В заключение отметим, что предложенный механизм неустойчивости и стабилизации вихревой дорожки за нагретым цилиндром и обсуждаемые в связи с этим аналогии можно рассматривать сейчас как гипотезы. Чтобы подтвердить или опровергнуть их, необходимы, на наш взгляд, не только дополнительные эксперименты, но и теоретический расчет устойчивости вихрей с нагретым ядром.

Авторы признательны проф. Г. Абарбанелю (ИНИ, Калифорнийский университет, Сан-Диего) и проф. М. И. Рабиновичу (ИПФ РАН, Нижний Новгород) за интерес к работе и многочисленные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Экспериментальное исследование влияния охлаждения на устойчивость ламинарного пограничного слоя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1974.— Вып. 2.— С. 75—79.
2. **Strazisar A. J., Reshotko E., Prahl J. M.** Experimental study of the stability of heated laminar boundary layers in water // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 83, pt 2.— P. 225—247.
3. **Езерский А. Б.** Отрывное обтекание нагретого цилиндра при малых числах Маха // ПМТФ.— 1990.— № 5.— С. 56—62.
4. **Lecorder J. C., Hamma L., Paranthoen P.** The control of vortex shedding behind heated circular cylinders at low Reynolds numbers // Experiments in Fluids.— 1991.— N 10.— P. 224—229.
5. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
6. **Ming-Huei Yu, P. Monkewitz.** The effect of nonuniform density on the absolute instability of two-dimensional inertial jets and wakes // Phys. Fluids A.— 1990.— V. 2, N 7.— P. 1175—1181.
7. **Чжен П.** Отрывные течения.— М.: Мир, 1973.— Т. 1—3.
8. **Hammache M., Gharib M.** A novel method to promote parallel vortex shedding in the wake of circular cylinder // Phys. Fluids A.— 1989.— V. 1, N 10.— P. 1611—1614.
9. **Hammache M., Gharib M.** An experimental study of parallel and oblique vortex shedding from circular cylinder.—S. 1., 1991.— (Prepr./VCSD).
10. **Thorp A. S.** Neutral eigensolutions of the stability equation for stratified shear flow // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 36, pt 4.— P. 673—683.
11. **Маков Ю. Н., Степанянц Ю. А.** О влиянии стратификации на устойчивость сдвиговых течений идеальной жидкости // ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 5.— С. 1084—1088.

г. Нижний Новгород *Поступила 7/IX 1992 г., в окончательном варианте — 29/III 1993 г.*

УДК 532.5

В. А. Владимиров, К. И. Ильин

УСТОЙЧИВОСТЬ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВИХРЕВОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о движении твердого тела в идеальной жидкости — классический раздел гидродинамики [1, 2]. Устойчивость стационарных движений тела в потенциальных потоках изучалась ранее в [1—5]. В настоящей работе рассматривается двумерная задача устойчивости твердого тела в стационарном вихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости. Построен сохраняющийся функционал, имеющий критическую точку на решении стационарной задачи обтекания тела. Методом Арнольда [6] получены достаточные условия устойчивости по линейному приближению. Общий результат применен для исследования устойчивости течения с круговыми линиями тока в случае, когда внутренний цилиндр может двигаться под действием сил давления со стороны жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается двумерная задача о движении твердого тела в идеальной несжимаемой однородной жидкости. Движение тела происходит в $(m + 1)$-связной области τ, полностью заполненной жидкостью. Граница $\partial\tau$ области τ состоит из m границ $\partial\tau_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ односвязных областей τ_i и внешней границы $\partial\tau_0$. В момент времени t тело занимает область $\tau_b(t)$ внутри области τ.

В декартовой системе координат x, y уравнения движения жидкости имеют вид

$$(1.1)\qquad \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} = -(1/\rho)\,\nabla p - \nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \omega_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\omega = 0.$$

Здесь $\mathbf{u} \equiv (u, v)$, p, $\omega \equiv v_x - u_y$ — поля скорости, давления и завихренности; ρ — плотность жидкости; Φ — потенциал внешних сил, действующих на жидкость.

Движение тела описывается уравнениями

$$(1.2)\qquad m\dot{V}_i \equiv m\ddot{R}_i = -\int\limits_{\partial\tau_b} pn_i dS - \frac{\partial\Phi_b(\mathbf{R}, \varphi)}{\partial R_i},$$

$$I\dot{\Omega}_b \equiv I\ddot{\varphi} = -\int\limits_{\partial\tau_b} \mathbf{z}\cdot[(\mathbf{r} - \mathbf{R})\times\mathbf{n}]\,pdS - \frac{\partial\Phi_b(\mathbf{R}, \varphi)}{\partial\varphi},$$

где $\mathbf{z}$ — единичный вектор в направлении оси z; m — масса тела; I — момент инерции тела; $\mathbf{V}$ — скорость поступательного движения тела; Ω_b — угловая скорость вращения тела вокруг оси z; $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра масс тела; φ — угловая переменная, задающая ориентацию тела; Φ_b — потенциал внешних сил, действующих на тело.

