-33-90200.

во время нагрева и последующего охлаждения и влияющие на свойства готового материала. В настоящей работе рассматривается подход к математическому описанию последних двух задач.

Сложность моделирования технологических параметров для технологии получения стекломаталлокомпозита обусловлена реологическим откликом стекла на температурные воздействия и процессом стеклования. Несмотря на то, что развитию теоретических и экспериментальных подходов в теории стеклования посвящено большое количество работ, среди которых [3–11], общий теоретический подход, способный справиться с задачей детального описания экспериментальных данных, отсутствует. При математическом описании тепловых процессов и изменении структуры стеклующихся материалов выделяется два основных направления: моделирование стеклования как фазового перехода (например, модели, предложенные в работах [12, 13]) и кинетическая теория явления стеклования (см. работы [7, 10]), в пользу моделей которой свидетельствуют экспериментально подтвержденные факты зависимости температуры стеклования и границ интервала стеклования от скорости изменения температуры и предыстории температурной обработки. Одним из теоретических подходов кинетической теории является релаксационная теория стеклования и метод определения свойств стекол при переходе через фазу стеклования, разрабатываемые группой О.В. Мазурина [3, 4, 6], которая проверена на обширном экспериментальном материале, в том числе при отжиге спаев стекла с другими материалами [3, 4]. В основе метода лежит идея А. Тула о введении в модель изменения структуры стекла в фазе стеклования структурного параметра, характеризующего состояние системы, — «фиктивной» температуры T_f [11]. В работах [4, 8, 9] четко сформулированы основные предположения релаксационной теории стеклования и разработаны алгоритмы для расчета структурной релаксации стекол любых составов. Алгоритмы не имеют принципиальных отличий, поэтому часто объединяются исследователями, использующими их подходы, в модель под названием Тула–Нарайанасвами–Мазурина–Мойнихана (ТНММ).

Целью настоящей работы является математическое описание температурных полей и теплофизических свойств стекломаталлокомпозита при индукционном нагреве и его последующего охлаждения с учетом процесса стеклования на основе модели ТНММ.

Постановка задачи

Рассматривается процесс теплообмена и структурных превращений при получении стекломаталлического конструкционного материала методом индукционного нагрева. Принципиальная схема установки и геометрия объекта приведены на рис. 1. Температурный

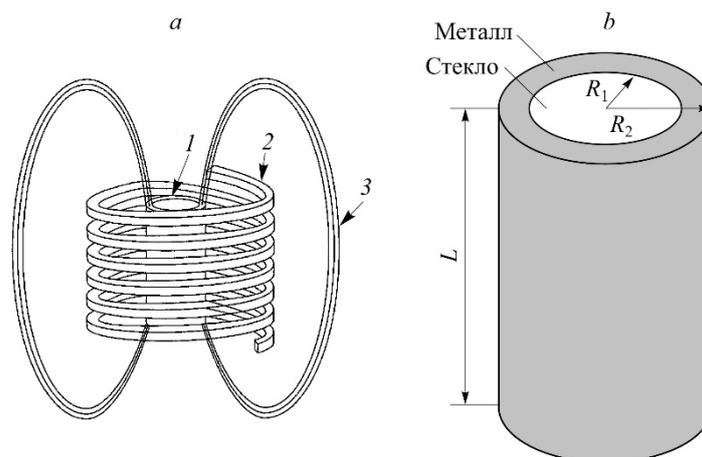


Рис. 1. Принципиальная схема установки для индукционного нагрева (а) и геометрия образцов (b).

a: 1 — нагреваемое тело, 2 — индуктор, 3 — магнитное поле.

Рис. 2. Схема температурного режима.

режим включает индукционный нагрев до температуры размягчения стеклянного слоя; выдержку для полной запрессовки стеклянного стержня радиусом R_1 в металлический цилиндр радиусом R_2 и их охлаждение; отжиг изделия с нагревом до верхней температуры отжига, выдержкой и последующими контролируемые скоростями охлаждения (см. рис. 2).

При нагреве до температуры T_{\max} , которая может совпадать или быть несколько меньше температуры плавления стекла T_1 , и последующем охлаждении изменяются структура и свойства стекла. Такой процесс называют стеклованием и он протекает в некотором интервале температур (T_g^-, T_g^+) [4, 5]. Температура стеклования T_g лежит в средней части интервала. Ее положение зависит от скорости нагрева–охлаждения $(g_1 - g_4 \text{ и } g_u)$, а границы интервала стеклования обычно определяются по границам гистерезисной петли (рис. 3а), характеризующей, например, изменение энтальпии при равномерном охлаждении и нагреве от равновесного состояния расплава (участок кривой, обозначенный l) к замороженной структуре (участок кривой, обозначенный g).

При описании свойств стекла в интервале стеклования на основании модели ТНМ базовым понятием является «фиктивная температура T_f ». В стабилизированном состоянии T_f равна фактической температуре ($T_f = T$), в условиях замороженной структуры $T_f = \text{const}$, т.е. при равномерном изменении температуры T_f изменяется (уменьшается при охлаждении) вплоть до нижней границы интервала стеклования и далее остается

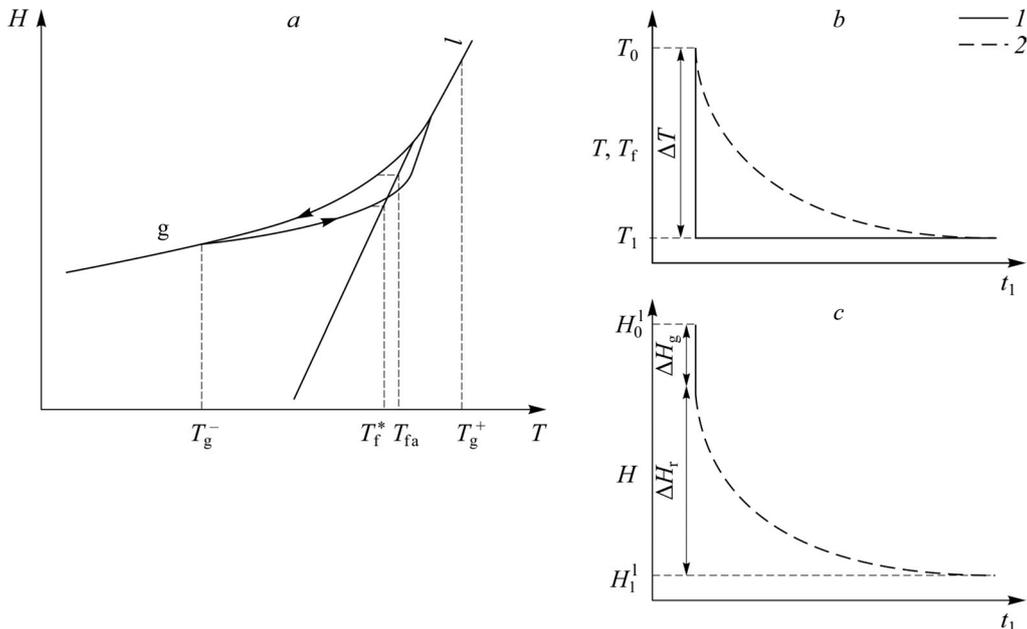
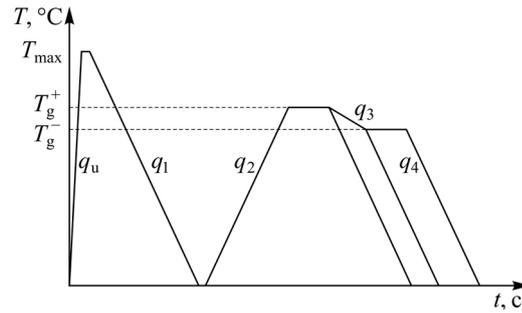


Рис. 3. Температурная зависимость энтальпии при равномерном нагреве и охлаждении (а), равновесная температурная зависимость (b) и изменение энтальпии при температурном скачке ΔT (с).

