

3. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. — Л.: Судостроение, 1967.
 4. Кедринский В. К. Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор) // ПМТФ. — 1978. — № 4.

Поступила 9/VI 1986 г.

УДК 532.529 : 533.6.071.1

РАСЧЕТ РАЗЛЕТА СЖАТОГО ОБЪЕМА ГАЗОВЗВЕСИ

Ю. В. Казаков, А. В. Федоров, В. М. Фомин
 (Новосибирск)

В настоящее время большое внимание уделяется физическому и математическому моделированию многофазных систем, что вызвано широким распространением различного рода технологических схем с использованием гетерогенных и гомогенных сред. Обзоры по математическому моделированию некоторых задач механики гетерогенных сред приводятся в [1—3].

В экспериментах по изучению волновой динамики газовзвесей твердых частиц, как правило, делался акцент на взаимодействие ударных волн (УВ) с облаками запыленного газа. В [4] проведено экспериментальное исследование разрежения газовзвеси с целью изучения влияния запыленности среды с большим массовым содержанием частиц, находящейся под высоким давлением, на параметры УВ, формирующихся при истечении такой среды в свободное пространство. Вопрос о режимах истечения актуален с точки зрения безопасности различного рода оборудования (трубопроводный транспорт для перемещения сыпучих материалов, химические реакторы с псевдооживлением и др.). Процесс разрежения газовзвесей рассматривался в [5], где в пренебрежении объемной долей частиц анализируется разлет газовзвеси в вакуум, в [6] проведен расчет взрывного разлета облака газовзвеси в случае относительно малых объемных содержаний дисперсной фазы, в [7] исследован процесс внезапного выброса угля и газа в равновесном приближении. Более полная библиография экспериментальных и теоретических работ по динамике газовзвесей дана в [1—3, 8].

Рассмотрим решение задачи об определении течения в ударной трубе, в камере высокого давления (КВД) которой находится газовзвесь мелких частиц, а в камере низкого давления (КНД) — воздух (задача ГЧ). Смесь от газа отделена диафрагмой, которая в начальный момент разрывается. При этом в область низкого давления распространяется УВ, за которой движется контактный разрыв, за ним идет комбинированный разрыв (КБР), по газовзвеси распространяется волна разрежения (ВР). После отражения ВР от стенки КВД, когда начинается взаимодействие ВР и УВ, происходит ослабление УВ. Исследуем также задачу Г — вариант задачи ГЧ, когда в КВД чистый газ.

В [4] установлено, что по сравнению со случаем чистого газа в КВД амплитуда возникающих УВ уменьшается и увеличивается время формирования треугольного импульса давления; там же отмечено, что описать процесс в рамках равновесного подхода не удастся. Действительно, простейший анализ характерных времен [9] для исследуемого в [4] процесса показывает, что при $d \geq 10$ мкм характерное время протекания газодинамического процесса меньше времен скоростной и температурной релаксации, что обуславливает неравновесность процесса. Поэтому в настоящей работе проведен анализ процесса разрежения газовзвеси в рамках неравновесной теории для больших объемных содержаний дисперсной фазы.

Уравнения, описывающие это течение в неравновесном приближении, имеют вид

$$\begin{aligned} \partial \rho_i / \partial t + \partial \rho_i u_i / \partial x &= 0, \\ \partial \rho_i u_i / \partial t + \partial \rho_i u_i^2 / \partial x + m_i \partial p / \partial x &= (-1)^{i+1} f, \\ \partial (\rho_1 E_1 + \rho_2 E_2) / \partial t + \partial (\rho_1 u_1 E_1 + \rho_2 u_2 E_2 + p(m_1 u_1 + \\ &+ m_2 u_2)) / \partial x = 0, \quad \partial \rho_2 e_2 / \partial t + \partial \rho_2 u_2 e_2 / \partial x = q, \\ p &= \rho_{11} R T_1, \quad m_1 + m_2 = 1, \quad \rho_i = \rho_i m_i, \quad \rho_{22} = \text{const}, \\ e_i &= c_i T_i, \quad E_i = e_i + u_i^2 / 2, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь ρ_i , u_i , e_i , T_i , m_i — средняя плотность, скорость, внутренняя энер-

