

## РАВНОПРОЧНОЕ ОТВЕРСТИЕ В УСЛОВИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

УДК 539.3

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

При рассмотрении равновесия деформируемого твердого тела в какой-либо модели упругости представляют интерес как прямые, так и обратные задачи. В обратных задачах одна часть величин, определяемых в прямой задаче, наперед задается, другая часть величин, обычно задаваемых, подлежит определению. К числу обратных задач упругости относится и задача о равнопрочном отверстии.

Разрушение или утрата несущей способности конструкции, содержащей отверстие, начинается в местах наибольшей концентрации напряжений на контуре отверстия, причем не сразу по всему контуру, а вначале в некоторых его точках, что и определяет допустимый уровень нагрузок. Равнопрочное отверстие отличается тем, что у него концентрация напряжений одинакова по всему контуру. Такой контур сохраняет или утрачивает прочность одновременно во всех своих точках. Разрушение равнопрочного контура обычно происходит при более высоком уровне нагрузок, что и определяет эффективность использования соответствующих конструкций.

Нахождение равнопрочных отверстий в рамках линейной теории упругости и теории пластичности производилось в ряде работ (см., например, [1, 2]). Ниже эта задача исследуется в варианте В. В. Новожилова геометрически нелинейной упругости [3].

Рассмотрим бесконечную пластинку  $S$ , ослабленную отверстием с гладким контуром  $L$ . Полагаем, что объемные силы отсутствуют, что заданы напряжения и поворот на бесконечности и что контур отверстия нагружен нормальными и тангенциальными усилиями постоянной интенсивности. Требуется определить поля напряжений и поворотов в пластинке и такую форму отверстия, при которой напряжения на нормальных к контуру площадках также были бы постоянными величинами. Таким образом, условия на бесконечности и на контуре отверстия имеют вид

$$P_{xx} = P_{xx}^{\infty}, \quad P_{yy} = P_{yy}^{\infty}, \quad P_{xy} = P_{xy}^{\infty}, \quad \omega_{xy} = \omega_{xy}^{\infty} \quad \text{на } \infty; \quad (1)$$

$$P_{nn} = p = \text{const}, \quad P_{tt} = \sigma = \text{const}, \quad P_{nt} = \tau = \text{const} \quad \text{на } L, \quad (2)$$

где  $P_{xx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{xy}$ ,  $\omega_{xy}$  — компоненты напряжений и поворота в декартовых осях  $x, y$ ;  $P_{nn}$ ,  $P_{tt}$ ,  $P_{nt}$  — компоненты напряжений в естественных осях контура (нормали  $n$  и касательной  $t$  (рис. 1)); постоянные  $p$  и  $\tau$  заданы;  $\sigma$  подлежит определению. Данные условия отвечают задаче о равнопрочном отверстии.

Будем решать сформулированную задачу на основе геометрически нелинейного варианта упругости [3]. В этом варианте предполагается, что удлинения-сдвиги элементов материала того же порядка, что и квадраты их поворотов; вследствие чего компоненты деформаций берутся функциями, линейными относительно первых величин и квадратичными относительно вторых. Принимается также, что механическое поведение материала описывается законом Гука.

Допущения данной модели обычно реализуются в гибких телах, а также в телах с от-

версиями вблизи внутренних и внешних границ. Последнее обстоятельство и определяет использование новожиловской модели для решения поставленной задачи.

Как установлено в [4], в этой теории при плоской деформации напряжения и повороты могут быть представлены через комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  нелинейными формулами, которые обобщают формулы Колосова линейной упругости [5] и при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\begin{aligned} P^{11} = \overline{P^{22}} &= -\bar{z} \left( z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right) - 2k \overline{\varphi''(z)} \left( z \overline{\varphi'(z)} - \varphi(z) \right), \\ P^{21} = P^{12} &= 2 \left( \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right) + k \left( \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} \right)^2, \\ \omega^{21} = \overline{\omega^{12}} &= 2k \left( \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} \right), \quad k = (1 - \nu) / \mu. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  — комплексные переменные;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона; черта над величиной обозначает комплексное сопряжение; штрих у функции — знак производной;  $P^{\alpha\beta}$ ,  $\omega^{\alpha\beta}$  — комплексные компоненты напряжений и поворотов, которые связаны с декартовыми компонентами тех же величин выражениями

