

Форму поверхности жидкости и координаты на любой момент времени можно определить из (2):

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= yr \cos \varphi, \quad r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \pi], \\ y &= \frac{1}{t^{5\alpha+3}} r \sin \varphi, \quad l = l_0 + t^{-\frac{2}{5\alpha+3}} \psi(r, \varphi) \end{aligned}$$

( $r, \varphi, \psi$  указаны в табл. 2). Из вида решения (10) и рис. 4, 5 имеем, что со временем край нелинейно-вязкой жидкости наступает вперед, толщина ее уменьшается, т. е. наблюдается пространственное растекание.

Полученное автомодельное решение отражает качественные закономерности течения и может служить обоснованием при разработке численных методов решения задач реального пространственного растекания нелинейно-вязкой жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Шумский П. А. Простейшая математическая модель трехмерного нестационарного ледника // Науч. тр./Ин-т механики МГУ.— 1975.— № 42.
2. Саламатин А. Н. Анализ простейших математических моделей куполовидных ледников // Исследования по прикладной математике.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979.— Вып. 7.
3. Ахмедова Ф. Х., Чугунов В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения, описывающего двумерное течение ледников // ПМТФ.— 1987.— № 1.
4. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
5. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
6. Карчевский М. М., Ляшко А. Д. Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Ч. 1. Квазилинейные эллиптические уравнения.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976.

*г. Набережные Челны*

*Поступила 14/VI 1989 г.*

УДК 532.5

*Ю. А. Березин, В. П. Жуков*

#### КОНВЕКЦИЯ В СРЕДЕ СО СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В [1] нами подробно изучена линейная стадия конвективной неустойчивости крупномасштабных возмущений при наличии гиротропной или спиральной турбулентности на основе уравнений [2]. Было показано, что с увеличением спиральности горизонтальный размер конвективных ячеек возрастает и при достижении критической спиральности происходит полная перестройка течения с образованием вихря, размер которого определяется горизонтальной неоднородностью задачи.

Проведем теперь в рамках уравнений [1, 2] исследование нелинейной стадии конвективной неустойчивости. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= (-1/\rho_0) \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \beta g \theta \mathbf{e} + \beta g A \mathbf{f}, \\ \partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \theta &= A(\mathbf{e} \mathbf{u}) + \chi \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{e}(\mathbf{e} \operatorname{rot} \lambda \mathbf{u}) - (\mathbf{e} \nabla)[\mathbf{e} \cdot \lambda \mathbf{u}], \quad \mathbf{e} = (0, 0, 1), \end{aligned}$$

где  $\lambda = \lambda_0 \alpha(r, z)$  — коэффициент спиральности;  $\lambda_0 = \text{const}$ ; остальные обозначения совпадают с [1]. В безразмерных переменных получим

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{u} + \text{Ra} \theta \mathbf{e} + \mathbf{f}, \\ \partial \theta / \partial t + (\mathbf{u} \nabla) \theta &= (\mathbf{e} \mathbf{u}) + \Delta \theta, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{f} &= \mathbf{e}(\mathbf{e} \operatorname{rot} \alpha \mathbf{u}) - (\mathbf{e} \nabla)[\mathbf{e} \cdot \alpha \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

© 1990 Березин Ю. А., Жуков В. П.

Здесь  $Ra = \beta gAH^4/\nu^2$ ;  $s = Ra\lambda_0\nu/H^3$ ;  $H$  — высота слоя жидкости;  $H$ ,  $t_0 = H^2/\nu$ ,  $u_0 = \nu/H$ ,  $p_0 = \rho_0\nu^2/H^2$ ,  $T_0 = AH$  — масштабы длины, времени, скорости, давления, температуры.