гия, температура и объемное содержание i -й фазы (индекс $i = 1$ относится к параметрам газа, $i = 2$ — к параметрам частиц); p — давление; E_i — полная энергия i -й фазы; члены f, q , описывающие силовое и тепловое взаимодействие фаз, аналогичны использованным в [10]:

$$f = 0,125n\pi d^2 C_D \rho_{11} |u_1 - u_2| (u_1 - u_2), \quad n = 6m_2/\pi d^3,$$

$$C_D = \begin{cases} C_1 = 24/\text{Re} + 4,4/\text{Re}^{0,5} + 0,42, & m_2 \leq 0,08, \\ C_2 = (4/3 m_1)(1,75 + 150(m_1 \text{Re})^{-1}), & m_2 > 0,45, \\ ((m_2 - 0,08)C_2 + (0,45 - m_2)C_1)/0,35, & 0,08 < m_2 \leq 0,45, \end{cases}$$

$$q = n\pi d \lambda \text{Nu} (T_1 - T_2),$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} 2 + 0,106 \text{RePr}^{0,33}, & \text{Re} \leq 200, \\ 2,274 + 0,6 \text{Re}^{0,67} \text{Pr}^{0,33}, & \text{Re} > 200, \end{cases}$$

$$\text{Re} = \rho_{11} |u_1 - u_2| d / \mu, \quad \text{Pr} = c_2 \lambda / \mu.$$

Приведенная система уравнения решалась при следующих начально-краевых условиях и значениях параметров: $0 < x < l_0 = 0,07$ м; $m_1 = 0,8375$, $m_2 = 0,1625$, $u_1 = u_2 = 0$, $\eta = \rho_2/\rho_1 = 50$, $T_1 = T_2 = 300$ К, $\rho_{11} = 5,651$ кг/м³, $\rho_{22} = 1460$ кг/м³, $\gamma = 1,66$, $c_2 = 710$ м²/(с²·град), $c_1 = 3128$ м²/(с²·град), $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $\lambda = 0,143$ кг·м/(с³·град); $x \leq 0$: $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $u_1 = 0$, $T_1 = 300$ К, $\gamma = 1,4$, $c_1 = 716$ м²/(с²·град), $\rho_{11} = 0,11639 - 11,639$ кг/м³; $x = l_0$: $u_1(t) = 0$.

Для расчета использовался модифицированный метод крупных частиц с отслеживанием контактного и комбинированного разрывов [6]. Ранее этот алгоритм тестировался только на точных решениях уравнений газовой динамики [11]. Представляется целесообразным провести тестовые расчеты для точных решений уравнений механики гетерогенных сред [8]. Этот вопрос тем более принципиален, так как известно, что система уравнений негиперболична в случае скоростной неравновесности при $(u_1 - u_2)^2 < a^2(1 + (\rho_{11}m_2/\rho_{22}m_1)^{1/3})^3$ [8, 12, 13]. Проблема устойчивости разностных схем для двухскоростных моделей обсуждалась в [13, 14], где отмечалось, что при $h \gg d$ (h — шаг разностной сетки, d — диаметр включения дисперсной фазы) характерное время нарастания возмущений (с длиной волны $\sim h$), которые могут генерироваться в счете, значительно превосходит характерное время релаксации. И, следовательно, на данной разностной сетке возмущения не будут нарастать при определенном соотношении на τ и h , следующем из условия Куранта. Требование $h \gg d$ при этом естественно, так как мы используем для описания частиц газозвеси континуальный подход, в рамках которого эффекты с характерным размером d не могут быть описаны. В качестве тестового расчета решалась задача о распространении по газозвеси стационарной изотермической УВ [8]. Показано, что разностное решение близко к аналитическому, разрыв размазывается на 4—5 ячеек, зона релаксации передается удовлетворительно. Тестовый расчет позволил проанализировать некоторые особенности численного изучения задач механики гетерогенных сред.