а: T_g^- и T_g^+ — границы интервала стеклования; б: 1 — T , °C, 2 — T_f , °C.

постоянной. Также существует понятие «структурной температуры». Оно используется при анализе экспериментальных данных и в дифференциально сканирующей калориметрии (ДСК) при определении температуры стеклования T_g как предельной структурной температуры $T_f^* = T_g$. Температура T_f^* «замороженного» состояния стекла (индекс «г» на рис. 3а) определяется как интегральная характеристика кривой теплоемкости c_p :

$$\int_{T^+}^{T_f^*} (c_p^l - c_p^g) dT_f = \int_{T^+}^{T^-} (c_p - c_p^g) dT, \quad (1)$$

здесь $T^+ \gg T_g^+$ — температура за интервалом стеклования, теплоемкость c_p^l принимает значение, соответствующее равновесному состоянию; T^- — температура ниже интервала стеклования: $T^- \ll T_g^-$; c_p^g — теплоемкость стекла в «замороженном» состоянии [4, 5], при этом

$$c_p^g = \lim_{\substack{\Delta T \rightarrow 0 \\ t-t_1 \rightarrow 0}} \frac{H - H_0^l}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta H_g}{\Delta T},$$

$$c_p^l = \lim_{\substack{\Delta T \rightarrow 0 \\ t-t_1 \rightarrow \infty}} \frac{H - H_0^l}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta H_g + \Delta H_r}{\Delta T}, \quad (2)$$

здесь $(\Delta H = H - H_0^l)$ — изменение энтальпии при температурном скачке $\Delta T = T_0 - T_1$ (рис. 3б). Экспериментальные наблюдения за свойствами стекол, в том числе энтальпией H , показывают, что при изобарическом скачкообразном изменении температуры в области стеклования изменение свойств разделяется на два вклада: мгновенное (изоструктурное) ΔH_g и релаксационное (структурное) ΔH_r (рис. 3с).

Эволюция структурной температуры может быть записана как

$$\frac{T_f - T_1}{\Delta T} = \frac{H - H_1^l}{\Delta H_r}. \quad (3)$$

С учетом (1) и (2) имеет место соотношение которое в настоящей работе используется для определения температурных зависимостей свойств стекла в интервале стеклования:

$$\frac{dT_f}{dT} = \frac{c_p(T) - c_p^g(T)}{c_p^l(T) - c_p^g(T)}, \quad (4)$$

заметим, что при $T \gg T_g^+$ $\frac{dT_f}{dT} = 1$, а при $T \ll T_g^-$ $\frac{dT_f}{dT} = 0$.

Аналитический вид изменения структурной температуры согласно модели ТНММ [4, 7, 9–11] может быть записан в виде

$$T_f = T_0 + \int_0^t (1 - M_s(\xi - \dot{\xi})) \frac{dT}{d\xi} d\xi, \quad (5)$$

где M_s — функция структурной релаксации свойств стекол, описываемая функцией Кольрауша:

$$M_s(\xi) = e^{-\left(\frac{\xi}{\tau_r}\right)^b} = e^{-\left(\frac{\xi K_r}{\eta_r}\right)^b}, \quad (6)$$

здесь вместо текущего времени t используется «приведенное» время ξ , которое согласно методу температурно-временной аналогии связано с текущим временем безразмерной

универсальной функцией $f(T)$ в виде соотношения $d\xi = f(t)dt$. Обычно приведенное время связывают с его определением через сдвиговую вязкость $\xi(t) = \int_0^t \frac{\eta_r}{\eta(t)} dt$ или времена релаксации свойства $\xi(t) = \int_0^t \frac{\tau_r}{\tau(t)} dt$, где η_r — вязкость сравнения (сдвиговая вязкость при произвольно выбранной температуре сравнения (T_r) , $\eta(t)$ — текущая вязкость, τ_r — время релаксации при температуре сравнения, $K_r = \frac{\eta_r}{\tau_r}$, $0 < b < 1$.

Изменение структурной температуры сказывается на изменении удельной теплоемкости, вязкости и линейного коэффициента термического расширения. Удельная изобарическая теплоемкость в интервале стеклования описывается с помощью соотношения (4) в виде

$$c_p = c_p^g + (c_p^l - c_p^g) \frac{dT_f}{dT}, \quad (7)$$

аналогичный аналитический вид имеет выражение для коэффициента термического расширения:

$$\alpha_p = \alpha_g + (\alpha_l - \alpha_g) \frac{dT_f}{dT}, \quad (8)$$

Аналитическая зависимость вязкости от температуры и структурного изменения выбрана как было предложено в работе [3] в виде линейного соотношения, связывающего логарифм приведенной вязкости с величиной $1/T$:

$$\lg \frac{\eta}{\eta_0} = B_l (T_f^{-1} - T_0^{-1}) + B_g (T^{-1} - T_f^{-1}), \quad (9)$$

здесь η_0 — вязкость при температуре T_{\max} , B_l и B_g — коэффициенты, характеризующие температурные зависимости η в условиях равновесной и замороженной структур соответственно.

Теплообмен в сопряженной системе стекломаталлокомпозитного стержня осуществляется теплопроводностью. Для случая длинного стержня и цилиндрической симметрии при условии зависимости всех теплофизических коэффициентов от температуры и материала уравнение теплопроводности имеет вид

$$c(M, T) \rho(M) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(M, T) r \frac{\partial T(M, t)}{\partial r} \right), \quad (10)$$

$$t > 0, \quad M \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$\Omega_1 = \{r : 0 \leq r \leq R_1\}, \quad \Omega_2 = \{r : R_1 \leq r \leq R_2\},$$

здесь $c(M, T)$, $\rho(M)$, $\lambda(M, T)$ — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности, зависящие от координаты и температуры. Зависимость теплофизических коэффициентов от координат можно записать следующим образом:

$$c, \rho, \lambda = \begin{cases} c_1, \rho_1, \lambda_1, & M \in \Omega_1, \\ c_2, \rho_2, \lambda_2, & M \in \Omega_2, \end{cases} \quad (11)$$

Для отдельных видов стекол коэффициент теплопроводности стекла λ_1 может сильно зависеть от температуры, поэтому считаем, что $\lambda_1(T)$, а $\lambda_2 = \text{const}$. Для стеклянного

слоя в (11) удельная теплоемкость на всем температурном интервале рассчитывается в виде

$$c_1 = \begin{cases} c_1^l, & \frac{dT_f}{dT} > 1 - \delta, \\ c_1^g + (c_1^l - c_1^g) \frac{dT_f}{dT}, & 1 - \delta \leq \frac{dT_f}{dT} \leq \delta, \\ c_1^g, & \frac{dT_f}{dT} < \delta, \end{cases} \quad (12)$$

здесь δ — безразмерная величина, зависящая от точности измерения $\frac{dT_f}{dT}$ и задаваемая самостоятельно при вычислениях. Поскольку рассматривается теплообмен в длинном цилиндре в условиях осевой симметрии, то температура в каждой точке M будет функцией только радиуса и времени — $T(r, t)$. При записи краевых условий будем использовать принятые предположения в явном виде: $|T(r, t)| < +\infty$ при $r \rightarrow 0$.

