

УДК 532.539

**О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА,
ВОЗНИКАЮЩЕГО В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ОБЛАКОМ ЧАСТИЦ**

С. П. Киселев, В. П. Киселев

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
630090 Новосибирск*

В работе исследовано взаимодействие ударной волны (УВ) с разреженным облаком частиц конечных размеров. Показано, что при дозвуковом течении газа за фронтом УВ происходит ускорение газа в облаке частиц, а при сверхзвуковом — его замедление. Результаты расчетов сравниваются с экспериментом по торможению сверхзвукового потока в облаке частиц.

1. Рассмотрим облако сферических частиц, на которое слева набегают УВ (рис. 1, где x^+ , x_0 , $x_0 + h$ — соответственно положение УВ, левой и правой границы облака, h — толщина облака, Ω_1 , Ω_2 — области, занятые газом и газом с частицами). Требуется рассчитать течение газа и частиц, возникающее в результате взаимодействия УВ с облаком частиц. В настоящей работе движение газа и частиц описывается моделью взаимопроникающих континуумов [1, 2]. Объемная концентрация частиц в облаке предполагается малой ($m_2 \sim 10^{-3}$), поэтому частицы описываются бесстолкновительным кинетическим уравнением, а газ — уравнениями запыленного газа. Данная модель подробно изучалась в [1, 2], и система уравнений в одномерном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial a f}{\partial v_2} + \frac{\partial q f}{\partial T_2} &= 0, \\ f &= f(t, x, v_2, r, T_2), \quad n = \int f \, dv_2 \, dr \, dT_2, \\ m_2 &= \frac{4}{3} \pi \int r^3 f \, dv_2 \, dr \, dT_2, \quad m_1 + m_2 = 1, \\ a &= \frac{v_1 - v_2}{\tau_0} - \frac{1}{\rho_{22}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{1}{\tau_0} = \frac{3}{4} \frac{\text{Re} \, \mu}{\rho_{22} d^2} C_d(\text{Re}, M_{12}), \\ C_d(\text{Re}, M_{12}) &= \left(1 + \exp\left(-\frac{0,43}{M_{12}^{4,67}}\right)\right) \left(0,38 + \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4}{\sqrt{\text{Re}}}\right), \\ \text{Re} &= \frac{\rho_{11} |v_1 - v_2| d}{\mu}, \quad M_{12} = \frac{|v_1 - v_2|}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_{11}}}, \\ q &= 2\pi \lambda r \text{Nu} \frac{T_1 - T_2}{c_s m_p}, \quad m_p = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{22}, \quad \text{Nu} = 2 + 0,6 \text{Re}^{0,5} \text{Pr}^{0,33}, \\ \text{Pr} &= \frac{c_p \mu}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \\ \varphi &= \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_1 (\mathcal{E}_1 + v_1^2/2) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_1 v_1^2 + p m_1 \\ \rho_1 v_1 A_1 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_1 = \varepsilon_1 + \frac{pm_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2}, \quad \varepsilon_1 = c_V T_1, \quad p = (\gamma - 1)\rho_{11}\varepsilon_1,$$

$$A_2 = v_1\Phi_1 + p\left(\frac{\partial m_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial m_1}{\partial x}\right) - \Phi_2,$$

$$\Phi_1 = -p \frac{\partial m_1}{\partial x} + \int m_r \frac{v_1 - v_2}{\tau_0} f dv_2 dr dT_2,$$

$$\Phi_2 = \int m_p \left(\frac{(v_1 - v_2)^2}{\tau_0} - c_s q\right) f dv_2 dr dT_2,$$

где $v_1, \rho_{11}, \rho_1, T_1, p, \gamma, \varepsilon_1, m_1$ — скорость, истинная плотность, средняя плотность, температура, давление, показатель адиабаты, удельная внутренняя энергия, объемная концентрация газа; $v_2, \rho_{22}, r, T_2, m_2, f, n$ — скорость, истинная плотность, радиус, температура, объемная концентрация, функция распределения, счетная концентрация частиц (индекс 1 относится к газу, 2 — к частицам); μ, λ, a — вязкость, теплопроводность, скорость звука в газе; Re, Nu, M_{12} — числа Рейнольдса, Пуссельта, Маха. Система уравнений (1.1) решалась численно на ЭВМ. Методика расчета описана в [3]; отметим только, что уравнения для газа решались на эйлеровой сетке по явной схеме 3-го порядка точности, а кинетическое уравнение решалось в переменных Лагранжа с 1-м порядком точности.