Перейдем к обсуждению результатов расчетов сформулированной задачи. На рис. 1 приведены распределения давления во времени: А — в точке $x = -0,2$ м, Б — в точке $x = -0,44$ м, 1 — задача Г, 2 — задача ГЧ, $\eta = 50$, $d = 100$ мкм, 3 — $\eta = 50$, $d = 20$ мкм при $p_1/p_0 = 35$. Видно, что в случае Г уже сформировался характерный треугольный профиль в отличие от ГЧ, где течение представляется почти ступенчатым импульсом с УВ меньшей амплитуды. На рис. 2 представлены распределения давления в трубе на момент времени $t = 330$ мкс, 1 — задача Г, 2 и 3 — задача ГЧ при $\eta = 50$, $d = 100$ и 20 мкм соответственно. Видно, что для задачи Г давление газа в КВД падает быстрее, чем для ГЧ, что обусловлено межфазным трением и теплообменом. Характерное время падения давления в КВД растет с уменьшением диаметра частиц при фиксированном массовом отношении η . Уменьшение диаметра частиц приводит к увеличению сопротивления, которое оказывают частицы на газ, и к интен-

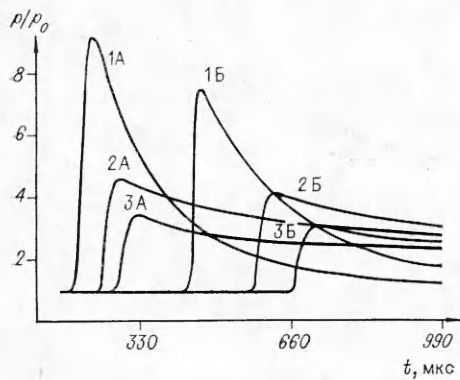


Рис. 1

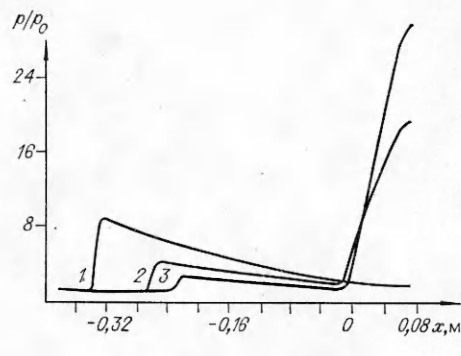


Рис. 2

сификации вовлечения частиц в движение, что является следствием того, что в выражении для силы сопротивления содержатся члены, пропорциональные d^{-1} , d^{-2} . Интенсифицируется и теплообмен при уменьшении диаметра частиц. Газ, с одной стороны, остывает по мере прохождения ВР, с другой — нагревается за счет присутствия теплых частиц.

По результатам расчетов построена зависимость средней скорости УВ на участке между $x = -0,2$ м и $x = -0,68$ м от начального отношения давлений на диафрагме при фиксированном давлении в КВД. Отметим, что скорость здесь непостоянна, так как отраженная от стенки ВР догоняет УВ и за счет их взаимодействия УВ замедляется. В [4] этот факт не оговаривался, хотя очевидно, что он может быть существенным в определенных ситуациях. На рис. 3 показаны расчетные зависимости числа Маха УВ от $\lg(p_1/p_0)$: 2 — $\eta = 50$, $d = 100$ мкм, 4 — $\eta = 50$, $d = 20$ мкм; 3 — эксперимент, 1 — течение Г, 5 — расчетная кривая, полученная в рамках равновесного подхода. Как видно, зависимость скорости распространения УВ от $\lg(p_1/p_0)$ для неравновесного течения лежит в границах, которые представляют собой замороженное и равновесное течение [4]. В [4] не приведены данные о размере частиц, которые использовались в эксперименте. Однако, как видно из рис. 3, наиболее удовлетворительное соответствие расчетной и экспериментальной кривой получается при $d = 20$ мкм, что позволяет предполагать, что в эксперименте использовались частицы с эффективным диаметром $d = 20$ мкм. Этот вывод справедлив с точностью до нашего представления о параметрах силового и теплового взаимодействия фаз. На рис. 4 представлены распределения давления газа при $\eta = 50$, $d = 100$ мкм, $p_1/p_0 = 35$ в точках А ($x = -0,2$ м), Б ($x = -0,44$), В ($x = -0,68$ м), 1 — значения C_D и Nu из [10], 2 — $C_D = 24/Re$, $Nu = 2$. Второй вариант описания взаимодействия фаз приводит к тому, что силовое и тепловое взаимодейст-

