

СОЛИТОНЫ В СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКЕ

Е. Г. ВЕДЕНОВА, Л. И. МАНЕВИЧ, В. П. НИСИЧЕНКО,
С. А. ЛЫСЕНКО

(Москва)

Исследование динамики ряда конструкций, в частности теплообменников электростанций, приводит к мало изученным расчетным схемам со многими ударными параметрами [1, 2], не допускающим непосредственного применения традиционных методов анализа виброударных систем [3]. Использование аналитической аппроксимации ударного взаимодействия позволяет при определенных условиях свести исходную задачу к расчету механической системы (балка, струна) на нелинейно-упругих опорах. Благодаря этому удастся выявить некоторые общие закономерности динамического поведения таких систем, связанные с существованием в них режимов солитонного типа [4]. Данная работа посвящена детальному численному исследованию подобных режимов в простейшей системе рассматриваемого класса — одномерной цепочке масс, связанных посредством невесомой струны и взаимодействующих с сильно нелинейными упругими опорами.

Отметим, что в настоящее время хорошо изучены цепочки с продольным экспоненциальным взаимодействием [5, 6]. Ангармонические цепочки на упругом основании изучались в длинноволновом приближении [7].

1. Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$(1.1) \quad m\ddot{w}_j + c(2w_j - w_{j-1} - w_{j+1}) + 2n\dot{v}_j + F(w_j) = 0,$$

где w_j — вектор с компонентами $w_j^{(1)}, w_j^{(2)}$; m — величина каждой из сосредоточенных масс; c — жесткость линейной пружины, связывающей две последовательно расположенные массы. Если S — натяжение струны, а l — расстояние между массами, то жесткость $c = S/l$. Для струны бесконечной длины $j = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; в случае же конечной длины $j = 1, 2, \dots, N$, причем $w_0 = w_{N+1}$ в соответствии с условиями закрепления струны в поперечном направлении. Нелинейная функция $F(w_j)$, описывающая взаимодействие ударного типа (резкое возрастание реакций при определенных величинах перемещений), задается следующим образом:

$$(1.2) \quad F(w_j) = a \frac{w_j}{|w_j|} \operatorname{sh} b |w_j|, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Выражением (1.2) могут быть аппроксимированы (при соответствующем выборе параметров a и b) некоторые типичные характеристики ударных пар в виброударных системах, приведенные, например, в [3].

Уравнения движения бесконечной цепочки допускают точные периодические решения в виде стоячих волн

$$w_j^{(1)} = (-1)^j \varphi(t), \quad w_j^{(2)} = \alpha w_j^{(1)},$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (α — любое вещественное число)

$$\ddot{\varphi} + 4 \frac{c}{m} \varphi + 2 \frac{n}{m} \dot{\varphi} + \frac{a}{m \sqrt{1 + \alpha^2}} \operatorname{sh} b \sqrt{1 + \alpha^2} \varphi = 0.$$

Солитон может быть представлен в виде модулированной волны

$$w_j^{(1)} = (-1)^j v_j^{(1)}(t), \quad w_j^{(2)} = \alpha w_j^{(1)}(t),$$

где функции $v_j^{(1)}(t)$ при различных индексах уже не одинаковы. Если совокупность функции $v_j^{(1)}(t)$, описывающих модуляцию, плавно зависит от индекса j , ее можно приближенно заменить функцией двух переменных $v(x, t)$, для которой после замены переменных

$$u = \sqrt{1 + \alpha^2} b v, \quad \tau = (\sqrt{ab/m}) t, \quad \xi = (\sqrt{ab/cl^2}) x$$

записывается следующее уравнение с частными производными:

$$(1.3) \quad \partial^2 u / \partial \tau^2 + \partial^2 u / \partial \xi^2 + r^2 u + 2\delta \dot{u} + \operatorname{sh} u = 0,$$

где $r^2 = 4c/ab$; $\delta = n/\sqrt{abm}$.