$$\begin{aligned} P^{i1} = \overline{P^{22}} &= P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \quad P^{21} = \overline{P^{12}} = P_{xx} + P_{yy}, \\ \omega^{11} = \overline{\omega^{22}} &= 0, \quad \omega^{21} = \overline{\omega^{12}} = 2i\omega_{xy}. \end{aligned} \quad (4)$$

Формулы линейной упругости отличаются от формул (3) отсутствием в них нелинейных членов, содержащих параметр  $k$  [5, 6].

Системе постоянных контурных усилий (2) соответствует нулевой главный вектор. Действительно, обозначив через  $\alpha$  угол нормали к контуру с осью  $x$  (рис. 1), для декартовых компонент нормали  $n_x$ ,  $n_y$  и вектора напряжений  $p_x$ ,  $p_y$  получим

$$\begin{aligned} n_x = \cos \alpha &= \frac{dy}{ds}, \quad n_y = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad p_x = p_n \cos \alpha - p_t \sin \alpha = p \frac{dy}{ds} + \tau \frac{dx}{ds}, \\ p_y &= p_n \sin \alpha + p_t \cos \alpha = -p \frac{dx}{ds} + \tau \frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

( $s$  — дуга контура  $L$ ). Легко видеть, что декартовы (а вместе с ними и комплексные) компоненты главного вектора контурных сил обращаются в нуль в силу однозначности уравнений контура  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ :

$$F_x = \oint_L p_x ds = p \oint_L dy + \tau \oint_L dx = 0, \quad F_y = \oint_L p_y ds = -p \oint_L dx + \tau \oint_L dy = 0, \quad F = F_x + iF_y = 0.$$

В односвязной бесконечной области комплексные потенциалы, вообще говоря, неоднозначны. Требование однозначности напряжений и поворотов приводит к однозначности функций  $\varphi(z)$  и  $\psi'(z)$  [4]. Сами же потенциалы представимы через однозначные функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  формулами

$$\varphi(z) = \varphi_1(z), \quad \psi(z) = B \ln z + \psi_1(z), \quad B = \text{const.} \quad (5)$$

Разлагая однозначные функции в ряды Лорана

$$\varphi_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^n, \quad \psi_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n z^n$$

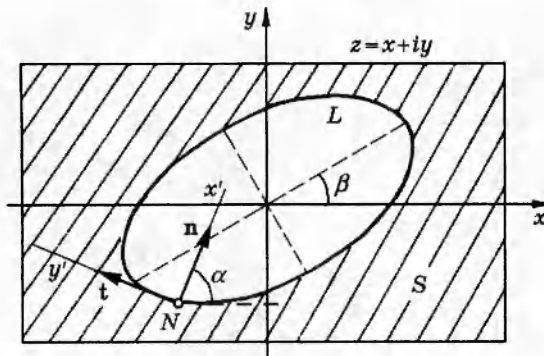


Рис. 1

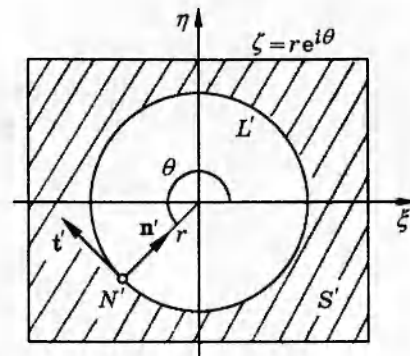


Рис. 2

и используя ограниченность на бесконечности напряжений и поворотов (3), найдем, что потенциалы (5) имеют вид

$$\varphi(z) = A_1 z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = B \ln z + B_1 z + \psi_0(z), \quad (6)$$