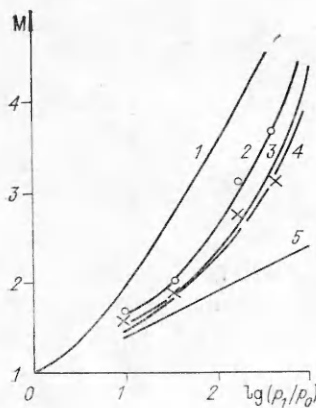


Рис. 3

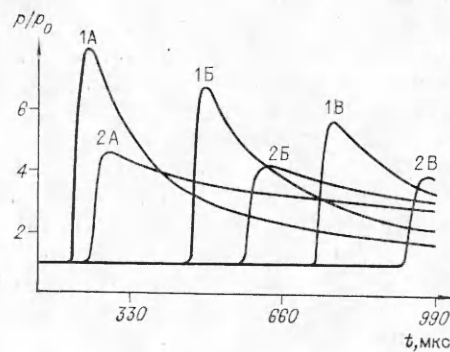
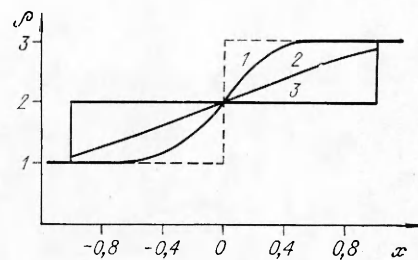
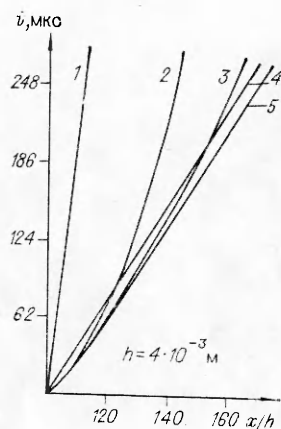


Рис. 4



Р и с. 6

Р и с. 5

вие фаз значительно уменьшается и течение приближается к замороженному.

Остановимся коротко на структуре ВР в газовой среде, примыкающей к области покоя. Возмущения, передающиеся по газовой фазе, приводят газ в движение. Под действием газа частицы начинают разгоняться и после истечения некоторого времени приходят в равновесие с газовой фазой по скоростям и температурам. Аналогично зоне релаксации в замороженной УВ волне разрежения, распространяющейся по смеси, также сопутствует зона релаксации. В описываемом случае зона релаксации примыкает к переднему фронту ВР $x = x_{\text{п}}(t)$, который характеризуется тем, что в его малой окрестности слева параметры течения переменные, справа — постоянные (речь идет о течении до взаимодействия ВР со стенкой).

На рис. 5 приведены расчетные $x - t$ -диаграммы распространения головы ВР в КВД при $p_1/p_0 = 350$: 5 — чистый газ в КВД, 2 — газозвесь с $\eta = 50$, $d = 20$ мкм, 3 — газозвесь с $\eta = 50$, $d = 40$ мкм. При этом фронт волны разрежения в счете фиксировался по положению точки, в которой давление газа отличается от невозмущенного давления в КВД на 2%. Такой критерий позволяет некоторым образом учесть наличие влияния схемной вязкости, которая обуславливает размывание фронта. На рис. 5 дана также кривая 1, соответствующая траектории головы ВР, полученной из равновесной теории, $x = a_e t$, $a_e = 136$ м/с, и 4, представляющая траекторию головы ВР в чистом газе $x = at$, $a = 1014$ м/с. В начальный момент времени диафрагма находилась в ячейке $i = 100$. Из сравнения аналитической кривой 4 и расчетной 5 следует, что счетные эффекты приводят к завышению скорости головы ВР в начальные моменты времени. Анализ расчетов позволяет установить, что в газозвеси можно определить «видимую» скорость переднего фронта ВР, которая может быть зафиксирована в эксперименте, а также реальную скорость переднего фронта, который значительно ослабляется процессами межфазного трения. Здесь прослеживается аналогия с общей теорией распространения возмущений в релаксирующих средах [15], где передний фронт движется со скоростью a_f и сформирован быстро затухающими гармониками, а часть сигнала, представленная медленно затухающими гармониками, движется со скоростью a_e , $a_f > a_e$. Для газозвеси «видимая» скорость распространения головы ВР меняется во времени от a_f к a_e [16]. Как видно из рис. 5, с уменьшением диаметра частиц переход к равновесной скорости звука происходит быстрее.