При $\delta = 0$ и $r^2 \ll 1$ уравнение (1.3) имеет решение в виде локализованной стоячей волны — солитона огибающей [4]:

$$(1.4) \quad u(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arth} \left[\frac{\sqrt{\omega^2 - 1} \cos \omega \tau}{\operatorname{ch}(\sqrt{\omega^2 - 1} \tau)} \right],$$

причем

$$(1.5) \quad w_j^{(1)}(\tau) = (-1)^j \frac{1}{b \sqrt{1 + \alpha^2}} u(\xi_j, \tau), \quad w_j^{(2)}(\tau) = \alpha w_j^{(1)}(\tau).$$

Параметр ω , характеризующий частоту колебаний по переменной τ , определяет в то же время амплитуду волны и степень ее пространственной локализации. С увеличением ω солитон становится настолько узким, что условия применимости длинноволнового приближения нарушаются.

Чтобы снять ограничения на профиль солитона, было проведено численное исследование локализованных стоячих волн на основе исходной системы уравнений (1.1), которая заменой переменных

$$u_j = b w_j, \quad \tau = (\sqrt{ab/m}) t$$

преобразована к виду

$$(1.6) \quad \frac{d^2 u_j}{d\tau^2} + \beta (2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}) + 2\delta u_j + \frac{u_j}{|u_j|} \operatorname{sh} |u_j| = 0,$$

где $\beta = r^2/4$.

Количество масс при численном интегрировании принималось равным 40 либо 41. Длина цепочки предполагалась равной единице, нумерация масс — от левого края цепочки, края полагались неподвижными. Система уравнений первого порядка, соответствующая системе (1.6), интегрировалась численно методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования. Задание начальных условий осуществлялось отдельной подпрограммой. В процессе счета на печать выдавались значения u_j (в графической форме), а также du_j/dt и $F(u_j)$. Одновременно накапливалась и выдавалась в конце расчета в виде графика информация о временных траекториях десяти выделенных масс. Для контроля за точностью вычислений на печать выводилось значение полной энергии системы (эта величина в процессе расчета сохранялась с точностью до 1%).

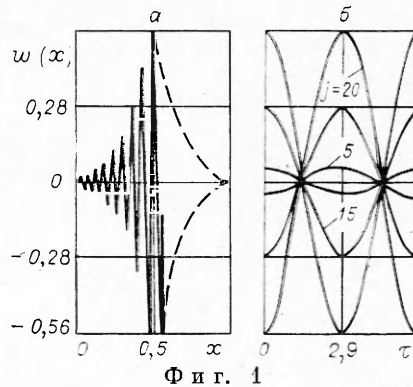
2. Прежде всего было выполнено интегрирование системы (1.6) в условиях применимости длинноволнового приближения. Как и следовало ожидать, расчетные данные здесь практически совпадают с аналитическим решением, демонстрируя при соответствующих начальных условиях характерные черты солитона огибающей. Однако с точки зрения реализации интенсивных ударных режимов наибольший интерес представляют случаи, когда указанные условия нарушаются. При численном исследовании системы (1.6) в этих случаях начальные условия по-прежнему задавались в виде, соответствующем решению (1.5), (1.4) при $\tau = 0$. На фиг. 1, а, б показана эволюция начального возмущения в случае сравнительно малой его амплитуды. Значительная величина параметра связи ($\beta = 1$) приводит к тому, что временное развитие процесса уже не следует формуле (1.4). Тем не менее налицо типичное поведение солитона огибающей — синхронное движение всех масс с сохранением затухающей от центра солитона пространственной конфигурации. Таким образом, начальное возмущение вида

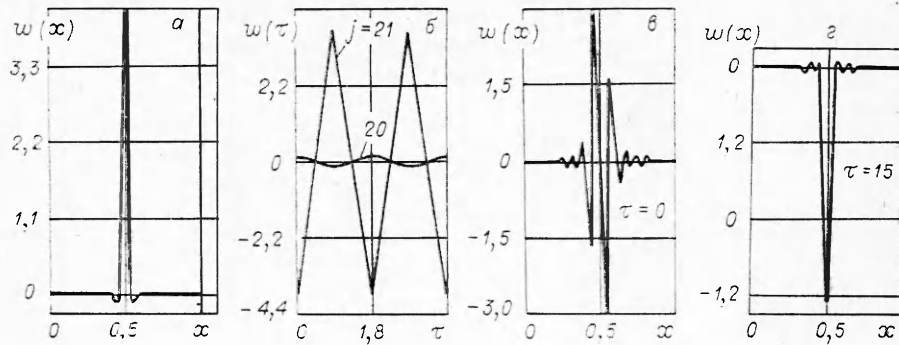
$$(2.1) \quad u_j^{(1)}(0) = u(\xi_j, 0) = \left(4/\sqrt{1 + \alpha^2}\right) (-1)^j \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\omega^2 - 1}}{\omega \operatorname{ch} \left[\sqrt{\frac{\omega^2 - 1}{\beta}} M (\xi_j - 1/2) \right]},$$