где  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  — голоморфные в окрестности бесконечно удаленной точки функции;  $A_1$ ,  $B_1$  определяются условиями на бесконечности, а  $B$  — главным вектором контурных сил:

$$\varphi_0(z) = \sum_0^{\infty} A_{-n} z^{-n}, \quad \psi_0(z) = \sum_0^{\infty} B_{-n} z^{-n}, \quad B = \frac{1}{2\pi} \bar{F} = 0, \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{1}{4k} [k(P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty}) + (\omega_{xy}^{\infty})^2 + 2i\omega_{xy}^{\infty}], \quad B_1 = \frac{1}{2} (P_{yy}^{\infty} - P_{xx}^{\infty} + 2iP_{xy}^{\infty}).$$

Отобразим конформно внешность  $S$  отверстия на внешность  $S'$  круга единичного радиуса (рис. 1 и 2) с соответствием бесконечно удаленных точек с помощью голоморфной функции

$$z = w(\zeta) = c\zeta + w_0(\zeta), \quad c = \text{const}, \quad w_0(\zeta) = \sum_0^{\infty} c_n \zeta^{-n}, \quad \zeta = r e^{i\theta} \in S' \quad (8)$$

и будем полагать постоянную  $c$  вещественной и положительной ( $c = \bar{c} > 0$ ), что отвечает отсутствию вращения окрестности бесконечно удаленной точки при отображении. Тогда комплексные потенциалы (6) и их производные преобразуются:

$$\varphi(z) = \varphi(\zeta) = cA_1 \zeta + \sum_0^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \psi(z) = \psi(\zeta) = cB_1 \zeta + \sum_0^{\infty} b_n \zeta^{-n}, \quad (9)$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{w'(\zeta)} = \Phi(\zeta), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z) = \frac{\Phi'(\zeta)}{w'(\zeta)}, \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \frac{\psi'(\zeta)}{w'(\zeta)} = \Psi(\zeta),$$

а комплексные напряжения и поворот (3) принимают вид

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -\frac{2}{w'(\zeta)} \left\{ \overline{w'(\zeta)} \overline{\Psi(\zeta)} + \overline{\Phi'(\zeta)} [w(\zeta)(1 + k\overline{\Phi(\zeta)}) - k\varphi(\zeta)] \right\}, \quad (10)$$

$$P^{21} = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] + k[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}]^2, \quad \omega^{21} = 2k[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)}].$$

Нормаль и касательную  $n, t$  в точке  $N$  контура  $L$  можно рассматривать как декартовы оси  $x', y'$ , повернутые относительно осей  $x, y$  на угол  $\alpha$  между нормалью и осью абсцисс

(см. рис. 1). Формулы преобразования комплексных компонент напряжений при повороте осей на этот угол с учетом (4) запишем как

$$P_{x'x'} - P_{y'y'} + 2iP_{x'y'} = P'^{11} = P^{11} e^{-2i\alpha}, \quad P_{x'x'} + P_{y'y'} = P'^{21} = P^{21}. \quad (11)$$

Значение угла  $\alpha$  определяется с помощью преобразования элементарного смещения вдоль нормали к контуру при конформном отображении (рис. 1, 2):

$$dz = |dz| e^{i\alpha}, \quad d\zeta = |d\zeta| e^{i(\theta-\pi)} = -|d\zeta| \frac{\zeta}{|\zeta|}, \quad (12)$$

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{w'}{|w'|} \frac{d\zeta}{|d\zeta|} = -\frac{w'(\zeta)}{|w'(\zeta)|} \frac{\zeta}{|\zeta|}, \quad e^{2i\alpha} = \frac{w'(\zeta)}{w'(\zeta)} \frac{\zeta}{\zeta},$$

после чего формулы (11) (с учетом (12) и совпадения осей  $x' = n$ ,  $y' = t$ ) имеют вид

$$P_{nn} - P_{tt} - 2iP_{nt} = \frac{\zeta}{\zeta} \frac{w'(\zeta)}{w'(\zeta)} P^{11}, \quad P_{nn} + P_{tt} = P^{21} \quad \text{на } L. \quad (13)$$