Рассмотрим двумерную задачу для плоского слоя в переменных функция тока — вихрь

$$\omega = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x, \quad u = \partial\psi/\partial z, \quad w = -\partial\psi/\partial x,$$

записав уравнения (1) в форме

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(z, x)} &= \Delta\omega - Ra \frac{\partial\theta}{\partial x} + s \left( \frac{\partial^2\alpha v}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\alpha v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, v)}{\partial(z, x)} - \Delta v - s \frac{\partial\alpha v}{\partial z}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(z, x)} &= \Delta\theta + w, \\ \Delta\psi &= \omega, \quad \frac{\partial(\psi, f)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \mathbf{u} = (u, v, w). \end{aligned}$$

Ось  $z$  направлена поперек слоя, ось  $x$  — вдоль.

Найдем стационарное ( $\partial/\partial t = 0$ ) нелинейное решение системы (2) в ограниченной области  $0 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq x_0$  с периодическими граничными условиями по обеим координатам в случае слабой надкритичности, когда число Рэлея  $Ra$  немного превышает критическое число  $Ra_*$ . Спиральность считается однородной ( $\alpha = 1$ ). Инкремент наиболее быстрорастущей гармоники мал, поэтому можно ожидать, что слабая нелинейность стабилизирует рост возмущения уже при малой его амплитуде.

Перепишем стационарный аналог системы (2) в виде

$$(3) \quad L_0\mathbf{f} = \partial(\psi, \mathbf{f})/\partial(z, x),$$

где

$$\mathbf{f} = (\omega, v, \theta, \psi), \quad L_0\mathbf{f} \equiv - \begin{pmatrix} Ra \partial\theta/\partial x - s(\partial^2 v/\partial z^2 - \partial^2 v/\partial x^2) \\ s\partial^2\psi/\partial z^2 \\ \partial\psi/\partial x \\ \omega \end{pmatrix} + \Delta\mathbf{f},$$

и представим ее решение, следуя обычной процедуре (см., например, [3]), в виде ряда по малому параметру  $\varepsilon$ , характеризующему степень надкритичности жидкости:

$$\mathbf{f} = \varepsilon\mathbf{f}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{f}^{(2)} + \dots, \quad \varepsilon^2 = Ra - Ra_*.$$

Тогда уравнение (3) можно записать как

$$(4) \quad L\mathbf{f} = \partial(\psi, \mathbf{f})/\partial(z, x) + (\varepsilon^2\partial\theta/\partial x)\boldsymbol{\eta},$$

где

$$\boldsymbol{\eta} = (1, 0, 0, 0), \quad L\mathbf{f} \equiv \Delta\mathbf{f} - \begin{pmatrix} Ra_* \partial\theta/\partial x - s(\partial^2 v/\partial z^2 - \partial^2 v/\partial x^2) \\ s\partial^2\psi/\partial z^2 \\ \partial\psi/\partial x \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Приравнивая в (4) члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , получим уравнения последовательных приближений

$$(5) \quad L\mathbf{f}^{(1)} = 0, \quad L\mathbf{f}^{(2)} = \partial(\psi^{(1)}, \mathbf{f}^{(1)})/\partial(z, x);$$

$$(6) \quad L\mathbf{f}^{(3)} = \frac{\partial(\psi^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(\psi^{(2)}, \mathbf{f}^{(1)})}{\partial(z, x)} + \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x}\boldsymbol{\eta}.$$

Из этих уравнений с использованием периодических граничных условий находим

$$(7) \quad \mathbf{f}^{(1)} = \beta_1 \begin{pmatrix} -K^2 \sin kx \sin \pi z \\ (s\pi^2/K^2) \sin kx \sin \pi z \\ (k/K) \cos kx \sin \pi z \\ \sin kx \sin \pi z \end{pmatrix} \equiv \beta_1 \xi, \quad K^2 = \pi^2 + k^2;$$

$$(8) \quad \mathbf{f}^{(2)} = \beta_2 \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_2^2 (k^2/8\pi K^2) \sin 2\pi z \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $k = \pi n/x_0$ ,  $n$  — целое число, которое выбирается таким образом, чтобы  $Ra_* = (K^6 - s^2\pi^2(\pi^2 - k^2))/k^2$ , вычисленное при данном значении  $n$ , было минимальным; коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определяются из условий разрешимости уравнений третьего и четвертого приближений соответственно).