На границе сопряжения стекла Ω_1 и металла Ω_2 выполняются условия теплообмена при идеальном контакте:

$$\begin{aligned} T|_{r=R_1-0} &= T|_{r=R_1+0}, \\ \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1-0} &= \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1+0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Температурный режим разделяется на два основных этапа. На первом этапе рассматривается процесс получения стеклометаллокомпозиата, на втором этапе происходит отжиг с целью управления остаточными напряжениями (рис. 2).

В свою очередь, на первом этапе можно выделить три подэтапа: I_a — сборка из стального цилиндра со стеклянным сердечником устанавливается в камеру печи и нагревается методом индукционного нагрева до температуры, при которой стекло, доведенное до размягченного состояния, под давлением припаивается к стальному цилиндру, I_b — производится выдержка при максимальной температуре для обеспечения вакуумноплотного соединения, I_c — охлаждение готовой композиции. С учетом обозначенных этапов условие на внешней поверхности имеет вид:

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \nu(T - T_e) - \sigma\varepsilon(T^4 - T_e^4) + 10^{-3} \cdot H^2 \cdot \sqrt{\rho\mu f}, \quad t \in I_a, \quad (14)$$

$$T|_{r=R_2} = T_{\max}, \quad t \in I_b, \quad (15)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \nu(T - T_e) - \sigma\varepsilon(T^4 - T_e^4), \quad t \in I_c, \quad (16)$$

здесь ν — коэффициент теплопроводности, T_e — температура окружающей среды, σ — постоянная Больцмана, ε — коэффициент излучения, H — амплитуда магнитного поля, ρ — электромагнитное сопротивление нагреваемого тела, μ — коэффициент магнитной проницаемости, f — частота электромагнитного поля.

На втором этапе производится отжиг изделия. Целью отжига является снятие внутренних напряжений, возникающих в процессе неравномерного охлаждения стекла. Интервал отжига ограничен значениями вязкости $10^{12} - 10^{13,5}$ Па·с. Со стороны высоких температур интервал ограничен высшей температурой отжига $T_{от}^B$ (соответствует вязкости

на уровне 10^{12} Па·с, выдержка при которой позволяет в течение трех минут устранить 95 % внутренних напряжений без деформации изделия. Вторая характерная температура на интервале отжига $T_{от}^H$ ниже $T_{от}^B$ на 50–150 °С. Выдержка при $T_{от}^H$ в течение трех минут устраняет только 5 % внутренних напряжений. Скорость охлаждения в интервале $[T_{от}^H, T_{от}^B]$ должна быть минимальной, а за пределами интервала — любой.

Отжиг можно проводить двумя способами: контролируемым охлаждением на этапе I_c или повторным нагревом с последующим охлаждением, разделяющимся на три этапа — II_a, II_b, II_c. Повторный нагрев можно осуществлять методом индукционного нагрева в камере индукционной печи с последующим размещением образца в камере муфельной печи для контролируемого охлаждения. На этапе II_a проводится охлаждение от максимальной (T_{max}) до верхней температуры отжига ($T_{от}^B$) с произвольной скоростью, на этапе II_b — охлаждение от $T_{от}^B$ с контролируемой скоростью до нижней температуры отжига $T_{от}^H$, на этапе II_c — охлаждение от $T_{от}^H$ до нормальной температуры с произвольной скоростью. При этом краевые условия на внешней поверхности металлического цилиндра имеют вид:

$$t \in \text{II}_{a,b,c} \lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_2} = \nu (T - T_e^{a,b,c}) - \sigma \varepsilon (T^4 - T_e^4), \quad (17)$$

здесь $T_e^{a,b,c}$ — температура среды, такая что $\frac{\partial T_e^a}{\partial t} = q_a$, $\frac{\partial T_e^b}{\partial t} = q_b$ и $\frac{\partial T_e^c}{\partial t} = q_c$.

Краевые условия (14)–(17) на свободных поверхностях показывают, что тепло отводится только через внешнюю поверхность. Поставленная задача является существенно нелинейной, поэтому решается приближенно.

Численный метод и алгоритм решения

Краевые задачи для нелинейных многомерных параболических уравнений решаются приближенно. Одним из наиболее универсальных и эффективных методов по-прежнему остается метод конечных разностей. Для области $\Omega = (0 \leq r \leq R_2, 0 \leq t \leq T)$ строится прямоугольная сетка $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$:

$$\bar{\omega}_1 = \left\{ r_i = i\Delta r, \quad i = 0, 1, \dots, I_1, \dots, I, \quad r(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{I_1} \Delta r = R_1, \quad \sum_{i=I_1}^I \Delta r = R_2 \right\},$$

$$\bar{\omega}_2 = \left\{ t_n = n\Delta t_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \sum_{n=1}^N \Delta t_n = t_{\text{кон}} \right\}.$$

Введем на сетке $\bar{\omega}$ сеточную функцию $T_i^n = T(r_i, t_n)$. Для численного решения нелинейных уравнений типа (10) удобно использовать чисто неявные схемы, которые устойчивы и монотонны при любых шагах [14]. Существует два основных варианта таких схем. В первой, линейной, коэффициенты λ и c на $(n+1)$ -слое по времени зависят от температуры предыдущего слоя (n). Реализация схемы сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей и диагональным преобладанием элементов. Во второй, нелинейной, схеме коэффициенты λ и c зависят от температуры на текущем $(n+1)$ -слое, поэтому система становится нелинейной и решается численно

итерационными методами, например, методом последовательных приближений. Следует отметить, что при наличии только одной итерации метод совпадает с линейным. В настоящей работе с учетом акцента на интервал стеклования рассматривается линейный вариант, при котором уравнение (10) представлено в виде

$$\frac{1}{i\Delta r^2} \left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \lambda_{i+\frac{1}{2}}^n (T_{i+1}^{n+1} + T_i^{n+1}) - \left(i - \frac{1}{2} \right) \lambda_{i-\frac{1}{2}}^n (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right) = c_i^n \rho_i \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t_n}, \quad (18)$$

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n), \quad \lambda_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2} (\lambda_i^n + \lambda_{i-1}^n), \quad \lambda_i^n = \lambda_i^n (T_i^n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Схема абсолютно устойчива, консервативна, монотонна и имеет погрешность аппроксимации $O(\Delta t + \Delta r^2)$.

Удельная теплоемкость в системе (18) удовлетворяет (7) и ее аппроксимация для $i = 0, 1, \dots, \Pi$ при $k = 1$ имеет вид

$$c_i^n = \begin{cases} c^l, & \frac{T_{\tilde{f}i}^n - T_{\tilde{f}i}^{n-1}}{T_i^n - T_i^{n-1}} > 1 - \delta, \\ c^g + (c^l - c^g) \frac{T_{\tilde{f}i}^n - T_{\tilde{f}i}^{n-1}}{T_i^n - T_i^{n-1}}, & 1 - \delta \leq \frac{T_{\tilde{f}i}^n - T_{\tilde{f}i}^{n-1}}{T_i^n - T_i^{n-1}} \leq \delta, \\ c^g, & \frac{T_{\tilde{f}i}^n - T_{\tilde{f}i}^{n-1}}{T_i^n - T_i^{n-1}} \leq \delta. \end{cases} \quad (19)$$

Для определения удельной теплоемкости должна быть аппроксимирована фиктивная температура. Применение принципа суперпозиции к описанию структурной релаксации (5) может быть представлено следующим образом. Описание температурных полей в каждой точке стеклообразующей области может быть реализовано как набор постоянных значений T_i^n на малых временных интервалах Δt . При переходе с $(n - 1)$ -интервала на n -й происходит скачок температур ΔT_i^n и фактическая температура T_i^n изменяется мгновенно.