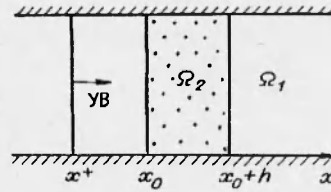


Рис. 1

В качестве граничных условий на входе и выходе из канала для газа ставилось условие симметрии $v_1, \rho_{11}, \varepsilon_1$, а для частиц — условия поглощения. В начальный момент облако состояло из сферических частиц оргстекла и содержало три фракции: $m_2^{(1)} = 5 \cdot 10^{-4}$, $d_1 = 170$ мкм; $m_2^{(2)} = 10^{-3}$, $d_2 = 400$ мкм; $m_2^{(3)} = 5 \cdot 10^{-4}$, $d_3 = 500$ мкм, где $m_2^{(i)}, d_i$ — объемная концентрация и диаметр частиц i -й фракции. Полная объемная концентрация частиц $m_2 = \sum_1^3 m_2^{(i)} = 2 \cdot 10^{-3}$ определяет долю единичного объема, занятую частицами. Частицы всех трех фракций были равномерно распределены по всему объему облака. При $t = 0$ поперечный размер облака $h = 1$ см, температура частиц $T_2^0 = 300$ К, плотность частиц оргстекла $\rho_{22} = 1,2$ г/см³. Параметры газа при $t = 0, x > x^+$ следующие: $p_0 = 0,1$ атм, $T_0 = 300$ К.

2. Рассмотрим два случая, соответствующих слабой УВ с числом Маха УВ $M_0 = 1,75$ и показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ и сильной УВ с $M_0 = 4,5, \gamma = 1,347$. При $M_0 = 1,75$ течение газа за фронтом УВ дозвуковое с числом Маха потока $M_1 = 0,81$. В результате взаимодействия с облаком частиц происходят торможение газа и ускорение частиц.

На рис. 2–4 показаны зависимости скорости газа v_1 , числа Маха $M_1 = v_1/a$ и давления p от координаты x на моменты времени $t_1 = 80$ мкс, $t_2 = 160$ мкс (кривые 1 и 2) при $M_0 = 1,75$ (вертикальные линии — левая и правая границы облака). Из рисунков видно, что перед облаком происходит торможение дозвукового потока в волне сжатия, а в облаке — его ускорение в волне разрежения. Результирующее торможение определяется необратимыми потерями газа в облаке на трение и теплообмен.

За время $t < 160$ мкс частицы не успевают набрать скорость $v_2 \ll v_1$, и облако практически не деформируется. В случае $M_0 = 4,5$ течение газа за фронтом УВ сверхзвуковое ($M_1 = 1,86$), а возникающая картина течения качественно отличается от дозвукового.