На границах $\partial\tau_k$ $(k = 0, \ldots, m)$ и $\partial\tau_b$ ставится обычное условие непротекания:

$$(1.3)\qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \{\mathbf{V} + \Omega_b[\mathbf{z}\times(\mathbf{r} - \mathbf{R})]\}\cdot\mathbf{n} \quad \text{на} \quad \partial\tau_b,$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau_k, \quad k = 0, \ldots, m.$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешние нормали к $\partial\tau_b$ и $\partial\tau_k$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на поверхности тела $\partial\tau_b$.

На решениях задачи (1.1)—(1.3) сохраняются интегралы

$$(1.4)\qquad E = \int\limits_{\tau-\tau_b}\left\{\rho\frac{u_iu_i}{2} + \rho\Phi\right\}d\tau + \frac{1}{2}m\dot{R}_i\dot{R}_i + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \Phi_b(\mathbf{R}, \varphi);$$

$$(1.5)\qquad C = \int\limits_{\tau-\tau_b} F(\omega)\,d\tau,$$

где $F(\omega)$ — произвольная функция; по повторяющимся векторным индексам производится суммирование. Интеграл (1.4) представляет собой полную энергию системы тело — жидкость, а (1.5) является следствием сохранения завихренности в каждой жидкой частице. Кроме того, в силу теоремы Кельвина сохраняются также циркуляции скорости по замкнутым кривым $\partial\tau_k$, $\partial\tau_b$:

$$(1.6)\qquad \Gamma_k = \int\limits_{\partial\tau_k}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}dS \quad (k = 0, \ldots, m), \quad \Gamma_b = \int\limits_{\partial\tau_b}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,dS$$

($\boldsymbol{\sigma}$ — касательный вектор к кривой, по которой ведется интегрирование).

Далее рассматривается проблема устойчивости точного решения задачи (1.1)—(1.3), соответствующего стационарному режиму обтекания тела. В системе координат, связанной с телом (начало координат совпадает с центром масс тела), это решение имеет вид

$$(1.7)\qquad R_i = \dot{R}_i = \dot{\varphi} = 0, \quad u_i = U_i(\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b.$$

Поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ является решением задачи обтекания:

$$(1.8)\qquad (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{U} = 0 \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b,$$

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau_b \quad \text{и} \quad \partial\tau_k \quad (k = 0, \ldots, m).$$

Действующие на тело со стороны жидкости сила и момент сил уравновешены внешними силой и моментом:

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial R_i} = -\int\limits_{\partial \tau_b} n_i P dS; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial \varphi} = -\int\limits_{\partial \tau_b} \mathbf{z}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\, P dS. \tag{1.10}$$

Из интегралов (1.4)—(1.6) составляется сохраняющийся функционал

$$I = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho \left\{\frac{u_i u_i}{2} + \Phi + F(\omega)\right\} d\tau + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 + \frac{I}{2}\Omega_b^2 + \Phi_b + \sum_{k=0}^{m} A_k\Gamma_k + B\Gamma_b \tag{1.11}$$

(B, A_k ($k = 0, \ldots, m$) — произвольные постоянные).

Ниже будет показано, что при подходящем выборе функции $F(\omega)$ и постоянных B, A_k решение (1.7) является стационарной точкой функционала I.

2. Условия экстремума. Для первой вариации функционала (1.11), взятой на решении (1.7), справедливо представление

$$\delta I = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\,\{\mathbf{U} + \operatorname{rot}[F'(\Omega)\mathbf{z}]\}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\tau + m\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{V} + I\Omega_b\delta\Omega_b + \tag{2.1}$$

$$+ \left\{\frac{\partial\Phi_b}{\partial R_i} - \int\limits_{\partial\tau_b} \rho n_i \left[\frac{U_i U_i}{2} + \Phi\right] dS\right\}\delta R_i + \left\{\frac{\partial\Phi_b}{\partial\varphi} - \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\mathbf{z}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\left[\frac{U_i U_i}{2} + \Phi\right] dS\right\}\delta\varphi +$$

$$+ [A_0 + \rho F'(\Omega_0)] \int\limits_{\partial\tau_0} (\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, dS + \sum_{k=1}^{m} [A_k - \rho F'(\Omega_k)] \int\limits_{\partial\tau_k} (\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, dS +$$

$$+ [B - \rho F'(\bar\Omega)] \int\limits_{\partial\tau_b} (\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma})\, dS.$$

