УДК 532.526

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ИНЕРЦИОННОМ РЕЖИМЕ С УЧЕТОМ КОНЕЧНОГО ВРЕМЕНИ КОНТАКТА МЕЖДУ ГРАНУЛАМИ

Л. А. Сподарева

Новосибирский военный институт, 630103 Новосибирск

Сыпучие среды в инерционном режиме могут быть описаны законами сохранения массы, импульса, энергии хаотического движения твердых частиц и замыкающими соотношениями, которые в настоящей работе строятся на теории размерностей. Полученная система уравнений использована для определения характеристик стационарного движения слоя сыпучего материала по шероховатой наклонной плоскости при различных числах Ричардсона и конечных временах контакта частиц при соударениях.

Существует много научных и технологических проблем, связанных с движением сухих сыпучих материалов, состоящих из твердых частиц. К ним относятся процессы разработки минерального сырья, порошковые и керамические технологии, производство новых материалов, хранение и транспортировка зерна. Сыпучие среды являются непременными участниками геофизических процессов, в частности лавин.

Основы современных представлений о механике этих сред изложены во многих обзорах и статьях (см., например, [1] и библиографию к ней). В зависимости от плотности среды и скорости сдвига течения обычно различают два предельных режима: 1) квазистационарный режим, соответствующий большим концентрациям гранул и малым скоростям сдвига (частицы находятся в постоянном тесном контакте друг с другом, и поведение материала хорошо объясняется законом сухого трения Кулона — Мора $\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi$, связывающим касательное τ и нормальное σ напряжения, где φ — угол внутреннего трения, равный, например, для мелкого песка 37°); 2) инерционный режим, соответствующий меньшим концентрациям гранул и большим скоростям сдвига течения (между гранулами всегда существуют зазоры (в среднем), и взаимодействие гранул обусловлено их непрерывными соударениями друг с другом).

Согласно [1–3] описание инерционного режима можно проводить, используя законы сохранения массы, импульса, энергии с замыкающими соотношениями, устанавливающими связь давления, вязкости, теплопроводности и уменьшения энергии хаотического движения гранул с плотностью и энергией гранул. Для инерционного режима имеется ряд схем замыкания, например схемы, основанные на кинетической теории плотных газов [4–7], и схемы, опирающиеся на теорию размерностей [3–8]. Заметим, что в промежуточном случае больших концентраций и умеренных скоростей сдвига удовлетворительной моделью сыпучей среды является модель степенной неньютоновской жидкости с показателем $n = 2$, поскольку эксперименты и оценки показывают, что зависимость напряжений от сдвига скоростей квадратичная. В этой модели эффектом соударений гранул, описываемым скалярной функцией — энергией их хаотического движения, пренебрегается. В настоящей работе для анализа стационарного движения слоя сыпучего материала по наклонной шероховатой плоскости используется подход, предложенный в работах [8, 9].

Рассмотрим установившееся движение слоя гранулированного вещества по наклонной плоскости, расположенной под углом ψ к горизонту, введя декартовы координаты: x — вдоль наклонной плоскости и y — в перпендикулярном направлении; координата $y = 0$ соответствует твердой поверхности. Будем описывать сыпучий материал как сплошную среду законами сохранения массы, импульса и энергии хаотического движения гранул. В стационарном случае все искомые функции зависят только от координаты y, и макроскопическая скорость потока частиц имеет только одну компоненту вдоль наклонной плоскости: $\boldsymbol{u} = \{u(y),\, 0,\, 0\}$. Поэтому уравнение непрерывности удовлетворяется тождественно, а уравнения для двух компонент импульса и среднеквадратичной скорости хаотического движения гранул v, как и в [9], имеют следующий вид:

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \cos\psi, \quad \frac{d}{dy}\Big(\eta\frac{du}{dy}\Big) = -\rho g \sin\psi, \quad \frac{d}{dy}\Big[\text{æ}\,\frac{d}{dy}\Big(\frac{\rho v^2}{2}\Big)\Big] + \eta\Big(\frac{du}{dy}\Big)^2 = I. \qquad (1)$$