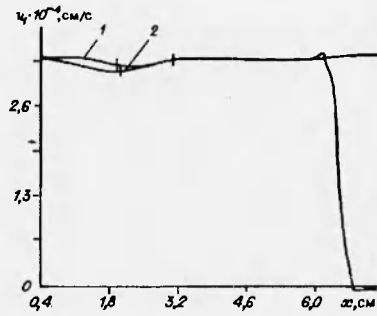


Рис. 2

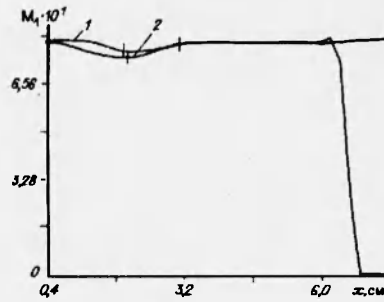


Рис. 3

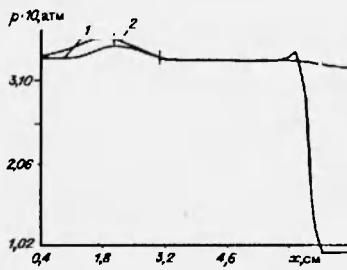


Рис. 4

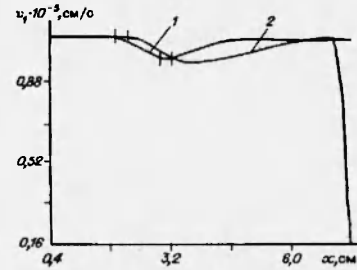


Рис. 5

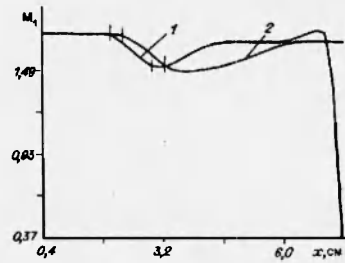


Рис. 6

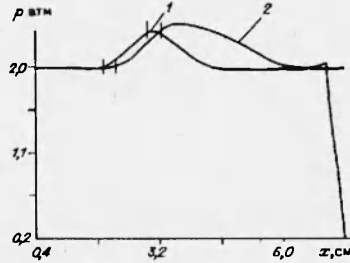


Рис. 7

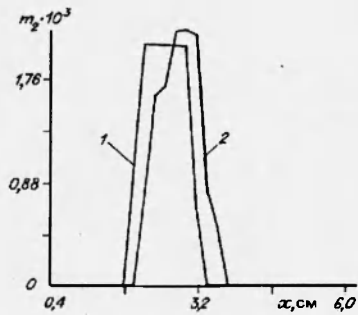


Рис. 8

На рис. 5–7 представлены зависимости v_1 , M_1 , p от x на моменты времени $t_1 = 40$ мкс и $t_2 = 80$ мкс (кривые 1 и 2). Вертикальными линиями обозначены левая и правая границы облака при $t_1 = 40$ мкс, $t_2 = 80$ мкс, соответствующие координатам x_1 полувисоты облака. Зависимость объемной концентрации m_2 от x на те же моменты времени показана на рис. 8, откуда следует, что облако слабо деформируется при $t < 40$ мкс, $M_0 = 4,5$. Из рис. 5–7 видно, что левее облака течение невозмущенное, а торможение газа происходит в волне сжатия, формирующейся внутри облака. За облаком возникает волна разрежения, в которой пересжатый газ ускоряется до конечного состояния, определяемого необратимыми потерями в облаке. Таким образом, при дозвуковом течении газ в облаке ускоряется ($\frac{\partial v_1}{\partial x} > 0$), а при сверхзвуковом тормозится ($\frac{\partial v_1}{\partial x} < 0$).

3. Для объяснения данного эффекта изучим упрощенную модель, в которой будем пренебрегать движением частиц. В этом случае уравнения течения газа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= \bar{u}, \quad \rho_1 = \rho_{11} m_1, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{m_2 \rho_1 (v_1 - v_2)}{\tau}, \\ T_1 \left(\frac{\partial S}{\partial t} + v_1 \frac{\partial S}{\partial x} \right) &= \frac{m_2 (v_1 - v_2)^2}{\tau} - \frac{m_2 (T_1 - T_2)}{\omega'}, \\ S &= c_V \ln \frac{p}{\rho'} + S_0, \quad \tau = \frac{\tau_0 \rho_{11}}{\rho_{22}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где S — энтропия; S_0 — константа. Рассматривая влияние облака как малое возмущение, разложим искомые функции в ряд по степеням m_2^0 :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad \varphi = \{v_1, p, \rho_{11}, T_1, S\}. \quad (3.2)$$