Здесь $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} + \delta\varphi\,(\mathbf{z}\times\mathbf{r})$ — бесконечно малое смещение точки $\mathbf{r}$ на поверхности тела при варьировании; $\delta\mathbf{R}$ — смещение тела как целого; $\delta\varphi$ — поворот тела вокруг оси z; Ω — завихренность основного течения; $\Omega_k \equiv \Omega$ на $\partial\tau_k$, $\bar\Omega \equiv \Omega$ на $\partial\tau_b$.

Из (2.1) видно, что $\delta I = 0$, если выполнены следующие условия:

(2.2а) $A_k = \rho F'(\Omega_k)$, $k = 1, \ldots, m$; $A_0 = -\rho F'(\Omega_0)$; $B = \rho F'(\bar\Omega)$;

(2.2б) $\dot R_i = V_i = 0$, $\dot\varphi = \Omega_b = 0$;

(2.2в) $\mathbf{U} = -\operatorname{rot}[F'(\Omega)\,\mathbf{z}]$;

$$\frac{\partial\Phi_b}{\partial R_i} = \int\limits_{\partial\tau_b} \rho n_i \left[\frac{U_i U_i}{2} + \Phi\right] dS; \tag{2.2г}$$

$$\frac{\partial\Phi_b}{\partial\varphi} = \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\mathbf{z}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{n})\left[\frac{U_i U_i}{2} + \Phi\right] dS. \tag{2.2д}$$

Выбираем постоянные B, A_k ($k = 0, \ldots, m$) так, чтобы выполнялось условие (2.2а). Равенства (2.2б) всегда выполнены на стационарном решении (1.7). Если определить функцию тока Ψ основного течения

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\operatorname{rot}(\Psi\mathbf{z}), \tag{2.3}$$

то (2.2в) означает, что на решении (1.7)

$$\Psi = F'(\Omega). \tag{2.4}$$

Используя (2.3), уравнения (1.8) можно переписать в виде

$$-\Omega\nabla\Psi = -\nabla(P/\rho + \Phi + U_i U_i/2).$$

С учетом (2.4) отсюда следует

$$\Phi + \frac{U_iU_i}{2} = -\frac{P}{\rho} + H(\Omega) + \text{const}, \qquad \frac{dH}{d\Omega} = \Omega\,\frac{d^2F}{d\Omega^2}. \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в уравнения (2.2г), (2.2д), можно видеть, что они совпадают с условиями равновесия тела (1.9), (1.10).

Таким образом, показано, что на множестве функций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{V}(t)$, $\varphi(t)$, $\Omega_b(t)$, удовлетворяющих условию непротекания (1.3), решения (1.7) задачи (1.8) являются стационарными точками функционала (1.11). (При этом предполагается, что необходимые свойства гладкости функций $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ выполнены.) Тем самым дано обобщение результата Арнольда [6] на случай наличия в жидкости твердого тела.

Для выяснения характера критической точки функционала I вычислим его вторую вариацию в этой точке:

$$\delta^2 I = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\left[(\delta\mathbf{u})^2 + \frac{d\Psi}{d\Omega}(\delta\omega)^2\right] d\tau + m(\delta\dot{\mathbf{R}})^2 + I(\delta\dot{\varphi})^2 - \tag{2.6}$$

$$- \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,[2\mathbf{U}\cdot\delta\mathbf{u} + (\delta\mathbf{r}\cdot\nabla)\,G]\,dS -$$

$$- \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\delta\varphi\,(\delta\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,G\,dS + \frac{\partial^2\Phi_b}{\partial q_i\,\partial q_j}\,\delta q_i\delta q_j.$$

Здесь δu_i, $\delta\omega$, δR_i, $\delta\varphi$ — вариации соответствующих величин; $\delta\mathbf{r} \equiv \delta\mathbf{R} + \delta\varphi\,[\mathbf{z}\times\mathbf{r}]$; $\delta q_i \equiv (\delta R_1, \delta R_2, \delta\varphi)$; $G \equiv U_iU_i/2 + \Phi$.