Здесь ρ — плотность гранулированного материала; p — давление; η — коэффициент вязкости; æ — коэффициент диффузии энергии хаотического движения; I — скорость уменьшения энергии хаотического движения гранул вследствие их неупругих соударений. Плотность материала ρ можно выразить через плотность вещества гранул ρ_p формулой $\rho = \rho_p a^3/(a+s)^3$, где a — диаметр гранул; s — средняя длина их свободного пробега; тогда $a + s$ — среднее расстояние между центрами частиц. Для записи замыкающих соотношений, как и в [3, 8, 9], применим теорию размерностей для нужных нам величин. Например, размерность давления есть произведение размерностей массы и ускорения, деленное на размерность площади. При каждом соударении импульс гранулы по порядку величины меняется на mv. Разделив это изменение импульса на среднее время между соударениями t_e, выбрав в качестве характерной площади $(a+s)^2$ и записав массу частицы как $m \approx \rho(a+s)^3$, получим $p \approx \rho(a+s)v/t_e$. Аналогичные оценки дают

$$p = a_p\rho(a+s)v/t_e, \quad \eta = a_\eta\rho(a+s)^2/t_e, \quad \text{æ} = a_{\text{æ}}\rho(a+s)^2/t_e, \quad I = a_I\rho(1-e^2)v^2/t_e, \qquad (2)$$

где a_p, a_η, $a_{\text{æ}}$, a_I — безразмерные множители порядка единицы; e — коэффициент восстановления скорости гранул при неупругих столкновениях.

Время между соударениями, как и в [8, 9], представим в виде $t_e = t_f + t_c$, где $t_f = s/v$ — время свободного пробега; $t_c = \alpha a/c$ — время контакта между гранулами; $c = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость упругой волны в гранулах при соударениях; E — модуль упругости; α — безразмерный параметр. Если положить $\alpha = 2$, то время контакта есть время прохождения упругой волной диаметра гранулы в прямом и противоположном направлениях. В случае абсолютно жестких гранул время их контакта при соударениях является бесконечно малым.

Подставив в (2) среднее время между столкновениями и выразив длину свободного пробега через плотность материала, запишем замыкающие соотношения в виде

$$p = \frac{a_p\rho v^2}{f}, \quad \eta = \frac{a_\eta a\rho_p(\rho/\rho_p)^{2/3}v}{f}, \quad \text{æ} = \frac{a_{\text{æ}}a(\rho/\rho_p)^{2/3}v}{f}, \quad I = \frac{a_I(1-e^2)(\rho/\rho_p)^{1/3}\rho v^3}{af}, \qquad (3)$$

где $f = 1 - (\rho/\rho_p)^{1/3}(1 - \alpha v/c)$. Таким образом, давление и диссипативные коэффициенты представлены как функции плотности и скорости хаотического движения гранул.

Из первых двух уравнений системы (1) следует, что $du/dy = (p/\eta)\,\mathrm{tg}\,\psi$. Подставляя это выражение в третье уравнение системы (1) и используя соотношения (3), получим следующие уравнения:

$$a_p\frac{d}{dy}\Big(\frac{\rho v^2}{f}\Big) = -\rho g\cos\psi, \quad \frac{d}{dy}\Big[\Big(\frac{\rho}{\rho_p}\Big)^{2/3}\frac{v}{f}\frac{d}{dy}(\rho v^2)\Big] + \frac{2h}{a_{\text{æ}}a^2}\Big(\frac{\rho}{\rho_p}\Big)^{1/3}\frac{\rho v^3}{f} = 0; \qquad (4)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{a_p}{a_\eta a}\Big(\frac{\rho}{\rho_p}\Big)^{1/3}v\,\mathrm{tg}\,\psi. \qquad (5)$$

Здесь $h = (a_p^2/a_\eta)\operatorname{tg}^2\psi - a_I(1-e^2)$. Система (4) позволяет определить концентрацию и среднюю скорость хаотического движения гранул, а уравнение (5) — скорость макроскопического движения среды.