При этом $T_{\tilde{f}i}^n$ мгновенно изменится не может, поэтому возникает разность между структурной и фактической температурой $\Delta T_{\tilde{f}i}^n = T_{\tilde{f}i}^n - T_i^n$, которая релаксирует в следующих интервалах, поэтому значение $T_{\tilde{f}i}^n$ равно начальному значению структурной температуры и сумме всех релаксационных процессов от начального до заданного момента времени. Релаксация структуры приводит к изменению свойств (7)–(9), в том числе и вязкости, которая в свою очередь оказывает влияние на релаксацию структуры. Для ее аппроксимации используем линейную схему и формулу прямоугольников для вычисления интеграла (7) по аналогии с удельной теплоемкостью и коэффициентом теплопроводности. Т.е. с предыдущего n -го слоя по времени берется значение вязкости, потом определяется структурная температура, затем вязкость, и уже после этого определяется скорость релаксационных процессов на $(n + 1)$ -слое:

$$T_{\tilde{f}i}^{n+1} = T_{\max}^{n+1} + \sum_{m=1}^{n+1} \left(1 - e^{-\left(\frac{K_r}{\eta_r} (\xi_i^{n+1} - \xi_i^{m-1}) \right)^b} \right) (T_i^m - T_i^{m-1}),$$

$$\xi_i^{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\eta_r}{\eta_i^{m-1}} \Delta t_m, \quad (20)$$

$$\lg \frac{\eta_{ji}^{n+1}}{\eta_r} = B_1 \left(\frac{1}{T_{fi}^{n+1}} - \frac{1}{T_{\max}^0} \right) + B_g \left(\frac{1}{T_i^{n+1}} - \frac{1}{T_{fi}^{n+1}} \right), \quad n = 0, \dots, N,$$

здесь T_{\max}^0 — начальные условия для определения фиктивной температуры после индукционного нагрева. Аппроксимация граничных условий проводилась с учетом сохранения погрешности аппроксимации $O(\Delta t + \Delta r^2)$ стандартными в теории разностных схем методами [14], при этом краевые условия при $r = 0$ и при $r = R_1$ являлись постоянными:

$$i = 0: \frac{T_0^{n+1} - T_0^n}{\Delta t_n} = \frac{4}{\Delta r^2} \lambda_{1/2}^n (T_1^{n+1} - T_0^{n+1}), \quad \lambda_{1/2}^n = \frac{\lambda_0^n + \lambda_1^n}{2}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} i = I1: & \frac{\lambda_{I1-1/2}^n (T_{I1}^{n+1} - T_{I1-1}^{n+1}) \left(1 - \frac{1}{I1}\right) + \frac{c_{1I1}^n \rho_1 \Delta r}{\Delta t_n} (T_{I1-1}^{n+1} - T_{I1-1}^n) = \\ & = \frac{\lambda_{I1+1/2}^n (T_{I1+1}^{n+1} - T_{I1}^{n+1}) \left(1 + \frac{1}{I1}\right) - \frac{c_{2I1} \rho_2 \Delta r}{\Delta t_n} (T_{I1+1}^{n+1} - T_{I1+1}^n), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\lambda_{I1+1/2}^n = \frac{\lambda_{2I1}^n + \lambda_{I1+1}^n}{2}, \quad \lambda_{I1-1/2}^n = \frac{\lambda_{I1}^n + \lambda_{I1-1}^n}{2}.$$

На внешней границе при $r = R_2$ условия изменяются в зависимости от этапа от (14) до (17). Приведем аппроксимацию самого сложного условия (14), моделирующего индукционный нагрев ($t \in I_a$):

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{I-1/2}^n (T_I^{n+1} - T_{I-1}^{n+1}) (1 - 1/I) + \frac{c_2 \rho_2 \Delta r}{\Delta t_n} (T_{I-1}^{n+1} - T_{I-1}^n) = \\ & = \theta (T_I^{n+1} - T_c) - \sigma \varepsilon \left((T_I^{n+1})^4 - T_c^4 \right) + 10^{-3} H^2 \sqrt{\rho \mu f}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\lambda_{I-1/2}^n = \frac{\lambda_{2I}^n + \lambda_{2I+1}^n}{2}.$$

Остальные условия аппроксимируются аналогично.

Алгоритм решения системы (13), (18), (22) с краевыми условиями (15) или (17) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений методами прогонки, структурные изменения на каждом временном слое определяются уравнениями (17)–(18). Краевые условия с излучением на внешней поверхности (14) и (16) нелинейны, поэтому система (18)–(22) с краевыми условиями (14) или (16) решается также методом прогонки, но имеет модифицированный вид: учитывает одно нелинейное уравнение на I -ом шаге. По существу система состоит из I линейных уравнений с трехдиагональной матрицей и одного нелинейного уравнения, содержащего неизвестные с шагов $(I - 1)$ -го и I -го, следовательно по методу прогонки допускается последовательное выражение неизвестных с предыдущего шага. Таким образом, последнее нелинейное уравнение содержит одно неизвестное T_1^{n+1} и является уравнением четвертой степени с действительными коэффициентами. Формально оно имеет вид

$$AX^4 + BX + C = 0, \quad X = T_1^{n+1},$$

и допускает аналитическое представление корней, три из которых являются посторонними в данной постановке, поскольку представляют собой пару сопряженных комплексных чисел и отрицательное действительное число. Следовательно, имеем единственное допустимое аналитическое решение, подставляя которое в стандартные формулы метода прогонки, получаем все остальные неизвестные системы. При рассмотрении процесса теплообмена в цилиндрическом слое с нелинейными условиями типа (14) или (15) на внешней поверхности внутреннего радиуса приведенный выше алгоритм не применим. В этом случае задача для системы нелинейных уравнений решается численно итерационными методами.

Результаты численных расчетов

При численном расчете использовались данные, приведенные в табл. 1, и режимы, приведенные в табл. 2, а также дополнительные параметры: $T_{\max} = 760 \text{ }^\circ\text{C}$, $R_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $R_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $f = 50 \text{ Гц}$, $\sigma = 5,670367 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4}$, $H = 4 \cdot 10^4 \text{ А/м}$. Расчеты показали, что в начале охлаждения структурная температура совпадает с текущей температурой, а далее отстает и стабилизируется, становится постоянной. Аналогично при последующем нагреве она отклоняется от постоянного значения и через определенное время совпадает с изменяющейся температурой и т.д., при следующем охлаждении все повторяется (рис. 4). Детальное поведение фиктивной температуры приведено на отдельных графиках ниже

Таблица 1

Теплофизические коэффициенты и параметры, позволяющие их аппроксимировать [4, 17]

Свойства материала	Стекло С52-1	Сталь С20
c_1^l , Дж/(кг·°C)	2950	477
c_1^g , Дж/(кг·°C)	820	
λ , Вт/(м·°C)	$\lambda = (0,81 + 0,213 \cdot 10^{-2}T - 1,02 \cdot 10^{-6}T^2)$	$\lambda = (29 - 0,03T)$
ρ_1 , кг/м ³	2300	7876
B_1 , °C	18763	–
B_g , °C	13763	–
$\alpha_1 \cdot 10^{-5}$, °C ⁻¹	210	152
α_g , °C ⁻¹	52	121
Lg η_t	10,25	–
Lg K_r	10,7	–
b	0,65	0,65
μ	–	100
ρ , Ом·м	–	$16,9 \cdot 10^8$
ε	–	0,55

Таблица 2

Скорости изменения температуры $q = \frac{\partial T}{\partial t}$ на определенных этапах, показанных на рис. 2

№ режима	q_u , °C/мин	q_1 , °C/мин	q_2 , °C/мин	q_3 , °C/мин	q_4 , °C/мин
1	90	10	90	1,5	1,5
2				3	3
3		10	10	1,5	1,5
4				3	3
5		3	3	3	3