3. Интегралы линеаризованной задачи. Линеаризованные на решении (1.7) уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &D\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\\ &D\omega + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\Omega = 0\\ &\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\quad D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla \end{aligned}\right\} \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b; \tag{3.1}$$

$$m\ddot{R}_i = -\int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,[(p + \mathbf{r}\cdot\nabla P)\,n_i + \varphi P\sigma_i]\,dS + \frac{\partial\Phi_b}{\partial R_{0_i}} R_i; \tag{3.2}$$

$$I\ddot{\varphi} = -\int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,[\mathbf{z}\cdot(\mathbf{r}_0\times\mathbf{n})]\,(p + \mathbf{r}\cdot\nabla P)\,dS + \frac{\partial\Phi_b}{\partial\varphi_{0_i}}\varphi, \tag{3.3}$$

где u_i, ω, p, R_i, φ — бесконечно малые возмущения соответствующих величин; $\mathbf{r} \equiv \mathbf{R} + \varphi\,[\mathbf{z}\times\mathbf{r}_0]$; в (3.2), (3.3) интегрирование ведется по невозмущенной поверхности тела $\partial\tau_b$.

При линеаризации в задачах с неизвестной движущейся границей в эйлеровых координатах возникают трудности, связанные со «снесением» граничных условий с возмущенной поверхности на невозмущенную. Поэтому здесь удобно воспользоваться методом линеаризации, изложенным в [7, 8]. Возмущенное течение $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$ ($\mathbf{a}$ — лагранжева координата) разбивается на две части:

$$\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t) \tag{3.4}$$

($\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ — невозмущенное течение). В силу условия безотрывности обтекания линеаризованное граничное условие на $\partial\tau_b$ таково: $(\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{a}, t))\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$. С учетом (3.4) оно принимает вид

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}. \tag{3.5}$$

Связь эйлеровых возмущений скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ с лагранжевыми смещениями жидких частиц $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ дается формулой [7, 8]

$$D\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\,\mathbf{U}. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует граничное условие для поля скорости:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = D\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}) + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\,\frac{1}{Q}\,DQ \quad \text{на} \quad \partial\tau_b \quad (Q^2 \equiv U_iU_i). \tag{3.7}$$

На неподвижных границах $\partial\tau_k$ $(k = 0, ..., m)$ линеаризованные граничные условия имеют обычный вид

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau_k. \tag{3.8}$$

Известным фактом [6, 7] является сохранение второй вариации (2.6) в силу линеаризованной задачи (3.1)—(3.3), (3.7), (3.8), в чем можно убедиться прямыми вычислениями. При этом под вариациями $\delta\mathbf{u}$, $\delta\omega$, $\delta\mathbf{R}$, $\delta\varphi$ подразумеваются бесконечно малые возмущения $\mathbf{u}$, ω, $\mathbf{R}$, φ, удовлетворяющие уравнениям (3.1)—(3.3). В соответствии со сказанным сделаем в (2.6) следующие переобозначения: $\delta\mathbf{u} \to \mathbf{u}$, $\delta\omega \to \omega$, $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$, $\delta\mathbf{r} \to \mathbf{r}$, $\delta q_i \to q_i$. Формулу (2.6) запишем как

$$E_1 \equiv \frac{1}{2}\,\delta^2 I = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\left[\frac{u_iu_i}{2} + \frac{d\Phi}{d\Omega}\frac{\omega^2}{2}\right] d\tau + \frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{I}{2}\,\dot{\varphi}^2 - \tag{3.9}$$
$$- \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\left[\mathbf{U}\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,G\right] dS - \int\limits_{\partial\tau_b} \frac{\rho}{2}\,\varphi\,(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,G\,dS + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Phi_b}{\partial q_{0_i}\partial q_{0_k}}\,q_iq_k.$$

В случае положительной определенности E_1 как квадратичной формы от $\mathbf{u}$, $\mathbf{R}$, $\dot{\mathbf{R}}$, φ, $\dot\varphi$ из равенства $E_1 = \mathrm{const}$ вытекает устойчивость решения (1.7) по линейному приближению. Действительно, если измерять отклонения возмущенного течения от невозмущенного интегралом E_1, то имеет место устойчивость в определении Ляпунова: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется другое число $\delta > 0$ такое, что как только $E_1(0) < \delta$, то для всех $t > 0$ выполняется условие $E_1(t) < \varepsilon$. Здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Интеграл энергии (3.9) определен только тогда, когда во всей области течения $\tau - \tau_b$ выполняется условие $\Omega' \equiv \dfrac{d\Omega}{d\Psi} \neq 0$. Для важного класса течений с постоянной завихренностью $\Omega' \equiv 0$ формула (3.9) теряет смысл. В этом случае интеграл линейной задачи может быть получен ценой сужения класса возмущений. Для этого уравнения на возмущения вихря (3.1) с использованием (3.6) приводятся к форме

$$D\,(\omega + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\Omega) = 0. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что если в начальный момент времени выбрать

$$\omega = -\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\Omega = -\,\Omega'\,(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\Psi), \tag{3.11}$$