$$\frac{du_j(0)}{d\tau} = \frac{du}{d\tau}(\xi_j, 0) = 0, \quad u_j^{(2)}(0) = \alpha u_j^{(1)}(0), \quad \frac{du_j^{(2)}(0)}{d\tau} = 0,$$

где M — число масс, в данном случае практически соответствует точному решению для солитона огибающей, хотя его временную эволюцию количественно уже нельзя предсказать по формулам (1.5), (1.4).

Систематическое исследование влияния параметра связи β на характер локализованных волн при интенсивных возбуждениях ударного типа отражено на фиг. 2, 3. Начальные условия задавались в виде (2.1). В случае слабой связи наблюдается резко выраженная пространственная локализация процесса (фиг. 2, а), полностью сохраняющаяся во времени. Обращает на себя внимание синхронность поведения сильно и слабо возбужденных масс. Временная зависимость перемещения (фиг. 2, б) характерна для регулярного ударного режима. Отметим, что в данном случае, несмотря на ма-





Ф и г. 2

ное значение β , аналитическое решение (1.5), (1.4) неприменимо, поскольку степень локализации слишком велика и переход к длинноволновому приближению (1.3) уже не оправдан.

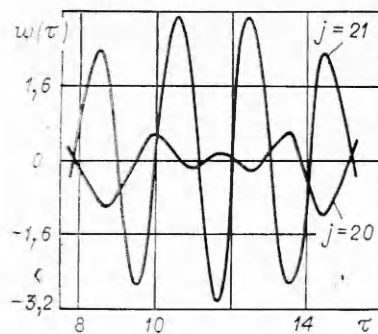
Фиг. 2, в, г отражает тенденцию к локализации в случае, когда начальное возбуждение несколько отличается от (2.1). Начальная форма с двумя сильно возбужденными центральными массами эволюционирует к пространственно-локализованному процессу, в котором лишь одна масса колеблется в ударном режиме. Отклонение от «точных» начальных условий для солитона огибающей приводит к возникновению слабо выраженного «фона», взаимодействующего с солитоном. Это взаимодействие проявляется в квазипериодичности процесса — рекуррентности, которая хорошо видна на временных траекториях масс. Аналогичная тенденция к локализации наблюдается и при дальнейшем увеличении связи. Соответствующие временные графики (фиг. 3) также отражают влияние «фона» и демонстрируют периодический возврат к почти первоначальному соотношению амплитуд различных масс.

Существование пространственно-локализованного стационарного решения делает очевидной возможность двухсолитонных, трехсолитонных и т. д. режимов. Такая возможность иллюстрируется фиг. 4, где приведены результаты численного интегрирования системы (1.6) при начальных условиях

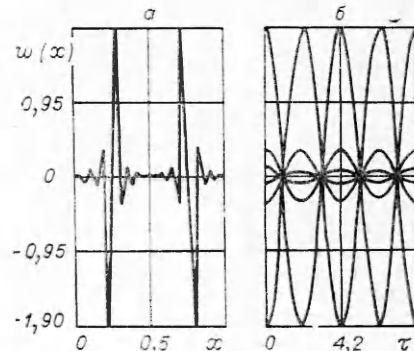
$$u_j^{(1)}(0) = \frac{4}{\sqrt{1+\alpha^2}} (-1)^j \left\{ \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega \operatorname{ch} \left[\sqrt{\frac{\omega^2-1}{\beta}} M(\xi_j - 1/4) \right]} + \right. \\ \left. + \operatorname{arth} \frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega \operatorname{ch} \left[\sqrt{\frac{\omega^2-1}{\beta}} M(\xi_j - 3/4) \right]} \right\}, \\ u_j^{(2)}(0) = \alpha u_j^{(1)}(0), \quad \frac{du_j^{(1)}(0)}{d\tau} = \frac{du_j^{(2)}(0)}{d\tau} = 0.$$

Сохранение во времени исходного пространственного распределения амплитуд свидетельствует о слабом взаимодействии солитонов.