Наконец, использование граничных условий (2) и представлений комплексных напряжений (10) приводит (13) к краевой задаче для комплексных потенциалов и отображающей функции:

$$\sigma - p + 2i\tau = \frac{2\zeta^2}{w'(\zeta)} \left\{ w'(\zeta)\Psi(\zeta) + \Phi'(\zeta) \left[ \overline{w(\zeta)}(1 + k\Phi(\zeta)) - k\overline{\varphi(\zeta)} \right] \right\}, \quad |\zeta| = 1; \quad (14)$$

$$\sigma + p = 2 \left[ \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} \right] + k \left[ \Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} \right]^2, \quad |\zeta| = 1. \quad (15)$$

Выражения отображения (8) и потенциалов (9) позволяют установить следующие порядки на бесконечности у рассматриваемых функций:

$$w(\zeta) = c\zeta + O(\zeta^0), \quad w'(\zeta) = c + O(\zeta^{-2}), \quad \Psi(\zeta) = B_1 + O(\zeta^{-2}), \quad (16)$$

$$\varphi(\zeta) = cA_1\zeta + O(\zeta^0), \quad \Phi(\zeta) = A_1 + O(\zeta^{-2}), \quad \Phi'(\zeta) = O(\zeta^{-3}).$$

Потенциал  $\Phi(\zeta)$ , как это видно из (16), ограничен на бесконечности и определяется краевым условием (15), выражающим постоянство на контуре нелинейной комбинации его действительной и мнимой части. Этим условиям можно удовлетворить, полагая потенциал постоянным всюду в бесконечной области:  $\Phi(\zeta) = \text{const}$ . Воспользовавшись следствием соотношений (10)  $\Phi(\zeta) = (1/(4k))[kP^{21} + \omega^{21}(1 - \omega^{21}/4)]$  и выражением (7), находим, что эта постоянная определяется условиями на бесконечности:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{4k} \left[ kP_{\infty}^{21} + \omega_{\infty}^{21} \left( 1 - \frac{\omega_{\infty}^{21}}{4} \right) \right] = \frac{1}{4k} \left[ k(P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty}) + (\omega_{xy}^{\infty})^2 + 2i\omega_{xy}^{\infty} \right] = A_1. \quad (17)$$

При известном потенциале  $\Phi(\zeta)$  условие (15) становится уравнением

$$\sigma = P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty} - p. \quad (18)$$

Таким образом, согласно (18),  $\sigma$  определяется контурными и периферийными нагрузками.

В силу (17)  $\Phi'(\zeta) = 0$ , поэтому равенство (14) становится краевым условием для нахождения функций  $w(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ :

$$E \overline{w'(\zeta)} = \zeta^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta), \quad |\zeta| = 1, \quad E = E_1 + iE_2 = (1/2)(P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty}) - p + i\tau. \quad (19)$$

Путем аналитического продолжения представим (19) в виде функционального уравнения, справедливого во внешности единичного круга,

$$E \bar{w}'(1/\zeta) = \zeta^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta), \quad \zeta \in S' \quad (20)$$

и используем его для определения искомых функций.

Будем искать составную часть  $w_0(\zeta)$  отображения (8) в форме полинома по нечетным степеням аргумента, так что само отображение принимает вид

$$w_0(\zeta) = \sum_0^l c_{2k+1} \zeta^{-(2k+1)}, \quad w(\zeta) = c\zeta + c_1 \zeta^{-1} + c_3 \zeta^{-3} + \dots + c_{2l+1} \zeta^{-(2l+1)}, \quad c = c. \quad (21)$$

Показатель полинома найдем из условия совпадения на бесконечности порядков левой и правой части уравнения (20).