то равенство (3.11) будет выполнено при всех t. Формула (3.11) означает ограничение класса возмущений так называемыми «равнозавихренными» [9]. Для таких возмущений значение вихря постоянно в каждой жидкой частице, а поле вихря изменяется только за счет перемещений этих частиц. Интеграл E_1 (3.9) для этого более узкого класса возмущений остается справедливым, только входящий в выражение (3.9) интеграл по области $\tau - \tau_b$ в соответствии с (3.11) приобретает вид

$$\int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\left[\frac{u_iu_i}{2} + \frac{1}{2}\,\Omega'\,(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\Psi)^2\right] d\tau. \tag{3.12}$$

При $\Omega' = 0$ из (3.11) вытекает, что $\omega = 0$, а интеграл энергии E_1 с учетом (3.12) редуцируется к форме

$$E_1 = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\,\frac{u_iu_i}{2}\,d\tau + \frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{I}{2}\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\Phi_b}{\partial q_{0_i}\partial q_{0_k}}\,q_iq_k - \tag{3.13}$$
$$- \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\left[\mathbf{U}\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,(\mathbf{r}\cdot\nabla)\,G\right] dS - \int\limits_{\partial\tau_b} \frac{\rho}{2}\,\varphi\,(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,G\,dS.$$

В соответствии со сказанным интеграл E_1 (3.13) сохраняется в силу линейной задачи, если считать поле возмущений скорости потенциальным.

4. Достаточные условия устойчивости. Как было показано выше, достаточные условия устойчивости решения (1.7) совпадают с условиями знакоопределенности интеграла энергии (3.9) как квадратичной формы от u_i, $\dot{R}_i$, R_i, $\dot{\varphi}$, φ. Чтобы привести E_1 (3.9) к виду, удобному для исследования ее знакоопределенности, в области $\tau - \tau_b$ вводится вспомогательное векторное поле $\boldsymbol{\alpha}$ (x). Предполагается, что необходимые для дальнейшего свойства гладкости функции $\boldsymbol{\alpha}$ (x) выполнены. Можно показать, что для любого поля $\boldsymbol{\alpha}$ (x) такого, что $\boldsymbol{\alpha} = 0$ на $\partial\tau$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\boldsymbol{\sigma}$ на $\partial\tau_b$, справедливо равенство

(4.1)

$$\int\limits_{\tau-\tau_b} \{[2e_{jil}z_l\partial_j\alpha_k - \mathbf{z}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\alpha}\delta_{ik}]\,u_iu_k + 2\omega u_k\alpha_k\}\,d\tau + \int\limits_{\partial\tau_b} \alpha\,\{(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})^2\}\,dS = 0.$$

Складывая выражения (3.9) и (4.1) и выделяя в интегралах по области $\tau - \tau_b$ и по границе $\partial\tau_b$ полные квадраты, выражение для E_1 можно преобразовать к форме

$$E_1 = K^* + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha\left(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\alpha}\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\right)^2 dS + W, \tag{4.2}$$

$$2W = (m\delta_{ik} - F_{ik})\,\dot{R}_i\dot{R}_k - 2Q_{ik}\dot{R}_iR_k + (a_{ik} + A_{ik})\,R_iR_k + (I - D)\,\dot{\varphi}^2 +$$
$$+ (c + C)\,\varphi^2 - 2H\varphi\dot{\varphi} - 2L_i\dot{R}_i\dot{\varphi} + 2N_i\dot{R}_i\varphi + 2M_iR_i\dot{\varphi} + 2\,(b_i - B_i)\,R_i\varphi.$$

Здесь

$$2K^* = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\left\{\lambda_{ik}u_iu_k + \frac{d\Psi}{d\Omega}\left(\omega + \frac{d\Omega}{d\Psi}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\alpha}\right)^2\right\}d\tau;$$

$$\lambda_{ik} \equiv (1 - \mathbf{z}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\alpha})\,\delta_{ik} + 2e_{jil}z_l\partial_j\alpha_k - \frac{d\Omega}{d\Psi}\alpha_i\alpha_k;$$

$$a_{ik} \equiv \frac{\partial^2\Phi_b}{\partial R_i\,\partial R_k};\quad b_i \equiv \frac{\partial^2\Phi_b}{\partial R_i\,\partial\varphi};\quad c \equiv \frac{\partial^2\Phi_b}{\partial\varphi^2};$$

$$F_{ik} \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha n_in_k\,dS;\quad Q_{ik} \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha n_i\Pi_k\,dS;\quad \Pi_k \equiv (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\,\partial_k\Psi;$$