Здесь φ_0 — параметры газа за УВ; $\varphi \sim m_2^0$ — соответствующие возмущения. Подставляя (3.2) в систему (3.1) и удерживая первые степени φ' , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 v_0 \frac{d}{dx} (\ln m_1^0) &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{p_0}{c_V \rho_0} \frac{\partial S'}{\partial x} &= - \frac{m_2^0 v_0}{\tau}, \\ \frac{\partial S'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial S'}{\partial x} &= \frac{m_2^0 v_0^2}{\tau T_0} - \frac{m_2^0 (1 - T_2^0/T_1^0)}{\omega'}. \end{aligned}$$

Вне области, занятой частицами, необходимо положить $m_2^0 = 0$. Вводя безразмерные переменные $\eta = \rho'/\rho_0$, $v = v'/v_0$, $s = S'/c_V$ и пренебрегая в уравнении неразрывности членом $\rho_0 v_0 \frac{d}{dx} (\ln m_1^0)$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_0} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a_0^2}{v_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= - \frac{a_0^2}{\gamma v_0} \frac{\partial s}{\partial x} - \int_{-\infty}^x \frac{m_2^0}{\tau} (\delta(y) - \delta(y-h)) dy, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v_0 \frac{\partial s}{\partial x} &= m_2^0 \left(\frac{\gamma(\gamma-1)M^2}{\tau} - \frac{1 - T_2^0/T_1^0}{\omega} \right) \int_{-\infty}^x (\delta(y) - \delta(y-h)) dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$M = \frac{v_0}{a_0}, \quad \tau = \frac{4}{3} \frac{d}{C_d v_0}, \quad \omega = \frac{d^2 \rho_{11}^0 c_V}{6 \lambda Nu}.$$

Система уравнений (3.3) справедлива во всей области течения $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. Облако частиц занимает область $0 \leq x \leq h$. Вне облака интеграл от разности дельта-функций равен нулю, а внутри облака — единице. Умножая первое уравнение на a_0 и комбинируя со вторым, приведем систему (3.3) к характеристическому виду

$$\frac{d^\pm J^\pm}{dt} = \varphi, \quad \frac{ds}{dt} = \psi, \quad J^\pm = v \pm \frac{a_0}{v_0} \eta, \quad (3.4)$$

где $\frac{d^\pm}{dt}$ и $\frac{d}{dt}$ — производные вдоль характеристик C_\pm и C_0 :

$$C_\pm: x = (v_0 \pm a_0)t + \xi_\pm, \quad C_0: x = v_0 t + \xi_0. \quad (3.5)$$

Величины φ, ψ были определены в (3.3):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2, & \psi &= \psi_1 + \psi_2, \\ \varphi_1 &= -\frac{a_0^2}{\gamma v_0} \frac{\partial s}{\partial x}, & \varphi_2 &= -\frac{m_2^0}{\tau} \int_{-\infty}^x (\delta(y) - \delta(y-h)) dy, \\ \psi_1 &= m_2^0 \frac{\gamma(\gamma-1)M^2}{\tau} \int_{-\infty}^x (\delta(y) - \delta(y-h)) dy, \\ \psi_2 &= -m_2^0 \frac{1 - T_2^0/T_1^0}{\omega} \int_{-\infty}^x (\delta(y) - \delta(y-h)) dy. \end{aligned}$$

Интегрируя систему (3.4) с учетом $v|_{t=0} = \eta|_{t=0} = s|_{t=0} = 0$, найдем

$$v = \frac{1}{2} \left(\int_{C_+} \varphi dt + \int_{C_-} \varphi dt \right), \quad s = \int_{C_0} \psi dt, \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{v_0}{a_0} \left(\int_{C_+} \varphi dt - \int_{C_-} \varphi dt \right).$$

Перепишем интеграл $\int_{C_+} \varphi dt$ в виде $\int_{C_+} \varphi_1 dt + \int_{C_+} \varphi_2 dt$. Согласно (3.5), вдоль C_+ -характеристики $dx = (v_0 + a_0) dt$, поэтому

$$\int_{C_+} \varphi_1 dt = \int_{\xi_+}^x \varphi_1 \frac{dx}{v_0 + a_0} = -\frac{a_0^2}{\gamma v_0 (v_0 + a_0)} \int_{\xi_+}^x \frac{\partial s}{\partial x} dx = -\frac{a_0^2 s(t, x)}{\gamma v_0 (v_0 + a_0)}, \quad (3.6)$$