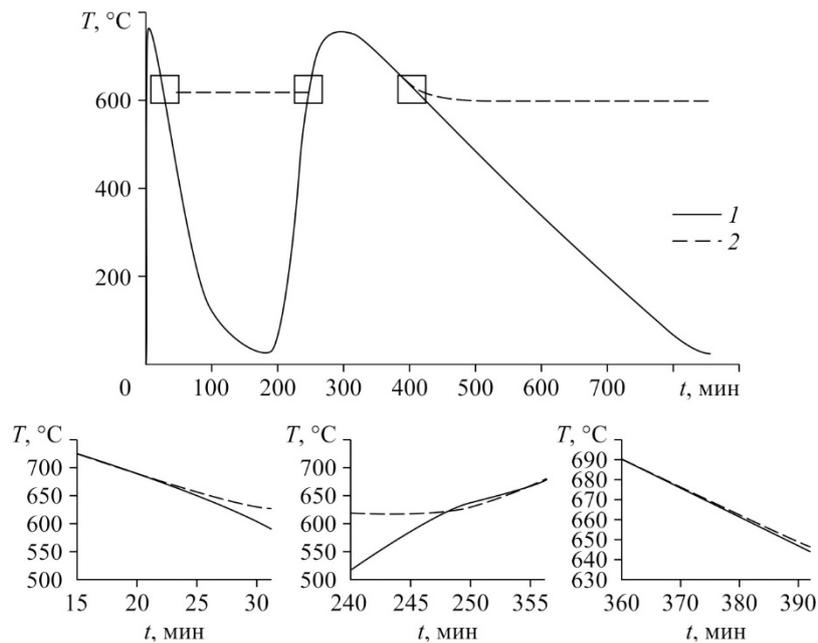


Рис. 4. Изменение температуры в стекле при $r = R_1$ по режиму 3 из табл. 2.
 $1 - T(t)$, $2 - T_f(t)$.

основного, на котором эти фрагменты помечены квадратами, последовательно слева направо. Это характерное изменение фиктивной температуры позволяет определить границы интервала стеклования как температур, при которых скорость изменения фиктивной температуры в зависимости от температуры (рис. 5а) начинает отличаться от 0 и от 1, что означает соответственно отличие от стекла, находящегося в замороженном состоянии, и равновесного расплава и отражается на изменениях удельной теплоемкости (7), коэффициента линейного температурного расширения (8) и вязкости (9) (рис. 5b–5d). Полученные кривые не противоречат релаксационной теории стеклования. В работе [5] было термодинамически обосновано отклонение удельной теплоемкости от стабилизированного (замороженного) и равновесного состояний (заштрихованные области на рис. 6) как результата внутренних экзотермических (рис. 6a) и эндотермических (рис. 6b) процессов. При повторном нагреве после охлаждения высвобождается часть избыточного теплосодержания, которое было заморожено в стекле за счет релаксационных процессов, поэтому для повышения температуры в интервале приблизительно между T_1 и T_2 , требуется меньше тепла, теплоемкость становится меньше c_p^g , при этом значение фиктивной температуры для нового состояния смещается в $T_f' < T_f$. При повышении температуры система увеличивает свой тепловой запас, термодинамические функции становятся как у равновесной жидкости до получения замороженной структуры стекла (или первоначального стекла) с фиктивной температурой T_f , поэтому теплоемкость принимает значение больше c_p^g .

При экспериментальном получении стекломаталлокомпозитных стержней методом индукционного нагрева было замечено более быстрое охлаждение образцов, чем в модельных расчетах. Преодолеть разницу между экспериментальными данными и результатами моделирования удалось за счет учета излучения с поверхности металлического

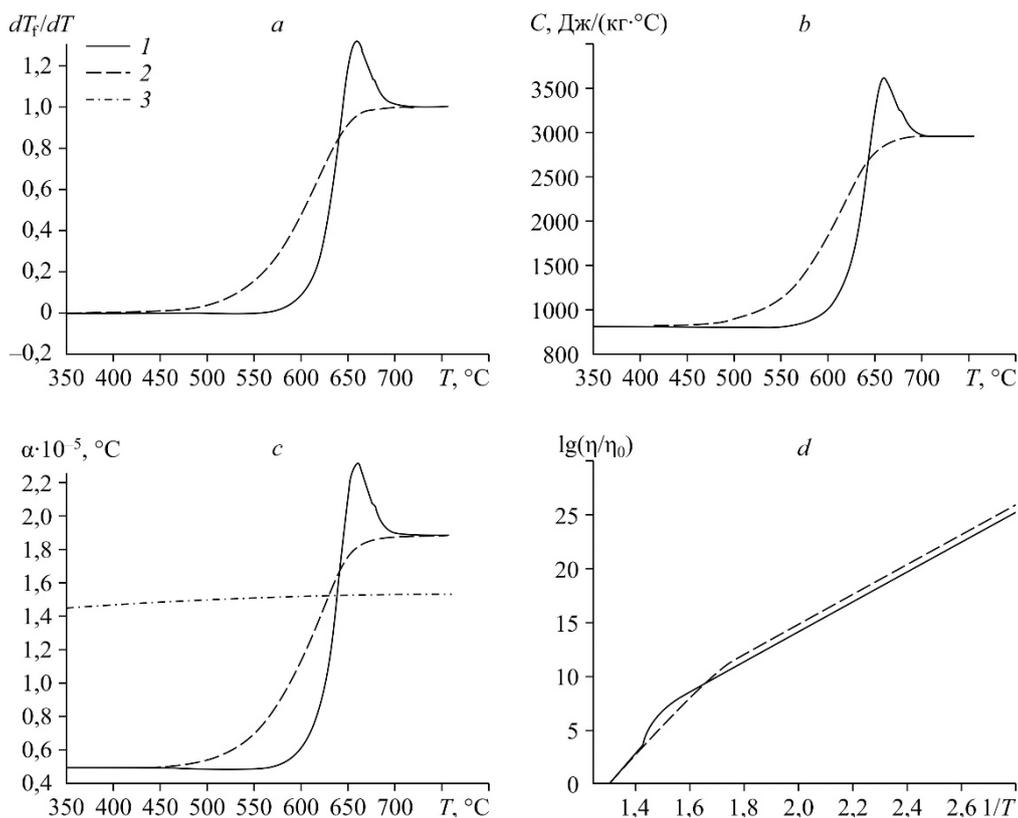


Рис. 5. Температурные зависимости характера изменения фиктивной температуры (а), удельной теплоемкости (b), коэффициента линейного температурного расширения (с) и вязкости при отжиге (d) по режиму 3 из табл. 2 при $r = R_1$.

1 — нагрев, 2 — охлаждение,
3 — изменение коэффициента линейного температурного расширения стали.

цилиндра. На графиках рис. 7 продемонстрирована разница при моделировании с крайними условиями (14)–(17) с учетом и без учета излучения.