$$A_{ik} \equiv -\int\limits_{\partial\tau_b} \rho\left\{n_i\partial_kG + \frac{U_lU_l}{\alpha}n_in_k + \alpha\Pi_i\Pi_k\right\}dS;$$

$$B_i \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\left\{-\alpha\Pi_i\Lambda - \frac{U_kU_k}{\alpha}(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})\,n_i + \frac{\sigma_iG}{2} + \frac{n_i}{2}(\mathbf{z}\cdot[\mathbf{r}_0\times\nabla G]) - \frac{\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\partial_iG\right\}dS;$$

$$C \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\left\{\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma}\,(\mathbf{z}\cdot[\mathbf{r}_0\times\nabla G]) - \alpha\Lambda^2 - \frac{U_kU_k}{\alpha}(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})^2\right\}dS;\quad \Lambda \equiv (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\,(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{U});$$

$$D \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha\,(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})^2\,dS;\quad H \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\Lambda\,dS;\quad L_i \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha\,(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})\,n_i\,dS;$$

$$N_i = \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha\Lambda n_i\,dS;\quad M_i \equiv \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\alpha\,(\mathbf{r}_0\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\Pi_i\,dS.$$

Интеграл энергии (4.2) положительно определен, если одновременно выполняются следующие условия:

$$\frac{d\Psi}{d\Omega} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b; \tag{4.3}$$

$$\lambda_{ik}u_iu_k \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b; \tag{4.4}$$

$$\alpha \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\tau_b; \tag{4.5}$$

$$W \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Условие (4.3) совпадает с достаточным условием устойчивости Арнольда для плоских течений идеальной несжимаемой жидкости в фиксированной области [6]. Пусть оно выполнено. Пользуясь произволом α, выбираем его таким, чтобы выполнялись условия (4.4) и (4.5). Это всегда можно сделать, выбирая поле α достаточно малым. Теперь условия знакоопределенности E_1 совпадают с условиями знакоопределенности квадратичной формы W от $\dot{R}_i$, R_i, $\dot{\varphi}$, φ. Из вида W (4.2) следует, что при достаточно малых α (таких, что $\max\{F_{11}, F_{22}\} < m$, $D < I$) можно найти такие a_{ik}, b_i, c, для которых квадратичная форма W будет положительно определена. Таким образом, справедливо следующее: если для основного решения (1.7) выполняется условие устойчивости Арнольда

$$\frac{d\Psi}{d\Omega} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \tau - \tau_b,$$

то всегда существует такой потенциал Φ_b внешних сил, действующих на тело, что решение (1.7) будет устойчиво в смысле сохранения интеграла энергии E_1 (4.2). Это означает, что внешними силами, действующими на тело, можно стабилизировать его движение в вихревом потоке, удовлетворяющем условию устойчивости Арнольда.

Можно явно сформулировать достаточные для положительной определенности интеграла энергии условия, которым должен удовлетворять потенциал внешних сил Φ_b. Чтобы избежать громоздких вычислений, остановимся на частном случае, когда тело представляет собой круговой цилиндр радиуса r_1. Тогда обобщенная координата φ циклическая, и те возмущения, которые являются поворотами тела, можно не рассматривать. Интеграл энергии E_1 (3.9) при этом принимает вид

$$(4.7)\qquad E_1 = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho \left[\frac{u_i u_i}{2} + \frac{d\Psi}{d\Omega}\frac{\omega^2}{2}\right] d\tau - \int\limits_{\partial\tau_b} \rho\,(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}) \left[\mathbf{U}\cdot\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{R}\cdot\nabla G\right] dS +$$
$$+ \frac{m}{2}\dot{R}_i\dot{R}_i + \frac{1}{2}a_{ik}R_iR_k.$$

Введем полярную систему координат (r, ϑ). Пусть (U, V) и (u, v) — соответствующие составляющие поля скорости основного течения и возмущения. Положим $\alpha = r_1\tilde{\alpha} = \mathrm{const}$ на $\partial\tau_b$. Тогда аналогичное (4.2) выражение для интеграла энергии можно записать в форме

$$(4.8)\qquad E_1 = K^* + \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \rho r_1^2\tilde{\alpha}\left(v - \frac{V}{r_1\tilde{\alpha}}\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\right)^2 d\vartheta + W,$$

$$2W = (m\delta_{ik} - F_{ik})\,\dot{R}_i\dot{R}_k - 2Q_{ik}\dot{R}_iR_k + (a_{ik} + A_{ik})\,R_iR_k.$$