На основании (21) устанавливаем, что входящие в (20) производные от отображения имеют следующие порядки на бесконечности:

$$\begin{aligned} w'(\zeta) &= c - c_1 \zeta^{-2} - \dots - (2l+1)c_{2l+1} \zeta^{-(2l+2)} = O(\zeta^0), \\ \bar{w}'(1/\zeta) &= c - \bar{c}_1 \zeta^2 - \dots - (2l+1)\bar{c}_{2l+1} \zeta^{2l+2} = O(\zeta^{2l+2}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (16) видно, что, согласно уравнению (20),  $O(\zeta^{2l+2}) = O(\zeta^2)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Следовательно, порядки частей равенства согласуются при  $l = 0$ . Таким образом, отображающая функция (21) содержит два параметра (вещественный и комплексный) и имеет вид

$$z = w(\zeta) = c\zeta + c_1/\zeta = n(\zeta + m/\zeta), \quad n = \bar{n} = c, \quad m = m_1 + im_2 = c_1/c. \quad (22)$$

Используя (20) и (22), находим другой потенциал:

$$\Psi(\zeta) = E(1 - \bar{m}\zeta^2)/(\zeta^2 - m), \quad (23)$$

где постоянная  $E$  определяется формулой (19).

Потенциалам (17) и (23) отвечают следующие значения комплексных компонент напряжений и поворотов (10):

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = 2E \frac{m\bar{\zeta}^2 - 1}{\zeta^2 - \bar{m}}, \quad F^{21} = P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty, \quad \omega^{21} = 2i\omega_{xy}^\infty. \quad (24)$$

Устремляя в первом из них  $\zeta \rightarrow \infty$ , получим равенство  $P_\infty^{11} = 2Em$ , которое при учете условий (1) и (19) определяет параметр  $m$ :

$$m = m_1 + im_2 = \frac{P_{xx}^\infty - P_{yy}^\infty + 2iP_{xy}^\infty}{P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p - 2i\tau}. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{(P_{xx}^\infty - P_{yy}^\infty)(P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p) - 4\tau P_{xy}^\infty}{(P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p)^2 + 4\tau^2}, \\ m_2 &= 2 \frac{P_{xy}^\infty(P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p) + \tau(P_{xx}^\infty - P_{yy}^\infty)}{(P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p)^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, параметр  $m$ , фигурирующий в (22), определяется заданными контурными и периферийными нагрузками.

В соответствии с выбором отображения равнопрочным контуром будет та кривая, в которую переходит окружность единичного круга при отображающей функции (22). Полагая для точек этой окружности  $\zeta = \exp(i\theta)$  и отделяя в (22) действительную часть и мнимую, получаем параметрическое уравнение равнопрочного контура:

$$x = n[(1 + m_1) \cos \theta + m_2 \sin \theta], \quad y = n[m_2 \cos \theta + (1 - m_1) \sin \theta]$$

или

$$m_2 x - (1 + m_1)y = -n(1 - m_1^2 - m_2^2) \sin \theta, \quad (1 - m_1)x - m_2 y = n(1 - m_1^2 - m_2^2) \cos \theta. \quad (27)$$

Возведение в квадрат каждого из равенств (27) и сложение результатов исключает переменный параметр  $\theta$  и дает явное уравнение равнопрочного контура в форме центральной кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{11} = (1 - m_1)^2 + m_2^2, \quad a_{22} = (1 + m_1)^2 + m_2^2, \quad (28)$$

$$a_{33} = -n^2(1 - m_1^2 - m_2^2)^2, \quad a_{12} = a_{21} = -2m_2, \quad a_{13} = a_{31} = 0, \quad a_{23} = a_{32} = 0.$$

Инварианты  $I$ ,  $D$ ,  $A$  этой кривой, а также определяемая ею величина  $A'$  имеют вид

$$I = a_{11} + a_{22} = 2(1 + m_1^2 + m_2^2), \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (1 - m_1^2 - m_2^2)^2, \\ A = \det(a_{kl})_{k,l=1}^3 = -n^2(1 - m_1^2 - m_2^2)^4, \quad (29)$$

$$A' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -2n^2(1 + m_1^2 + m_2^2)(1 - m_1^2 - m_2^2)^2.$$

В общем случае контурные и периферийные нагрузки, а следовательно, и параметры (26) независимы между собой, так что справедливо соотношение

$$1 - m_1^2 - m_2^2 \neq 0, \quad (30)$$

эквивалентное в силу (25) соотношению  $(P_{xx}^\infty - P_{yy}^\infty)^2 + 4(P_{xy}^\infty)^2 \neq (P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty - 2p)^2 + 4\tau^2$ .