Анализ численных результатов показывает, что в случае сильной связи и слабой пространственной локализации, когда ударное взаимодействие не проявляется, основную роль в степенном разложении нелинейной характеристики играют первые члены. Локализованные решения в таком квазилинейном пределе изучались в [7].



Ф и г. 3



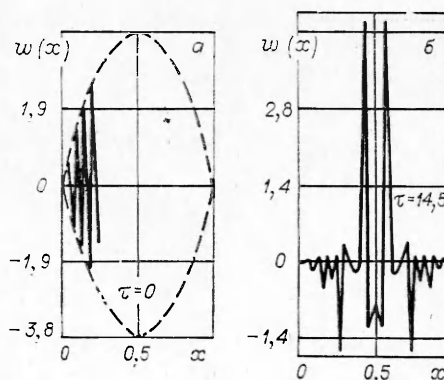
Ф и г. 4

При этом может быть использовано длинноволновое приближение (1.3), но без пренебрежения величиной r^2 по сравнению с единицей. Если же связь вдоль цепи слаба, а локализация сильно выражена (случай ударного взаимодействия), то общий временной период с хорошей точностью определяется по уравнению движения основной массы, совершающей пилообразные колебания.

Остановимся теперь кратко на влиянии демпфирования. В случае «чистого» солитона сравнительно малое вязкое трение приводит к плавному затуханию процесса с сохранением на определенное время основных его особенностей. При некотором отклонении от начальных условий, соответствующих «чистому» солитону, наблюдается перекачка энергии от основной массы к соседним, так что амплитуды последних на начальной стадии движения могут даже существенно возрастать.

Описанные выше черты солитона огибающей полностью сохраняются и в случае, когда ударное взаимодействие сосредоточено в ряде поясов вдоль цепи. Начальные условия и здесь задавались в соответствии с аналитическим решением для солитона огибающей. Пространственные и временные зависимости перемещений, а также усилий ударного взаимодействия отражают синхронное движение масс и сильно выраженную локализацию процесса.

До сих пор шла речь об эволюции начального возмущения, близкого по форме к солитону либо многосолитонному решению. Другим крайним случаем является возбуждение по нелокализованным формам, например по пространственной гармонике со сравнительно небольшим числом полуволи. Исследование развития начальных возмущений по первой, третьей и десятой гармоникам свидетельствует о стремлении системы к конфигурации, близкой к «пилообразной». О последующей трансформации колебательного процесса (случай первой гармоники) можно судить по фиг. 5, на которой видна тенденция к разрушению «пилы» с последующей локализацией.



Ф и г. 5

Поступила 10 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Rogers R. J., Pick R. J. On the dynamic spatial response of a heat exchanger tube with intermittent baffle contacts. — Nuclear Eng. and Design, 1976, N 36.
2. Rogers R. J., Pick R. J. Factors associated with support plate forces due to heat-exchanger tube vibratory contact. — Nuclear Eng. and Design, 1977, N 44.
3. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978.
4. Веденова Е. Г., Маневич Л. И. Периодические и локализованные волны в виброударных системах регулярной структуры. — Машиноведение, 1981, № 4.
5. Toda M. Development of the theory of a nonlinear lattice. — Supplement of the Progr. of Theor. Phys., 1976, N 59.
6. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Косевич А. М., Ковалев А. С. Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 5.

УДК 539.374

О РАСШИРЕНИИ ПОР В ПЛАСТИЧНЫХ МЕТАЛЛАХ ПРИ ОТКОЛЕ

В. К. ГОЛУБЕВ
(Москва)

Необходимость построения адекватных моделей разрушения материалов при интенсивных динамических нагрузках ударно-волнового характера требует более полного понимания закономерностей зарождения и роста индивидуальных повреждений в процессе разрушения. Показано [1], что в случае пластичных металлов, таких как алюминий и медь, образующиеся при отколе повреждения имеют вид пор, форма которых близка к сферической. На основании экспериментальных наблюдений в [1] предложена эмпирическая закономерность, описывающая рост индивидуальной поры, так называемый закон вязкого роста. В [2] сделаны оценки для поры, расширяющейся в пластической среде, а в [3] для описания роста поры предложена кинематическая