Поскольку для кругового цилиндра $\mathrm{n} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $\sigma = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$, то можно получить

$$F_{ik} = \tilde{\alpha}\mu\delta_{ik}, \quad \mu \equiv \rho\pi r_1^2, \quad Q_{ik} = \tilde{\alpha}\mu\tilde{Q}_{ik}, \quad \tilde{Q}_{ik} \equiv \frac{1}{\pi r_1}\int\limits_0^{2\pi} V n_i\sigma_k\, d\vartheta,$$

$$A_{ik} = \mu\left(A_{ik}^0 - \tilde{\alpha}A_{ik}^+ - \frac{1}{\tilde{\alpha}}A_{ik}^-\right), \quad A_{ik}^0 \equiv -\frac{1}{\pi r_1}\int\limits_0^{2\pi} n_i\partial_k G\, d\vartheta,$$

$$A_{ik}^+ \equiv \frac{1}{\pi r_1^2}\int\limits_0^{2\pi} \partial_\vartheta(n_iV)\,\partial_\vartheta(n_kV)\, d\vartheta, \quad A_{ik}^- \equiv \frac{1}{\pi r_1^2}\int\limits_0^{2\pi} V^2 n_i n_k\, d\vartheta.$$

Следовательно,

$$(4.9)\qquad 2W = (m - \tilde{\alpha}\mu)\,\dot{R}^2 - 2\tilde{\alpha}\mu\tilde{Q}_{ik}\dot{R}_iR_k + \mu\left(\frac{1}{\mu}a_{ik} + A_{ik}^0 - \tilde{\alpha}A_{ik}^+ - \frac{1}{\tilde{\alpha}}A_{ik}^-\right)R_iR_k.$$

Выделяя в (4.9) полный квадрат, имеем

$$(4.10) \qquad 2W = (m - \tilde{\alpha}\mu)\left(\dot{R}_i - \frac{\tilde{\alpha}\mu}{m - \tilde{\alpha}\mu}\tilde{Q}_{ik}R_k\right)^2 + 2\mu w_{ik}R_iR_k,$$

$$2w_{ik} \equiv \frac{1}{\mu}a_{ik} + A^0_{ik} - \tilde{\alpha}A^+_{ik} - \frac{1}{\tilde{\alpha}}A^-_{ik} - \frac{\tilde{\alpha}^2\mu}{m - \tilde{\alpha}\mu}\tilde{Q}_{li}\tilde{Q}_{lk}.$$

Из (4.10) следует, что квадратичная форма W положительно определена, если выполнены условия

$$(4.11) \qquad \tilde{\alpha} \leqslant m/\mu;$$

$$(4.12) \qquad w_{ik}R_iR_k \geqslant 0.$$

Таким образом, выбирая $\tilde{\alpha}$ так, чтобы (4.11) было выполнено, можно затем для любого решения вида (1.7) проверить справедливость неравенства (4.12). Если оно выполнено, то имеет место устойчивость в смысле сохранения интеграла (4.8).

5. Устойчивость течения между цилиндрами. Рассмотрим течение с круговыми линиями тока между цилиндрами. Внутренний цилиндр предполагается незакрепленным. Его движение описывается уравнениями движения твердого тела. Пусть r_1, r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров. Основное решение (1.7) таково:

$$(5.1) \qquad \dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{R}_0 = 0, \quad V = V(r), \quad \Omega = V'(r) + V(r)/r.$$

Интеграл энергии (4.7) можно записать в форме

(5.2)

$$E_1 = \int\limits_{\tau-\tau_b} \rho\left[\frac{u^2+v^2}{2} + \frac{V}{\Omega'}\frac{\omega^2}{2}\right]d\tau + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 - \int\limits_0^{2\pi}\rho\,(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\left[Vv + \frac{1}{2}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\,VV'\right]r_1\,d\vartheta.$$

Считается, что внешние силы отсутствуют: $\Phi = \Phi_b = 0$.

Поскольку основное решение (5.1) инвариантно относительно поворотов вокруг оси z, то в силу линеаризованных уравнений движения (3.1)—(3.3) и граничных условий (3.7), (3.8) сохраняется также интеграл M, представляющий собой вторую вариацию момента импульса системы тело — жидкость:

$$(5.3) \qquad M = \int\limits_{\tau-\tau_b}\rho\frac{r}{\Omega'}\frac{\omega^2}{2}d\tau - \int\limits_0^{2\pi}\rho\,(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\left[v + \frac{1}{2}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})\,\Omega\right]r_1^2\,d\vartheta + m\mathbf{z}\cdot(\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}})$$