Тогда в соответствии с (29)  $D > 0$ ,  $A/I < 0$ , и, согласно известному критерию [7], уравнение (28) равнопрочного контура является уравнением эллипса. Центр эллипса совпадает с началом отсчета декартовой системы координат, угол  $\beta$  между положительным направлением оси абсцисс и его осями симметрии определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (31)$$

а его полуоси  $a$ ,  $b$  выражаются через инварианты и корни  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) характеристического уравнения  $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$  и через параметры (26) формулами

$$a^2 = -\lambda_1 \frac{A}{D^2} = \frac{n^2}{2} (I + \sqrt{I^2 - 4D}) = n^2 (1 + \sqrt{m_1^2 + m_2^2})^2, \\ b^2 = -\lambda_2 \frac{A}{D^2} = \frac{n^2}{2} (I - \sqrt{I^2 - 4D}) = n^2 (1 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2})^2.$$

Отсюда

$$a_{\pm} = n(1 + \sqrt{m_1^2 + m_2^2}), \quad b_{\pm} = \pm n(1 - \sqrt{m_1^2 + m_2^2}), \quad (32)$$

где верхний знак имеет место при  $\sqrt{m_1^2 + m_2^2} < 1$ , а нижний — при  $\sqrt{m_1^2 + m_2^2} > 1$ . В свою очередь, параметры эллипса выражаются через полуоси в виде

$$n = \frac{1}{2} (a_{\pm} \pm b_{\pm}), \quad \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \frac{a_{\pm} \mp b_{\pm}}{a_{\pm} \pm b_{\pm}},$$

откуда видно, что в (22) параметр  $m$  характеризует форму эллипса, а  $n$  — его размеры; первый из них определяется приложенной к пластинке нагрузкой, а второй остается произвольным. Тот факт, что полуоси эллипса (32) пропорциональны произвольному параметру, а наклон осей симметрии (31) не зависит от него, означает, что равнопрочные контуры составляют однопараметрическое семейство подобных эллипсов. Этот результат подобен аналогичному выводу линейной упругости, установленному в [1] иным путем.

Когда инварианты (29) и параметры (26) связаны между собой соотношением

$$0 = I^2 - 4D = 16(m_1^2 + m_2^2) \quad (m_1 = m_2 = 0),$$

полуоси эллипса (32) совпадают друг с другом, а направления его осей симметрии (31) становятся неопределенными — эллипс вырождается в окружность. Этому случаю в силу (26) отвечают следующие связи между элементами нагрузки:

$$(P_{xx}^{\infty} - P_{yy}^{\infty})^2 + 4(P_{xy}^{\infty})^2 = 0, \quad (P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty} - 2p)^2 + 4\tau^2 \neq 0.$$

Эти связи реализуются при «всестороннем» растяжении на бесконечности ( $P_{xx}^{\infty} = P_{yy}^{\infty} = P_0$ ,  $P_{xy}^{\infty} = 0$ ) и произвольных контурных нагрузках (исключая  $(P_0 - p)^2 + \tau^2 = 0$ ).