Подставим теперь решения (7), (8) в уравнение (6). Тогда

$$(9) \quad L\mathbf{f}^{(3)} = \begin{pmatrix} \beta_1 (k/K)^2 \sin kx \sin \pi z \\ 0 \\ \pi\beta_1\beta_2 (k^2/K^2) \sin 2\pi z - \beta_1^3 (k^3/8K^2) \cos kx (\sin \pi z - \sin 3\pi z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ищем решение уравнения (9) в виде

$$(10) \quad \omega^{(3)} = (A_1 \sin \pi z + A_2 \sin 3\pi z) \sin kx, \\ \theta^{(3)} = (B_1 \sin \pi z + B_2 \sin 3\pi z) \cos kx + B_3 \sin 2\pi z, \dots$$

Условие разрешимости системы линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_1, A_2, \dots$ , полученных после подстановки (10) в (9), позволяет найти коэффициент  $\beta_1 = \pm (K/k) (8/Ra_*)^{1/2}$ .

Таким образом, амплитуда стационарного нелинейного режима пропорциональна величине

$$\varepsilon\beta_1 = (K/k) [8(Ra - Ra_*)/Ra_*]^{1/2}.$$

Рассмотрим стационарные нелинейные решения при слабой надкритичности для случая бесконечного горизонтального слоя ( $0 \leq z \leq 1$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ):

$$f = \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots, \quad Ra = Ra^{(0)} + \varepsilon^2 Ra^{(2)} + \dots$$

Известно, что мерой интенсивности конвективного движения может служить тепловой поток  $\langle w\theta \rangle = \int w\theta dV / \int dV$ , пропорциональный разности между всем переносимым через слой теплом и тем теплом, которое переносится только за счет теплопроводности при заданном равновесном температурном градиенте. Поэтому пронормируем стационарное решение в рассматриваемом случае на указанный тепловой поток:  $\langle w\theta \rangle = \varepsilon^2$ , или

$$(11) \quad \langle w^{(1)}\theta^{(1)} \rangle = 1, \quad \langle w^{(1)}\theta^{(2)} + w^{(2)}\theta^{(1)} \rangle = 0, \dots$$

Решение уравнений первого приближения имеет вид (7) с коэффициентом  $\beta_1 = 2K/k$ , полученным из условия нормировки (11). Волновое число  $k$  в горизонтальном направлении определяется как значение, при котором достигается минимум нейтральной кривой, т. е.  $Ra^{(0)} = \min [(K^6 - s^2\pi^2(\pi^2 - k^2))/k^2]$ .

Для решения уравнений второго приближения, описываемого формулой (8), нормировка (11) дает  $\beta_2 = 0$ , поэтому во втором приближении поправка к вихрю и функции тока (и, соответственно, к скорости) отсутствует, а в выражении для температуры появляется вторая гармоника по

координате  $z$ , не зависящая от  $x$ . Уравнение третьего приближения (6) в рассматриваемом случае

$$L\mathbf{f}^{(3)} = \frac{\partial(\psi^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(\psi^{(2)}, \mathbf{f}^{(1)})}{\partial(z, x)} + \text{Ra}^{(2)} \frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial x} \mathbf{e}_z.$$

Подставляя в правую часть решения первого и второго приближений (7), (8) с коэффициентами  $\hat{\beta}_1 = 2K/k$ ,  $\beta_2 = 0$  и используя условие разрешимости полученного при этом неоднородного уравнения, которое заключается в ортогональности правой части к собственным функциям оператора  $L$ , найдем  $\text{Ra}^{(2)} = (1/2)\text{Ra}^{(0)}$ , или  $\varepsilon^2 = 2(\text{Ra} - \text{Ra}^{(0)})/\text{Ra}^{(0)}$ .