Затухание переднего фронта возмущений для ВР можно проиллюстрировать на примере задачи о распаде разрыва для системы уравнений, описывающих течение газа в трубе с жесткозакрепленными частицами в акустическом приближении:

$$(1) \quad \rho_t + \rho_0 u_x = 0, \quad u_t + \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho_x = -\alpha u, \quad \alpha > 0$$

с начальными данными $x > 0$, $\rho = \rho^+$, $u = 0$; $x \leq 0$, $\rho = \rho^-$, $u = 0$, $\rho^+ > \rho^-$. Предполагается, что частицы оказывают силовое воздействие на газ, пропорциональное скорости газа, при $C_D = 24/Re$ получим $\alpha \sim d^{-2}$. Система (1) сводится к известному телеграфному уравнению (без ограничения общности можно считать $\rho_0 = 1$, $c_0 = 1$), которое с помощью замены $w = \exp(-\alpha t/2)$, $z = \alpha(x+t)/2$, $y = \alpha(x-t)/2$ сводится к

$$(2) \quad w_{zy} + w/4 = 0.$$

Воспользовавшись решением уравнения (2), найденным в [17] методом Римана, можем представить решение системы (1) в виде

$$(3) \quad \rho(x, t) = \left[\frac{\alpha}{4} \int_{x-t}^{x+t} \rho_0(\lambda) \left(\frac{\alpha^2 t J_1(\frac{\alpha}{2} \sqrt{(x-\lambda)^2 - t^2}}{2\xi}) + J_0(-\xi) \right) d\lambda + (\rho_0(x-t) + \rho_0(x+t))/2 \right] \exp(-\alpha t/2),$$

где $\xi = \alpha^2((x-\lambda)^2 - t^2)^{0,5}/4$; J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Из (3) следует, что амплитуда разрыва, распространяющегося вправо (являющегося в данном случае аналогом ВР), меняется по закону $[\rho] = 0,5(\rho^+ - \rho^-) \exp(-\alpha t/2)$.

Результаты расчета по формуле (3) при $\rho^+ = 3$, $\rho^- = 1$ на момент времени $t = 1$ представлены на рис. 6 для $\alpha = 25; 4; 0,04$ (линии 1—3). Видно, что возрастание коэффициента α , соответствующее уменьшению диаметра частиц, приводит к затуханию переднего фронта.

Таким образом, численно проанализирована волновая картина течения, возникающего при разлете облака частиц, с немалой концентрацией дискретной фазы. Даны количественные оценки ослабления УВ, возникающих в чистом газе при варьировании начальных параметров смеси, определение ВР в смеси и найдена ее структура. Показано, что в отличие от газовой динамики (равновесной) передний фронт ВР распространяется с переменной скоростью, которая меняется от a_f до a_e в процессе течения. Сравнение с имеющимися экспериментальными результатами [4] позволило сделать вывод об адекватности математической модели изучаемому явлению для немалых концентраций.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Б. Е. Гельфанда, обратившего их внимание на данную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Нигматулин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика.— М.: ВИНТИ АН СССР, 1972.— Т. 6.
2. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесах // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа.— М.: ВИНТИ АН СССР, 1981.— Т. 16.
3. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. И., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука, 1980.
4. Гельфанд Б. Е., Губанов А. В. и др. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твердых частиц // ДАН СССР.— 1985.— Т. 281, № 5.
5. Rudinger G., Chang A. Analysis of nonsteady two-phase flow // Phys. Fluids.— 1964.— V. 7, N 11.
6. Ивандаев А. И., Кутушев А. Г., Нигматулин Р. И. Численное исследование разлета облака мелкодиспергированных частиц или капель под действием взрыва // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 1.
7. Федоров А. В. Анализ уравнений, описывающих процесс внезапного выброса угля и газа // ЧММСС.— 1980.— Т. 11, № 4.
8. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Структуры изотермических ударных волн и расчет разлета облака частиц.— Новосибирск, 1986.— (Препринт/ИТПМ СО АН СССР; № 8).
9. Ивандаев А. И. Течение в ударной трубе при наличии взвешенных частиц // ФГВ.— 1984.— № 3.