Анализ кривых изменения теплофизических свойств при отжиге для различных режимов (рис. 8) показал, что с увеличением скорости нагрева верхняя температура отжига (принятая как верхняя граница интервала стеклования) смещается в сторону более высоких температур и для выбранных материалов лежит в области температур $700 \div 750$ °C, в то время как при нагреве с меньшими скоростями верхняя температура отжига лежит

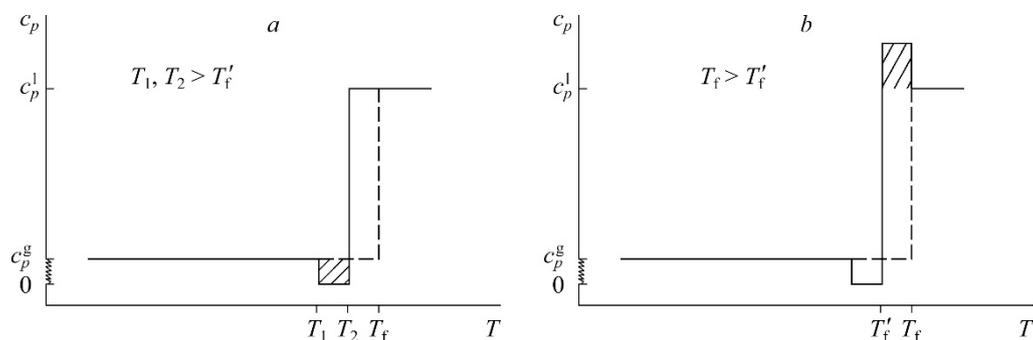


Рис. 6. Формирование эффективной теплоемкости при нагревании стекла [5].

Экзо- (a) и эндотермические (b) процессы.

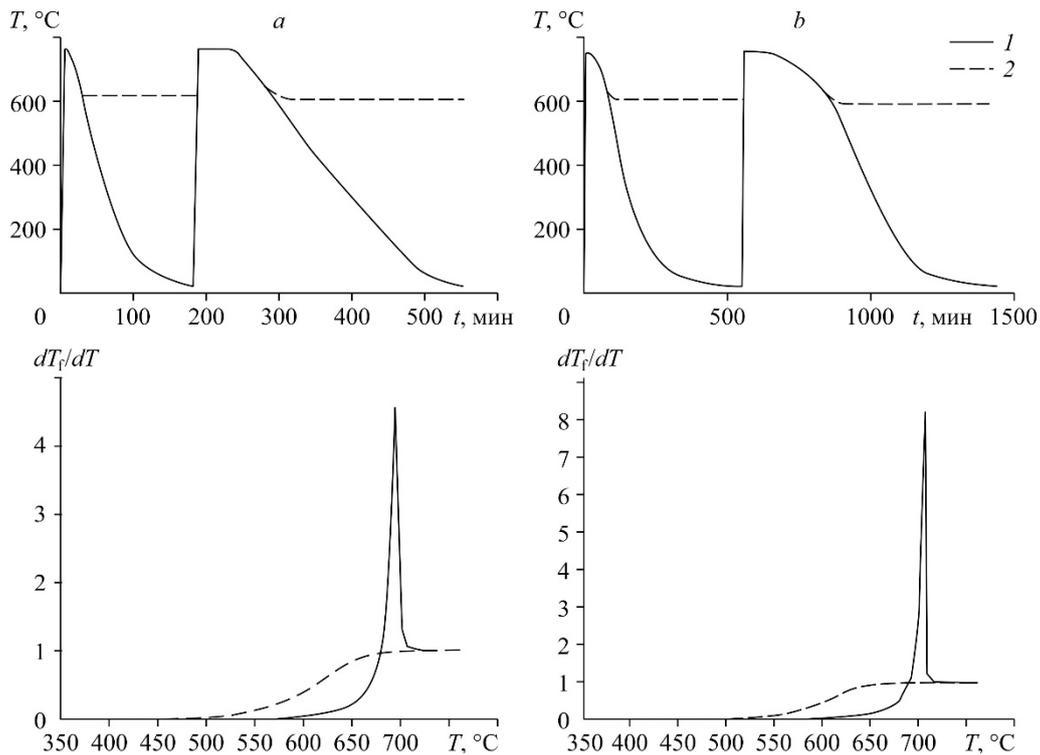


Рис. 7. Распределение температуры при $r = R_1$ по режиму 1 из табл. 2 с учетом (а) и без учета (б) излучения.
1 — $T(t)$, 2 — $T_f(t)$.

в интервале 650–700 °С. Расчетные кривые коэффициентов линейного температурного расширения при высоких скоростях нагрева демонстрируют в интервале стеклования быстрый рост и достигают пикового значения, почти в 5 раз превышающего значения коэффициента линейного термического расширения. Заметим, что нижняя температура отжига (нижняя граница интервала стеклования) для всех режимов практически одинакова и принадлежит интервалу (480, 530)°С.

На рис. 5 и 8с можно выделить температуру, при которой графики коэффициентов линейного температурного расширения стекла и металла при нагреве и охлаждении имеют точку пересечения. При этой температуре напряжение в спае меняет знак. Для плоских спаев принято выбирать режим охлаждения при отжиге так, чтобы напряжения растяжения, возникающие при охлаждении, как можно больше снизились хотя бы за счет увеличения сжимающих напряжений. Поэтому скорость снижения температуры выбирается наименьшей в области между верхней температурой отжига и точкой пересечения графиков коэффициентов линейного температурного расширения стекла и металла (рис. 9–11).

При сравнении зависимостей изменения температуры и свойств от диаметра стекла (при одинаковом отношении толщины металлической оболочки к толщине стекла) замечено, что для диаметров меньше $2 \cdot 10^{-2}$ м разница в изменении температуры по радиусу не превосходит 2 °С (рис. 9). Видно, что моделируемые в задаче свойства для всех точек по радиусу имеют практически одинаковое значение. При увеличении диаметра стеклянного цилиндра до $5 \cdot 10^{-2}$ м возрастает разница в распределении температуры по радиусу. Это особенно заметно при нагреве, где она может достигать 20 °С. При охлаждении разница снижается и в стеклянном цилиндре составляет не более 5 °С, что соответственно отражается на рассматриваемых свойствах (рис. 10).

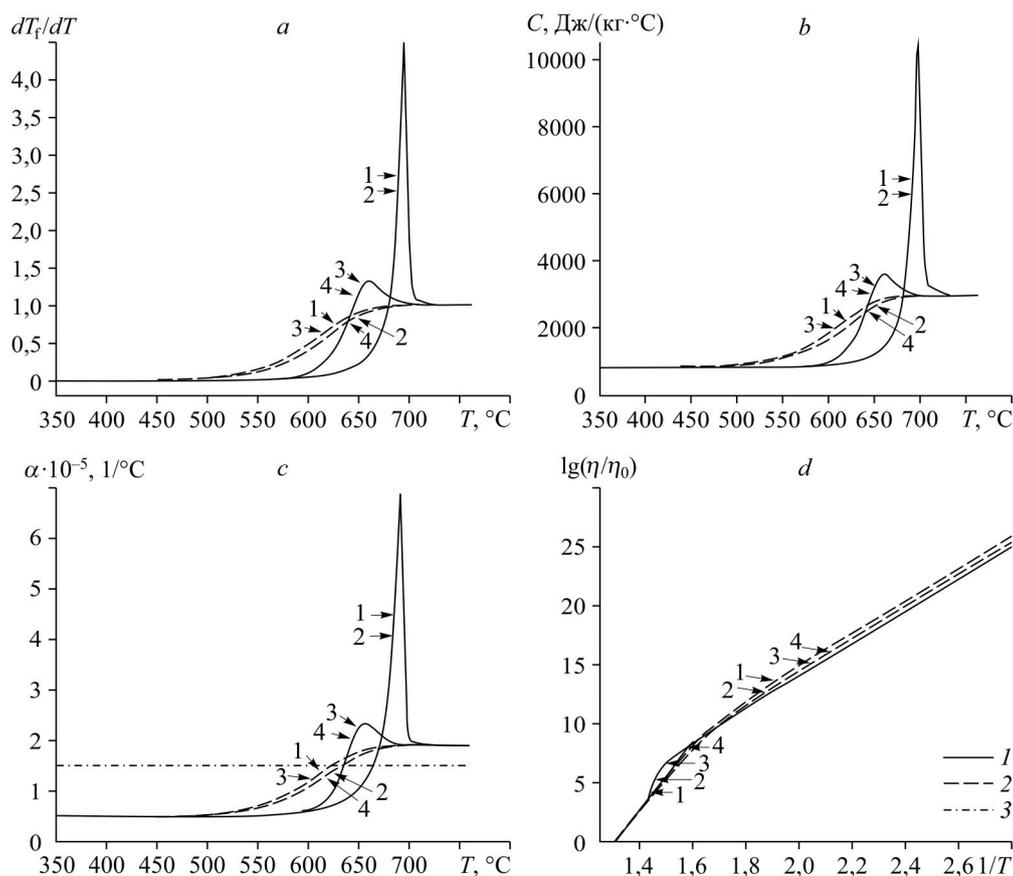


Рис. 8. Температурные зависимости характера изменения фиктивной температуры (а), удельной теплоемкости (b), коэффициента линейного температурного расширения (с) и вязкости при отжиге (d) по режимам с 1 по 4 из табл. 2 при $r = R_1$.