Для завершения постановки задачи необходимо сформулировать четыре граничных условия на наклонной плоскости и свободной поверхности слоя сыпучего материала, поскольку мы имеем два уравнения первого порядка для плотности и продольной скорости и одно уравнение второго порядка для тепловой скорости. Считая наклонную плоскость сильношероховатой, зададим условие прилипания $u(0) = 0$ и условие $v(0) = v_w$. На свободной поверхности поток тепловой энергии должен обращаться в нуль, что эквивалентно условию $(dv/dy)_{y=H} = 0$. Что касается граничного условия для концентрации гранул, то ситуация здесь менее определенная. При умеренных плотностях сыпучего материала, а именно такой случай нами и рассматривается, слой ограничен сверху сравнительно узкой областью перехода между соударяющимися гранулами и гранулами, движущимися без столкновений друг с другом под действием силы тяжести. В этой области имеется резкое изменение концентрации частиц. Свободнодвижущиеся гранулы возвращаются в область большей концентрации, принося туда импульс и энергию, а частицы, вырываясь из области столкновений, выносят импульс и энергию в область с меньшей концентрацией. В ряде работ (см., например, [1, 10, 11]) плотность на свободной поверхности полагается равной нулю, но такое условие не соответствует среде, где главную и единственную роль играют гранулы, поскольку влияние воздуха не учитывается, и нарушается предположение о сплошности среды, которое обычно используется при построении моделей гранулированных сред. Поэтому на поверхности слоя будем задавать некоторую конечную плотность материала $\rho(H) = \rho_s$.

Запишем уравнения (4), (5) в безразмерном виде, введя масштабы длины a и скорости v_0:

$$\frac{d}{dy}\Big(\frac{\rho v^2}{f}\Big) = -\frac{\mathrm{R}}{a_p}\,\rho\cos\psi, \qquad \frac{d}{dy}\Big[\frac{\rho^{2/3}v}{f}\,\frac{d}{dy}\,(\rho v^2)\Big] + \frac{2h\rho^{4/3}v^3}{a_æ f} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{a_p}{a_\eta}\,\rho^{1/3}v\operatorname{tg}\psi. \tag{7}$$

Здесь $f = 1 - \rho^{1/3}(1-\beta v)$; $\beta = \alpha v_0/c$; $\mathrm{R} = ag/v_0^2$ — число Ричардсона.

Для численного решения представим систему (6) в виде трех уравнений первого порядка, для чего, раскрыв производную в первом уравнении, найдем связь между $d\rho/dy$ и dv/dy, а затем, выполнив дифференцирование плотности тепловой энергии по координате, подставим в уравнение энергии выражение $d\rho/dy$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\rho}{dy} = -\Big(B + \frac{CD}{2\rho - Cv/A}\Big)\Big/A, \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{D}{2\rho - Cv/A}, \qquad \frac{dq}{dy} = -\frac{2h\rho^{4/3}v^3}{a_æ f}, \tag{8}$$

где

$$A = v\Big[1 - \frac{2}{3}\,\rho^{1/3}(1-\beta v)\Big], \quad B = \frac{\mathrm{R}\,f^2\rho\cos\psi}{a_p v}, \quad C = \rho(2f - \beta\rho^{1/3}v), \quad D = \frac{fq}{\rho^{2/3}v} + \frac{Bv}{A}.$$

Из граничных условий одно задано на наклонной плоскости: $v(0) = v_w$, а два других — на свободной поверхности: $\rho(H) = \rho_s$, $dv(H)/dy = 0$. Используя последние два условия, определим значение вспомогательной искомой величины q на свободной поверхности, а именно

$$q_s = -\frac{\mathrm{R}\,\rho_s^{5/3}v_s[1 - \rho_s^{1/3}(1-\beta v_s)]\cos\psi}{a_p[1 - (2/3)\rho_s^{1/3}(1-\beta v_s)]}, \qquad v_s = v(H).$$