где использовано $s(0, \xi_+) = 0$. Аналогично вдоль характеристики C_- найдем

$$\int_{C_-} \varphi_1 dt = -\frac{a_0^2 s(t, x)}{\gamma v_0 (v_0 - a_0)}. \quad (3.7)$$

Подставляя интегралы (3.6), (3.7) в $\int_{C_\pm} \varphi dt$, получим

$$\begin{aligned} v &= -\frac{s}{\gamma(M^2 - 1)} - \frac{m_2^0}{2\tau} \left(\int_{C_+} \theta dt + \int_{C_-} \theta dt \right), & M &= \frac{v_0}{a_0}, \\ \eta &= \frac{s}{\gamma(M^2 - 1)} - \frac{m_2^0}{2\tau} \left(\int_{C_+} \theta dt - \int_{C_-} \theta dt \right), & & \\ s &= \gamma(\gamma-1)m_2^0 M^2 \int_{C_0} \theta \frac{dt}{\tau} - m_2^0 \left(1 - \frac{T_2^0}{T_1^0} \right) \int_{C_0} \theta \frac{dt}{\omega}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq h, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Интегралы (3.8) вычислим отдельно для дозвукового ($M < 1$) и сверхзвукового течений газа. При $M < 1$ картина характеристик показана на

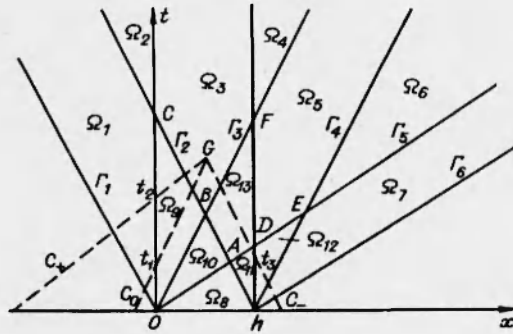


Рис. 9

рис. 9. Полуплоскость $-\infty < x < +\infty, t > 0$ линиями Γ , разбивается на 13 областей Ω_i . Уравнения для Γ , совпадают с соответствующими характеристиками (3.5):

$$\begin{aligned} \Gamma_1: x &= (v_0 - a_0)t, & \Gamma_2: x &= (v_0 - a_0)t + h, \\ \Gamma_3: x &= v_0t, & \Gamma_4: x &= v_0t + h, \\ \Gamma_5: x &= (v_0 + a_0)t, & \Gamma_6: x &= (v_0 + a_0)t + h, \\ \Gamma_7: x &= 0, & \Gamma_8: x &= h. \end{aligned}$$

Точки пересечения прямых Γ_i имеют координаты

$$\begin{aligned} (x_A = \frac{h}{2}(1 + M), t_A = \frac{h}{2a_0}), & \quad (x_B = hM, t_B = \frac{h}{a_0}), \\ (x_C = 0, t_C = \frac{h}{a_0 - v_0}), & \quad (x_D = h, t_D = \frac{h}{a_0 + v_0}), \\ (x_E = h(1 + M), t_E = \frac{h}{a_0}), & \quad (x_F = h, t_F = \frac{h}{v_0}), \\ t_A < t_D < t_B = t_E < t_F < t_C. \end{aligned}$$

Построим, например, решение в Ω_3 . Выбирая точку G с координатами x, t , вычислим интегралы в (3.8). Обозначим через t_1 момент пересечения характеристики C_0 с прямой $x = 0$, тогда

$$\int_{C_0} \theta \frac{dt}{\tau} = \frac{t - t_1}{\tau} = \frac{x}{v_0\tau}, \quad \int_{C_0} \hat{\psi} \frac{dt}{\omega} = \frac{x}{v_0\omega}.$$