1 — нагрев, 2 — охлаждение,

3 — изменение коэффициента линейного температурного расширения стали.

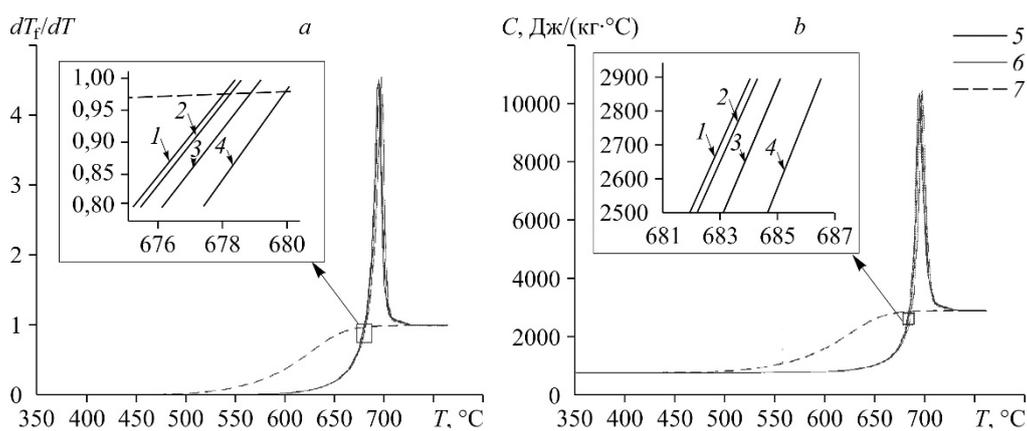


Рис. 9. Температурные зависимости характера изменения фиктивной температуры (а) и удельной теплоемкости при отжиге (b) по режиму 1 из табл. 2.

$r = 0$ (1), 0,0013 (2), 0,0027 (3), 0,0040 (4) м; 5 — нагрев, 6 — охлаждение, 7 — изменение коэффициента линейного температурного расширения стали.

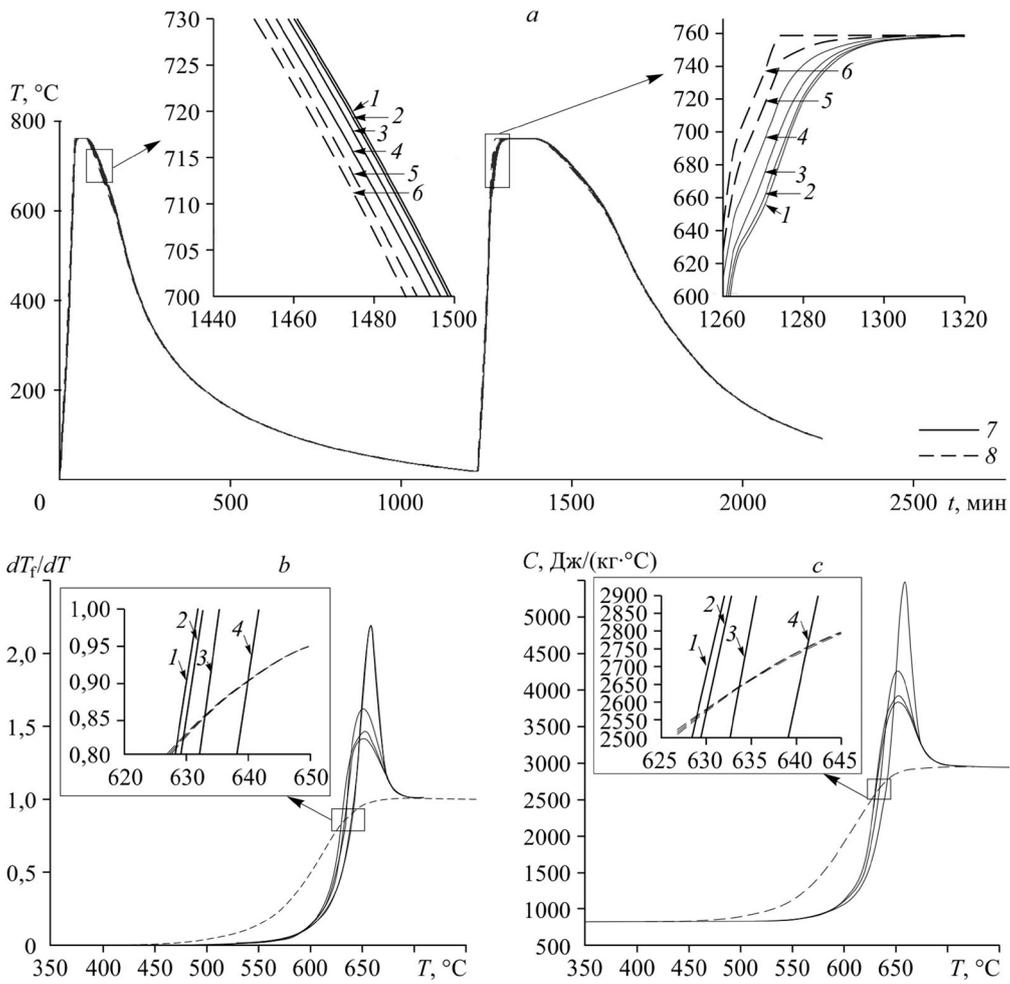


Рис. 10. Изменение температуры в разных точках по радиусу (а), характер изменения фиктивной температуры (b) и удельной теплоемкости (с) при отжиге при $R_1 = 4 \cdot 10^{-2}$ м и $R_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ м по режиму 1 из табл. 2. В центре стеклянного цилиндра (1), $r = 1,3 \cdot 10^{-2}$ (2), $2,7 \cdot 10^{-2}$ (3), $4 \cdot 10^{-2}$ (4), $4,5 \cdot 10^{-2}$ (5), $5 \cdot 10^{-2}$ м (6); а: стекло (7), сталь (8), b, c: нагрев (7), охлаждение (8).