В третьем приближении выражения для скоростей и температуры содержат третью гармонику по координате  $z$ .

Увеличение спиральности выше некоторого предела приводит к конвективной неустойчивости, при которой вместо набора ячеек с примерно одинаковыми вертикальным и горизонтальным размерами энергетически более выгодно формирование одной структуры с горизонтальным размером, существенно большим вертикального. Когда спиральность  $s \rightarrow s_*$ , этот размер формально стремится к бесконечности, и ограниченный горизонтальный масштаб структуры можно получить, вводя в задачу горизонтальную неоднородность, например зависимость спиральности от координаты  $x$ .

Рассмотрим результаты численного решения общей нелинейной задачи о конвекции в условиях развитой спиральной турбулентности для осесимметричного случая в области  $0 \leq z \leq 1$ ,  $0 \leq r \leq r_0$  («шайба»), когда спиральность является функцией радиальной координаты:  $\alpha(r) = 1 - (\delta r)^2$ . Система уравнений (1) принимает вид

$$(12) \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} + u \frac{\partial\omega}{\partial r} + w \frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{u\omega}{r} - \frac{2v}{r} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\omega r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} - \text{Ra} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \\ + s \left( \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\alpha v r}{\partial r} \right) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - s\alpha \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} + u \frac{\partial\theta}{\partial r} + w \frac{\partial\theta}{\partial z} = w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \omega, \quad \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Были выбраны следующие граничные условия:

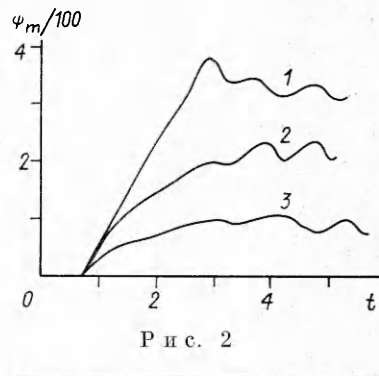
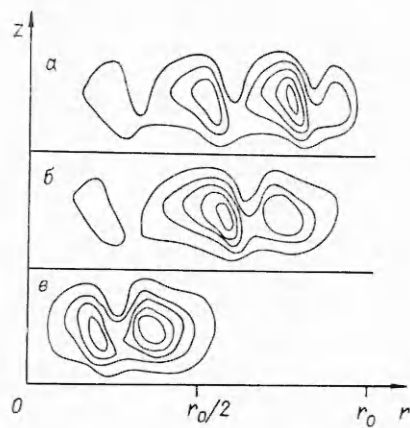
$$(13) \quad u = v = w = 0 \quad (\text{или } \psi = \partial\psi/\partial n = v = 0, \text{ где } n \text{ — нормаль к соответствующей границе}) \text{ на границах } z = 0, z = 1, r = r_0; \theta = 0 \text{ на границах } z = 0, z = 1; \partial\theta/\partial r = 0 \text{ на границе } r = r_0; \psi = v = \omega = \partial\theta/\partial r = 0 \text{ на оси } r = 0.$$

В момент времени  $t = 0$  задавались начальные условия

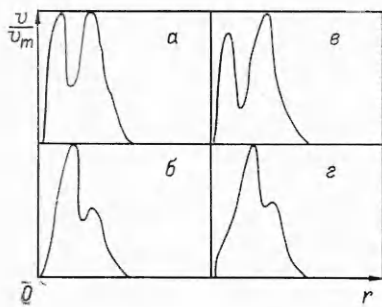
$$(14) \quad \omega(r, z) = \exp \left\{ - \left( \frac{r - a_1}{a_1} \right)^2 - \left( \frac{z - a_2}{a_2} \right)^2 \right\}, \\ v(r, z) = \theta(r, z) = 0.$$