Подставляя эти значения в (3.8), получим

$$s = \gamma(\gamma - 1) \frac{m_2^0 x}{v_0\tau} - m_2^0 \left(1 - \frac{T_2^0}{T_1^0} \right) \frac{x}{v_0\omega} \quad \text{в } \Omega_3. \quad (3.9)$$

Интегралы вдоль C_+ и C_- имеют вид

$$\int_{C_+} \hat{\psi} \frac{dt}{\tau} = \frac{t - t_2}{\tau} = \frac{x}{(v_0 + a_0)\tau}, \quad \int_{C_-} \hat{\psi} \frac{dt}{\tau} = \frac{t - t_3}{\tau} = \frac{h - x}{(a_0 - v_0)\tau}.$$

Подставляя данные интегралы в (3.8), с учетом (3.9) найдем

$$v' = -\frac{m_2^0 h M}{2\tau(1-M)} + \frac{m_2^0 \gamma x M^2}{\tau(1-M^2)} - \frac{m_2^0 x}{\gamma \omega(1-M^2)} \frac{\Delta T'}{T_1^0}, \quad (3.10)$$

где $\Delta T = T_1^0 - T_2^0$; $M < 1$. Интегралы в остальных областях Ω , вычисляются аналогично, в результате для скорости v' получим

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t + \frac{x}{a_0 - v_0} \right) \quad \text{в } \Omega_1, \\ v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{1-M} \quad \text{в } \Omega_2, \\ v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{1+M} + \frac{m_2^0 h(\gamma-1)M^2}{\tau(1-M^2)} H \quad \text{в } \Omega_4, \\ v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{1+M} + \frac{m_2^0(\gamma-1)v_0 M^2}{\tau(1-M^2)} \left(t - \frac{x-h}{v_0} \right) \quad \text{в } \Omega_5, \\ v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{1+M} \quad \text{в } \Omega_6, \\ v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t - \frac{x-h}{v_0 + a_0} \right) \quad \text{в } \Omega_7, \\ v' &= -m_2^0 v_0 \frac{t}{\tau} \left(1 - (\gamma-1) \frac{M^2 H}{1-M^2} \right) \quad \text{в } \Omega_8, \\ v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t + \frac{x}{v_0 + a_0} \right) + \frac{m_2^0(\gamma-1)x M^2 H}{\tau(1-M^2)} \quad \text{в } \Omega_9, \\ v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t + \frac{x}{v_0 + a_0} \right) + \frac{m_2^0 v_0(\gamma-1)t M^2}{\tau(1-M^2)} H \quad \text{в } \Omega_{10}, \\ v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t + \frac{h-x}{a_0 - v_0} \right) + \frac{m_2^0 v_0(\gamma-1)t M^2}{\tau(1-M^2)} H \quad \text{в } \Omega_{11}, \\ v' &= -\frac{m_2^0 v_0}{2\tau} \left(t + \frac{h-x}{a_0 - v_0} \right) + \frac{m_2^0 v_0(\gamma-1)M^2}{\tau(1-M^2)} \left(t + \frac{h-x}{v_0} \right) H \quad \text{в } \Omega_{12}, \\ v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{1-M} + \frac{m_2^0 x M^2}{\tau(1-M^2)} + \frac{m_2^0 v_0(\gamma-1)t M^2}{\tau(1-M^2)} H \quad \text{в } \Omega_{13}, \\ H &= 1 - \frac{\tau \Delta T}{\gamma(\gamma-1)\omega T_1^0 M^2}, \quad M = \frac{v_0}{a_0} < 1, \quad \Delta T = T_1^0 - T_2^0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из рис. 9 и уравнения (3.10) следует, что при $t > t_C$ течение газа в облаке будет стационарным, а $dv'/dx > 0$.