(сохранение M можно показать прямыми вычислениями). Из E_1 и M составляется сохраняющийся функционал $E = E_1 + \lambda M$ (λ — произвольная постоянная). Если выбрать $\lambda = -V(r_1)/r_1$, то E примет форму

$$(5.4) \qquad E = \int\limits_{\tau-\tau_b}\rho\left[\frac{u^2+v^2}{2} + g(r)\frac{\omega^2}{2}\right]d\tau + \rho\pi r_1^2\lambda^2\left[1 - \frac{m}{\rho\pi r_1^2}\right]\frac{\mathbf{R}^2}{2} +$$

$$+ \frac{m}{2}[\dot{R}_1 - \lambda R_2]^2 + \frac{m}{2}[\dot{R}_2 + \lambda R_1]^2,$$

где $g(r) \equiv (V(r) + \lambda r)/\Omega'(r)$; R_1, R_2 — компоненты вектора $\mathbf{R}$ в декартовой системе координат x, y.

Интеграл (5.4) положительно определен, и, следовательно, имеет место устойчивость, если выполнены условия

$$(5.5) \qquad g(r) = \frac{V(r) - rV(r_1)/r_1}{\Omega'(r)} \geqslant 0, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2;$$

$$(5.6) \qquad m \leqslant \rho\pi r_1^2.$$

Для течения с постоянным вихрем ($\Omega(r) = \text{const}$), которому соответствует профиль скорости

$$(5.7) \qquad V(r) = Ar + B/r,$$

достаточное условие устойчивости в классе потенциальных возмущений сводится к неравенству (5.6).

Другое достаточное условие устойчивости для течения (5.7) получается непосредственно из условий (4.11), (4.12). Можно показать, что для (5.7) достаточное условие устойчивости (в смысле сохранения интеграла (4.8)) состоит в одновременном выполнении следующих неравенств:

$$-1 \leqslant r_1\tilde{\alpha}r\left(\frac{1}{r}\chi'\right)' \leqslant 1; \tag{5.8}$$

$$r_1 V(r_1)\, V'(r_1) \leqslant -\gamma(\tilde{\alpha})\,(V(r_1))^2, \quad \gamma(\tilde{\alpha}) \equiv \tilde{\alpha} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} + \frac{\tilde{\alpha}}{m/\mu - \tilde{\alpha}}, \quad \mu \equiv \rho\pi r_1^2, \tag{5.9}$$

где $\boldsymbol{\alpha} \equiv r_1\tilde{\alpha}\,(\mathbf{z} \times \nabla\chi)$. Если выбрать $\chi(\mathbf{x})$ в виде

$$\chi'(r) = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \tag{5.10}$$

то из (5.8), (5.9) с учетом (5.7) вытекает

$$\tilde{\alpha} \leqslant \varkappa \equiv 1 - \frac{r_1}{r_2}; \tag{5.11}$$

$$-\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \leqslant \frac{B}{Ar_1^2} \leqslant -1. \tag{5.12}$$

Из (4.11), (5.11), (5.12) следует, что, выбирая параметр

$$\tilde{\alpha} < \min\{\varkappa, m/\mu\},$$

получаем условие (5.12) на профиль скорости (5.7), которое является достаточным условием устойчивости. Следует отметить, что достаточные условия устойчивости (5.6) и (5.12) не совпадают. Неравенство (5.12) выделяет более узкий класс устойчивых течений вида (5.7), но в отличие от (5.6) справедливо для случая, когда масса тела больше массы вытесненной им жидкости, т. е. когда нарушается условие (5.6).

Авторы благодарят Б. А. Луговцова, Р. М. Гарипова, С. М. Шугрина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика / Пер. 6-го англ. изд. — М.: ОГИЗ, 1947.
2. **Kelvin Lord, Tait P. G.** Treatise on natural philosophy. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1912. — Pt 1.
3. **Ляпунов А. М.** О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости // Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1954.
4. **Воинов О. В., Петров А. Г.** Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1303—1306.
5. **Воинов О. В., Петров А. Г.** Об устойчивости малой сферы в неоднородном потоке несжимаемой жидкости // ПМТФ. — 1973. — № 5. — С. 57—61.
6. **Арнольд В. И.** Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // ДАН СССР. — 1965. — Т. 162, № 5. — С. 975—978.
7. **Владимиров В. А.** Условия устойчивости течений идеальной жидкости с разрывами вихря // ПМТФ. — 1988. — № 1. — С. 83—91.
8. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
9. **Арнольд В. И.** Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // Прикл. математика и механика. — 1965. — Т. 29, вып. 5. — С. 846—851.

г. Новосибирск

Поступила 11 / II 1993 г.,
в окончательном варианте — 2 / IV 1993 г.