10. Ахатов И. Ш., Вайнштейн П. Б. Нестационарные режимы горения пористых порохов // ФГВ.— 1983.— № 3.
11. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент.— М.: Наука, 1982.
12. Казаков Ю. В., Киселев С. П., Федоров А. В., Фомин В. М. Распространение разрывов в смесях // Всесоюз. семинар «Современные проблемы и математические методы теории фильтрации». Тез. докл.— М., 1984.
13. Stewart H. B., Wendroff V. Two-phase flows: models and methods // J. Comput. Phys.— 1984.— V. 56, N 3.
14. Ершов А. П. Об уравнениях механики двухфазных сред // ПМТФ.— 1983.— № 6.
15. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов.— М.: Мир, 1967.
16. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Анализ распространения слабых возмущений в газовзвесах // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности/Под ред. В. М. Фомина.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
17. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.

Поступила 7/IV 1986 г.

УДК 539.3

КАНОНИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. В. Кузнецов

(Новосибирск)

В [1] дается определение канонического вида симметричного тензора, согласно которому он принимает простейшую (диагональную) форму в главных осях. В настоящей работе определяется симметричный тензор, приводящий квадратичную форму потенциальной энергии в единице объема изотропного упругого тела к каноническому виду. Показывается, что такое приведение можно осуществить надлежащим выбором двух констант в форме, аналогичной обобщенному закону Гука.

Напряженно-деформированное состояние в элементарном объеме упругого тела характеризуется тензором напряжений σ_{ij} и тензором деформаций ε_{ij} ($i, j = 1, \dots, 3$), компоненты которых связаны соотношениями упругости

$$(1) \quad \sigma_{ij} = b_{ijkm} \varepsilon_{km}.$$

Здесь и в дальнейшем b_{ijkm} — тензор упругих постоянных и по повторяющимся дважды индексам производится суммирование. В изотропном упругом теле

$$(2) \quad b_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

λ, μ — постоянные Ламэ; δ_{ij} — символ Кронекера.

Определим канонический тензор s_{ij} как тензор, компоненты которого связаны с компонентами тензора деформаций теми же соотношениями, что и компоненты тензора напряжений с компонентами канонического тензора, т. е.

$$(3) \quad s_{ij} = c_{ijkm} \varepsilon_{km};$$

$$(4) \quad \sigma_{ij} = c_{ijkm} s_{km}.$$

Причем положим, что для коэффициентов c_{ijkm} выполняются свойства симметрии относительно перестановки индексов i и j , k и m , а также пар ij и km . Из сравнения соотношений (3), (4) и (1) можно прийти к заключению, что если канонический тензор существует, то он обладает некоторыми интересными свойствами двойственности. С одной стороны, согласно (3), s_{ij} могут рассматриваться как некоторые «напряжения», а с другой, согласно (4), — как некоторые «деформации». Для того чтобы σ_{ij} оставался действительным тензором напряжений, постоянные c_{ijkm} должны быть связаны условием

$$(5) \quad c_{ijkm} c_{kmrs} = b_{ijrs}.$$

Следовательно, нахождение канонического тензора связано с определением постоянных c_{ijkm} . Предположим, что коэффициенты c_{ijkm} могут быть