Альтернативной ситуацией для рассмотренной является такая, когда вместо (30) реализуется равенство

$$1 - m_1^2 - m_2^2 = 0, \quad (33)$$

эквивалентное в силу (26) условию на нагрузку

$$(P_{xx}^{\infty} - P_{yy}^{\infty})^2 + 4(P_{xy}^{\infty})^2 = (P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty} - 2p)^2 + 4\tau^2. \quad (34)$$

Тогда  $D = 0$ ,  $A' = 0$ . Эти условия, согласно известному критерию [7], означают, что уравнения (27) равнопрочного контура определяют вырожденную кривую второго порядка — пару совпадающих прямых, проходящих через начало отсчета:  $m_2x - (1 + m_1)y = 0$ ,  $(1 - m_1)x - m_2y = 0$ , наклон которых к оси абсцисс дается вытекающей из (31) и (33) формулой  $\operatorname{tg} \beta = (1 - m_1)/m_2 = m_2/(1 + m_1)$ .

Само отверстие представляет собой отрезок этих прямых. Действительно, случай (33) можно рассматривать в качестве предельного значения общего условия (30), когда  $m_1^2 + m_2^2 \rightarrow 1$ . При этом предельном переходе полуоси эллипса (32) принимают вид  $a_{\pm} = a = 2n$ ,  $b_{\pm} = b = 0$  и свидетельствуют о том, что эллипс вырождается в прямолинейный разрез длиной  $4n$ , направленный под углом  $\beta$  к оси абсцисс. Поскольку длина разреза в отличие от угла наклона зависит от свободного параметра, то и в этом случае равнопрочные контуры составляют однопараметрическое семейство разрезов, принадлежащих одной прямой, с общим центром симметрии.

Условие (34), в частности, реализуется при «всестороннем» растяжении на бесконечности интенсивности  $P_0$  ( $P_{xx}^{\infty} = P_{yy}^{\infty} = P_0$ ,  $P_{xy}^{\infty} = 0$ ) и нормальной контурной нагрузке той же интенсивности ( $p = P_0$ ,  $\tau = 0$ ).

Таким образом, при нагрузке общего вида равнопрочными контурами будут эллипсы. Если же нагрузка подчинена определенным условиям, то эллипсы вырождаются либо в

окружности, либо в прямолинейные разрезы.

При конформном отображении (22) полярным координатам  $r, \theta$  плоскости единичного круга соответствуют эллиптические координаты в плоскости пластинки. Физические компоненты напряжений и поворотов в этих координатах  $P_{rr}, P_{\theta\theta}, P_{r\theta}, \omega_{r\theta}$  связаны с комплексными компонентами зависимостями [8]

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \frac{\overline{w'(\zeta)}}{w'(\zeta)} P^{11}, \quad P_{rr} + P_{\theta\theta} = P^{21}, \quad 2i\omega_{r\theta} = \omega^{21}.$$

Подстановка в них комплексных компонентов (24) и отображения (22) приводит к следующим полям напряжений и поворотов в эллиптических координатах:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= G + \frac{E_1}{e} [(r^4 + 1)f(\theta) - r^2(1 + m_1^2 + m_2^2)] + \frac{E_2}{e} (r^4 - 1)g(\theta), \\ P_{\theta\theta} &= G - \frac{E_1}{e} [(r^4 + 1)f(\theta) - r^2(1 + m_1^2 + m_2^2)] - \frac{E_2}{e} (r^4 - 1)g(\theta), \\ P_{r\theta} &= \frac{E_1}{e} (r^4 - 1)g(\theta) - \frac{E_2}{e} [(r^4 + 1)f(\theta) - r^2(1 + m_1^2 + m_2^2)], \quad \omega_{r\theta} = \omega_{xy}^\infty, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $G = (1/2)(P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty)$ ;  $e = r^4 - 2r^2 f(\theta) + m_1^2 + m_2^2$ ;  $f(\theta) = m_1 \cos 2\theta + m_2 \sin 2\theta$ ;  $g(\theta) = m_2 \cos 2\theta - m_1 \sin 2\theta$ ;  $m_1, m_2$  и  $E_1, E_2$  определены выражениями (26) и (19). Формулы (28) и (35) решают задачу о равнопрочном отверстии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // ПММ. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 963–974.
2. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
4. Бондарь В. Д. Плоская деформация в геометрически нелинейной упругости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 99–114.
5. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
8. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию 31/VII 1995 г.