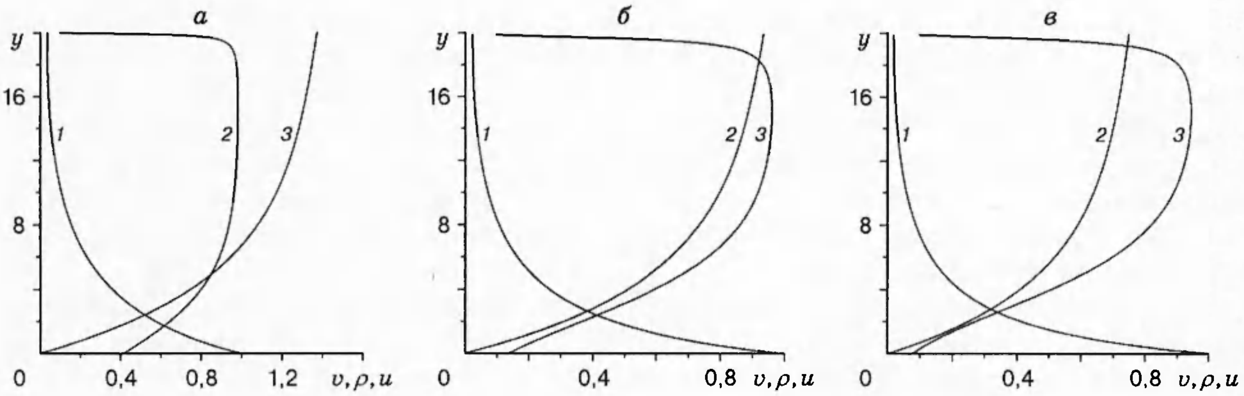

Рис. 1

Для численного решения системы (8) используем метод стрельбы: на свободной поверхности $y = H$ помимо ρ_s задаем некоторое произвольное значение v_s, проводим решение до $y = 0$, сравниваем полученное значение $v(0)$ с заданным v_w, в случае несовпадения выбираем новое значение v_s и т. д. до тех пор, пока не будет выполнено граничное условие для тепловой скорости на наклонной плоскости. Затем по найденным значениям плотности и скорости хаотического движения гранул из уравнения (7) определяем скорость среды вдоль наклонной плоскости. Все уравнения первого порядка решаются методом Рунге — Кутты.

Рассмотрим результаты расчета движения слоя сыпучего материала по наклонной плоскости при $\psi = 20°$, $e = 0{,}9$, $v_w = 1$, $H = 20$, нескольких значениях числа Ричардсона и коэффициента β, характеризующего время контакта между соударяющимися гранулами. На рис. 1, 2 приведены графики распределения по толщине слоя скорости хаотического движения гранул v (кривые *1*), плотности ρ (кривые *2*) и макроскопической скорости частиц u (кривые *3*). Рис. 1,*а–в* соответствует случаю $\beta = 0$ и $\mathrm{R} = 0{,}1$; $0{,}02$; $0{,}01$, а рис. 2,*а*,*б* — случаю $\beta = 0{,}2$; $0{,}5$ при $\mathrm{R} = 0{,}01$. Когда числа Ричардсона достаточно малы, над наклонной плоскостью возникает *кипящий слой*, где гранулы обладают заметной энергией хаотического движения. Уменьшение числа Ричардсона, что при неизменном размере гранул соответствует увеличению «подкачки» наклонной плоскостью тепловой энергии внутрь слоя сыпучего вещества, приводит к росту толщины кипящего слоя (рис. 1). При $\mathrm{R} = 0{,}1$; $0{,}02$; $0{,}01$ отношение толщины кипящего слоя к толщине всего слоя $\Delta \approx 0{,}2H$; $0{,}3H$; $0{,}4H$. При этом плотность гранул на наклонной плоскости убывает:

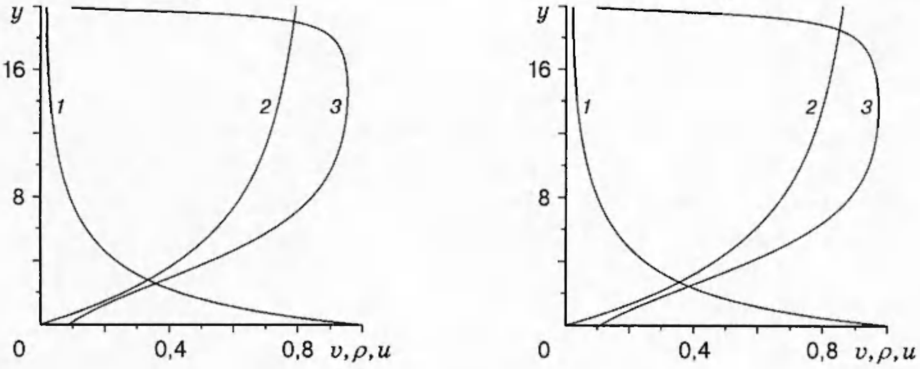

Рис. 2

$\rho(0) = 0{,}42$; 0,13; 0,07 при $\mathrm{R} = 0{,}1$; 0,02; 0,01, что соответствует средним длинам свободного пробега $s = 0{,}33$; 0,96; 1,38. Плотность вещества в слое возрастает от $\rho(0)$ до некоторых максимальных значений $\rho_{\max}$ внутри слоя, а затем уменьшается до значения ρ_s. Величина $\rho_{\max}$ зависит от числа Ричардсона, уменьшаясь с уменьшением R. Во всех рассчитанных вариантах распределение скорости хаотического движения гранул качественно одно и то же: монотонное изменение от v_w при $y = 0$ до некоторого значения $v_s \approx 0{,}02$. Макроскопическая скорость потока гранул убывает с уменьшением числа Ричардсона: $u_{\max} \approx 1{,}37$; 0,93; 0,75 при $\mathrm{R} = 0{,}1$; 0,02; 0,01.

Для оценки влияния времени контакта между сталкивающимися гранулами на v, ρ, u проведены расчеты при $\mathrm{R} = 0{,}01$ и $\beta = 0{,}2$; 0,5 (рис. 2). Увеличение времени контакта приводит к следующим изменениям профиля плотности частиц в слое: плотность $\rho(0)$ возрастает с увеличением β, толщина кипящего слоя уменьшается, а макроскопическая скорость увеличивается.

Таким образом, продемонстрировано образование кипящего слоя при движении сыпучего материала по шероховатой наклонной плоскости, толщина которого увеличивается с ростом интенсивности подкачки энергии хаотического движения гранул. Учет конечного времени контакта гранул при прочих одинаковых условиях приводит к уменьшению толщины кипящего слоя и увеличению концентрации частиц в непосредственной близости к наклонной плоскости.

Автор выражает благодарность Ю. А. Березину за предложенную тему и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hutter K., Rajagopal K. R.** On flows of granular materials // Contin. Mech. Thermodyn. 1994. V. 6. P. 81–139.
2. **Savage S. B.** Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1970. V. 92. P. 53–96.
3. **Haff P. K.** Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon // J. Fluid Mech. 1983. V. 134. P. 401–430.
4. **Lun C. K., Savage S. B., Jeffrey D. J., Chepurni N.** Kinetic theories for granular flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 223–256.
5. **Johnson P. C., Jackson R.** Frictional-collisional constitutive relations for granular materials // J. Fluid Mech. 1987. V. 176. P. 67–93.
6. **Johnson P. C., Nott P., Jackson R.** Frictional-collisional equations of motions for particulate flows and their applications to chutes // J. Fluid Mech. 1990. V. 210. P. 501–535.
7. **Abu-Zaid S., Ahmadi G.** Analysis of rapid shear flows of granular materials by a kinetic model // Powder Technol. 1993. V. 77. P. 7–17.
8. **Hwang H., Hutter K. A.** A new kinetic model for rapid granular flow // Contin. Mech. Thermodyn. 1995. V. 7. P. 357–384.
9. **Березин Ю. А., Сподарева Л. А.** Об устойчивости течения Куэтта в гранулированных средах // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 41–48.
10. **Anderson K. G., Jackson R.** A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials // J. Fluid Mech. 1992. V. 241. P. 145–168.
11. **Cao J., Ahmadi G., Massoudi M.** Gravity granular flows of slightly frictional particles down an inclined bumpy chute // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 197–221.

Поступила в редакцию 30/X 1997 г.,
в окончательном варианте — 27/V 1998 г.