На рис. 10 показана качественная зависимость $v'(x)$ для фиксированного момента t , построенная в соответствии с уравнениями (3.10), (3.11) (вертикальная линия — правая граница облака). Видно, что $v'(x)$ качественно согласуется с расчетом. Исключение составляет область Ω_4 , где $v' > 0$. Однако, как показано ниже, значение $v'(x)$ в этой области мало и не превышает 0,5 % по сравнению с v_0 . Появление $v' > 0$ связано с влиянием энтропии, вклад которой в v' , согласно (3.8), составляет

$\Delta v'/v_0 = s/(\gamma(1-M^2)) > 0$. По-видимому, более аккуратный расчет теплообмена с частицами и разогрева вследствие трения приведет к понижению $v'(x)$ в Ω_4 .

Оценим амплитуду волны сжатия v'_0 и величину v'_1 , равную v' в Ω_4 (рис.10). Подставляя в $\tau = \frac{4}{3}d/(C_d v_0)$, $\omega = d\text{RePr}/6v_0\gamma\text{Nu}$ значения $\text{Re} = dv_0/\nu$, $\gamma = 1,4$, $\Delta T/T_1^0 \approx 0,5$, $M = 0,81$, $\text{Nu} \approx 0,6\text{Re}^{1/2}$, $\text{Pr} \approx 0,66$, $d = 400$ мкм, $\nu = 0,15$ см²/с, получим $v'_1/v_0 \approx 0,5$ %, $v'_0/v_0 \approx 4$ %. Согласно численному расчету, представленному на рис. 2, отношение $v'_0/v_0 \approx 6,1$ %, что согласуется с приведенной выше оценкой.

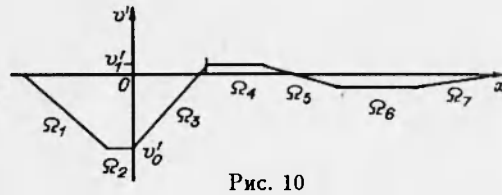


Рис. 10

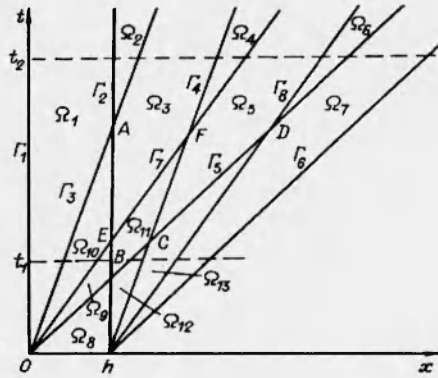


Рис. 11

В случае сверхзвукового течения ($M_0 = 4,5$, $M_1 = 1,77$) картина характеристик имеет качественно другой вид (рис. 11), где Γ_3, Γ_4 совпадают с C_- , Γ_5, Γ_6 — с C_+ , а Γ_7, Γ_8 — с C_0 . Характеристики C_- не попадают в область левее облака, поэтому течение там остается невозмущенным. Область решения разбивается на 13 подобластей, разделенных линиями Γ_i , которые описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \Gamma_1: & x = 0, & \Gamma_2: & x = h, \\ \Gamma_3: & x = (v_0 - a_0)t, & \Gamma_4: & x = (v_0 - a_0)t + h, \\ \Gamma_5: & x = (v_0 + a_0)t, & \Gamma_6: & x = (v_0 + a_0)t + h, \\ \Gamma_7: & x = v_0 t, & \Gamma_8: & x = v_0 t + h. \end{aligned}$$

Точки пересечения прямых Γ_i следующие:

$$\begin{aligned} t_A = \frac{h}{v_0 - a_0}, \quad t_B = \frac{h}{v_0 + a_0}, \quad t_C = \frac{h}{2a_0}, \\ t_D = \frac{h}{a_0}, \quad t_E = \frac{h}{v_0}, \quad t_F = \frac{h}{a_0}. \end{aligned}$$

В силу $M = v_0/a_0 > 1$ справедливы неравенства

$$t_B < t_C < t_E < t_D = t_F < t_A.$$

Решение в областях Ω_i определяется из уравнений (3.8) и строится аналогично (3.10). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае