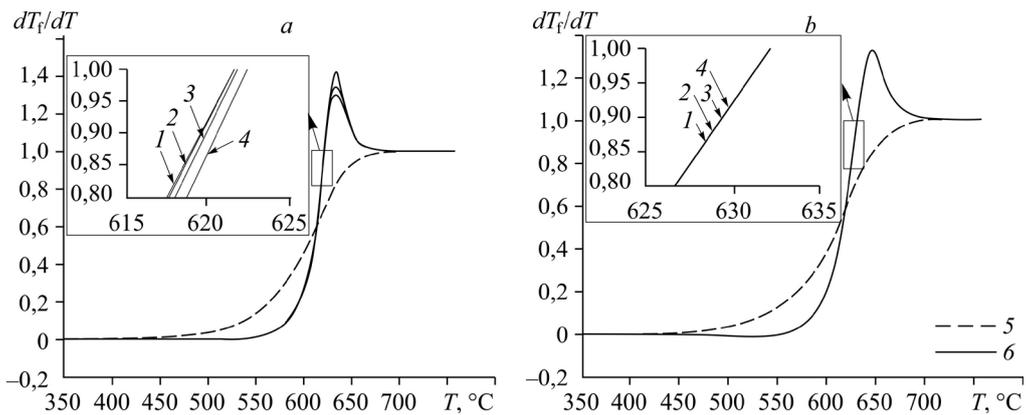


Рис. 11. Характер изменения фиктивной температуры при отжиге. а — $R_1 = 4 \cdot 10^{-2}$ м и $R_2 = 5 \cdot 10^{-2}$ м по режиму 5 из табл. 2: 1 — в центре стеклянного цилиндра, $r = 1,3 \cdot 10^{-2}$ (2), $2,7 \cdot 10^{-2}$ (3), $4 \cdot 10^{-2}$ м (4); 5 — нагрев, 6 — охлаждение; б — $R_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ м и $R_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м по режиму 5 из табл. 2. В центре стеклянного цилиндра (1), $r = 1,3 \cdot 10^{-3}$ м (2), $2,7 \cdot 10^{-3}$ (3), $4 \cdot 10^{-3}$ м (4); 5 — нагрев, 6 — охлаждение.

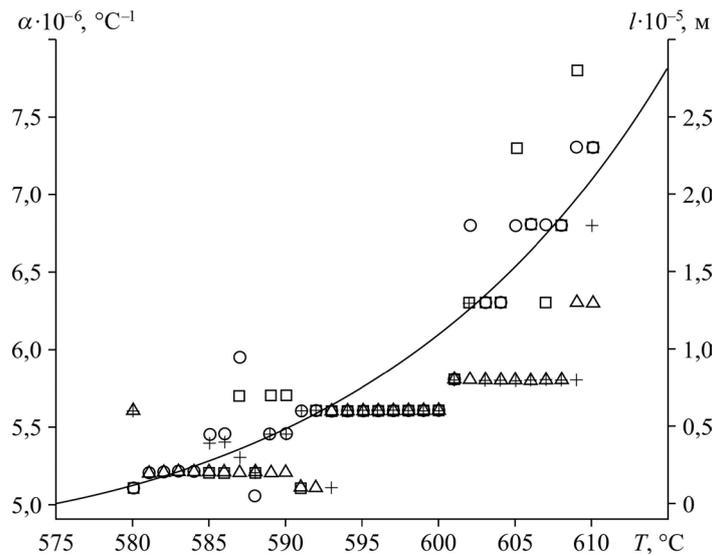


Рис. 12. Результаты экспериментальных исследований по усадке (символы) и данные численной аппроксимации ТКЛР (линия) для режима 4 из табл. 2.

Для получения апробации численно решенной задачи (1)–(17) была проведена серия экспериментов по измерению усадочных перемещений при нагреве стеклянных стержней. Экспериментальные исследования проводились по методике, предложенной в работе [16] для стеклянных цилиндров диаметром 8 мм при контролируемом нагреве со скоростью 10 °С/мин на оригинальном лабораторном оборудовании типа вискозиметра грузового типа. В работе [16] было показано, что усадочные перемещения в стекле имеют S-образный профиль, а температурный интервал, которому принадлежит профиль практически совпадает с границами интервала стеклования. Сопоставление полученных экспериментальных данных с расчетными значениями коэффициента линейного температурного расширения (режим № 4, табл. 2) представлено на рис. 12. Следует заметить, что качественно характер изменения ТКЛР описан экспериментальными данными по усадке достаточно точно, поэтому предложение определять интервал стеклования по методике измерения усадочных перемещений для стеклянных стержней является обоснованным.

Заключение

Поставлена и решена задача сложного теплообмена в двухслойном цилиндрическом стеклометаллокомпозите на всем технологическом интервале его изготовления и последующего отжига с учетом процесса стеклования. Моделирование процесса стеклования рассмотрено в рамках релаксационной теории и модели ТНММ. Разработан алгоритм численного решения поставленной задачи. При численном моделировании исследованы различные режимы отжига, в том числе режим, при котором нагрев при отжиге проводится индукционным методом. Показано, что в случае индукционного нагрева кривые коэффициентов линейного температурного расширения характеризуются быстрым ростом в интервале стеклования, достигают максимального значения, почти в три раза превышающего значения в режимах нагрева с меньшей скоростью, и, кроме того, существенно превосходят значения коэффициента линейного термического расширения стального слоя, что может приводить к дополнительному росту напряжений при нагреве на этапе отжига, притом не только в стеклянном цилиндре, но и в металлической оболочке.

Список литературы

1. Пиккуль В.В. Эффективность стекломаталлокомпозита // Перспективные материалы. 2000. № 6. С. 63–65.
2. Зимин Л.С., Байкин А.В. Применение индукционного нагрева в промышленных технологиях // Состояние и перспективы развития электротехнологии: матер. междунар. науч.-техн. конф. (XVII Бенардосовские чтения). Т. 1. Иваново, 2013. С. 3–7.
3. Мазурин О.В. Отжиг спаев стекла с металлом. Л.: Энергия, 1980. 140 с.
4. Мазурин О.В. Стеклование. Л.: Наука, 1986. 158 с.
5. Немиллов С.В. Оптическое материаловедение: термодинамические и релаксационные свойства стеклообразующих расплавов и стекол. СПб: СПбГУ ИТМО, 2014. 132 с.
6. Старцев Ю.К. Релаксационные явления в стеклах в интервале стеклования при отжиге, ионном обмене стекла с расплавом соли и в спаях: дисс. ... докт. физ.-мат. наук, 01.04.07. СПб, 2001. 301 с.
7. Тропин Т.В., Шмельцер Ю.В.П., Аксенов В.Л. Современные аспекты кинетической теории стеклования // Успехи физ. наук. 2016. Т. 186, № 1. С. 47–73.
8. Moynihan C.T., Macedo P.B., Montrose C.J., Gupta P.K., DeBolt M.A. et al. Structural relaxation in vitreous material // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1976. Vol. 279. P. 15–35.
9. Narayanaswami O.S. A model of structural relaxation in glass // J. Amer. Ceram. Soc. 1971. Vol. 54, No. 10. P. 491–498.
10. Schmelzer J.W.P. Kinetic criteria of glass formation and the pressure dependence of the glass transition temperature // The J. of Chemical Physics. 2012. Vol. 136, No. 7. P. 074512-1–074512-11.
11. Tool A.Q. Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range // J. Amer. Ceram. Soc. 1946. Vol. 29, No. 9. P. 240–253.
12. Рубцов Н.А. К анализу процессов нагрева и плавления слоя полупрозрачного материала // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 4. С. 521–531.
13. Рубцов Н.А., Слепцов С.Д. Радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной среде с фазовым переходом на границах разной поглощательной способности // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2. С. 237–245.
14. Крайнов А.Ю., Миньков Л.Л. Численные методы решения задач тепло- и массопереноса; учеб. пособие. Томск: STT, 2016. 92 с.
15. Чернавский С.А., Решиков В.Ф. Справочник металлста. В 5-ти т. Т. 1. Изд. 3-е, перераб. М.: Машиностроение, 1976. 768 с.
16. Любимова О.Н., Дрюк С.А. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стекломаталлокомпозита // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 1. С. 123–135.

*Статья поступила в редакцию 23 февраля 2020 г.,
после доработки — 25 июня 2020 г.,
принята к публикации 5 августа 2020 г.,
после дополнительной доработки — 5 октября 2020 г.*