Для численного решения задачи (12)–(14) использовалась явная разностная схема с порядком аппроксимации  $O(\tau, h_1^2, h_2^2)$ , где  $\tau, h_1, h_2$  — шаги по  $t, r, z$  соответственно. Значения функции тока  $\psi$ , вихря  $\omega$  и азимутальной скорости  $v$  вычислялись в точках  $r_i = ih_1, z_j = jh_2$ , температуры — в точках  $r_{i+1/2} = (i + 1/2)h_1, z_j = jh_2$ . Уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$  решалось методом однократного быстрого преобразования Фурье по индексу  $j$  с последующей прогонкой по индексу  $i$ .

Приведем теперь результаты численного решения задачи (12)–(14) для «шайбы» при параметрах  $r_0 = 20, \text{Ra} = 800, s = 8, a_1 = 3, a_2 = 0,5$ ,



Р и с. 1



Р и с. 3

$\tau = 10^{-3}$ ,  $h_1 = 1/3$ ,  $h_2 = 1/8$ . На рис. 1 даны изолинии функции тока при  $\delta = 0$ ; 0,023; 0,046 (a — e), характеризующих степень горизонтальной неоднородности спиральности. Символом  $r_*$  обозначим радиус, на котором инкремент возмущений, вычисленный по локальному значению спиральности  $s_l(r) = s\alpha(r)$ , обращается в нуль, т. е.  $\max_k \gamma(Ra, s_l(r), k^2) = 0$ ,  $\gamma|_{r < r_*} > 0$ ,  $\gamma|_{r > r_*} < 0$  ( $a - e - r_* = \infty$ ;  $r_0$ ;  $r_0/2$ ). На рис. 2 приведена зависимость величины  $\psi_m = \max_{i,j} \psi_{i,j}$  от времени при  $\delta = 0$ ;

0,023; 0,046 (1—3). На рис. 3 представлено радиальное распределение азимутальной скорости  $v(r, z)$  при  $z = 0,5$  и  $\delta = 0,046$  ( $r_*/r_0 = 0,5$ ) в различные моменты времени (a — e —  $t = 3,5$ ; 4,0; 4,5; 5,0), пронормированное на максимальное по расчетной области значение азимутальной скорости  $v_m = \max_{i,j} v_{i,j}$  (a — e —  $v_m = 80$ ; 114; 92; 113).

Анализ результатов расчетов позволяет сделать следующие выводы: 1) На линейной стадии ( $t < 0,5$ ) искомые функции растут экспоненциально. Затем в интервале времени  $1,5 < t < 3$  нелинейные члены становятся существенными, и максимальные по области значения функции тока  $\psi_m$  и азимутальной скорости  $v_m$  растут линейно:  $\psi_m, v_m \sim (t - t_0)$ . При  $t > 3$  величины  $\psi_m$  и  $v_m$  испытывают колебания с периодом  $T \approx 1$  около некоторых постоянных значений. Эти колебания коррелируют с числом экстремумов азимутальной скорости  $v(r, z = 0,5)$ . Наличие колебаний не противоречит первой части работы, где построено стационарное решение в случае слабой надкритичности, поскольку значения  $s$  и  $Ra$  в данном расчете далеки от критических. 2) С увеличением параметра пространственной неоднородности  $\delta$  область локализации течения уменьшается, причем она совпадает с зоной, в которой линейный инкремент  $\gamma$ , вычисленный по локальному значению спиральности  $s_l(r) = s\alpha(r)$ , положителен.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ю. А., Жуков В. П. Конвективная неустойчивость в среде со спиральной турбулентностью // ПМТФ.— 1990.— № 1.
2. Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В. Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // ЖЭТФ.— 1988.— Т. 94, вып. 2.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.

г. Новосибирск

Поступила 13/IV 1989 г.,  
в окончательном варианте — 2/VI 1989 г.