можно пренебречь теплообменом между газом и частицами. (Как показывает оценка, повышение энтропии s из-за трения пропорционально M^2 существенно превышает уменьшение s вследствие теплообмена.) В результате решение в областях Ω_i имеет вид

$$\begin{aligned}
 v' &= -\frac{m_2^0 x}{\tau} \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} & \text{в } \hat{\Omega}_1, \\
 v' &= -\frac{m_2^0 h}{\tau} \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} & \text{в } \Omega_2, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{\tau} \left(i \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} + \frac{tv_0}{2} - \frac{xM}{2(M-1)} \right) & \text{в } \Omega_3, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{\tau} \left(\frac{hM}{2(M+1)} + (\gamma - 1) \frac{hM^2}{M^2 - 1} \right) & \text{в } \Omega_4, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{\tau} \left(\frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} (iv_0 + i - x) + \frac{hM}{2(M+1)} \right) & \text{в } \Omega_5, \\
 v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \frac{M}{M+1} & \text{в } \Omega_6, \\
 v' &= -\frac{m_2^0 h}{2\tau} \left(\frac{M}{M+1} \left(i - \frac{x}{h} \right) + \frac{tv_0}{h} \right) & \text{в } \hat{\Omega}_7, \\
 v' &= -\frac{m_2^0 tv_0}{\tau} \left(1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \right) & \text{в } \Omega_8, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{2\tau} \left(\frac{2(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} tv_0 + tv_0 + \frac{Mx}{M+1} \right) & \text{в } \Omega_9, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{2\tau} \left(\frac{2(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} x + tv_0 + \frac{Mx}{M+1} \right) & \text{в } \Omega_{10}, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{2\tau} \left(\frac{2(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} (iv_0 + i - x) + \frac{2hM^2}{M^2 - 1} + tv_0 - \frac{Mx}{M-1} \right) & \text{в } \Omega_{11}, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{\tau} \left(iv_0 \left(1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \right) - \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} (x - i) \right) & \text{в } \Omega_{12}, \\
 v' &= -\frac{m_2^0}{2\tau} \left(\frac{2(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} (tv_0 + h - x) + tv_0 + \frac{M}{M+1} (h - x) \right) & \text{в } \hat{\Omega}_{13}, \\
 M &= \frac{v_0}{a_0} > 1.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

На рис. 12 приведена качественная зависимость $v'(x)$ в моменты времени $t_1, t_2, t_1 < t_2$ (см. рис. 11). Видно, что значение v' в облаке со временем понижается (газ тормозится), пока при $t > t_A$ не установится стационарное течение с постоянным отрицательным градиентом $dv/dx < 0$. Вне облака течение остается нестационарным.

Найдем изменение числа Маха в облаке при стационарном течении $t > t_A$:

$$\frac{M}{M_0} = 1 + \frac{v'}{v_0} - \frac{a'}{a_0}, \quad M_0 = \frac{v_0}{a_0}. \tag{3.13}$$

Здесь по сравнению с (3.12) введено новое обозначение для величины $M_0 = \frac{v_0}{a_0}$; a' — возмущение скорости звука $a = a_0 + a'$. Из уравнения состояния идеального газа $p = B\rho^\gamma \exp(S/cv)$ и формулы $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ найдем выражение для a' :

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{s}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \eta. \quad (3.14)$$

Зависимости $\eta(x)$, $s(x)$ определяются из (3.8):

$$\eta = \gamma \frac{m_2^0 x}{\tau v_0} \frac{M_0^2}{M_0^2 - 1}, \quad s = \gamma(\gamma - 1) \frac{m_2^0 M_0^2 x}{v_0 \tau}. \quad (3.15)$$

Подставляя уравнения (3.12), (3.14), (3.15) в (3.13), получим

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{m_2^0 x}{\tau v_0} \frac{\gamma M_0^2}{M_0^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right). \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.16) по x , найдем

$$\frac{dM}{dx} = - \frac{m_2^0}{\tau v_0} \frac{\gamma M_0^3}{M_0^2 - 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right).$$

Полученная формула совпадает с выражением dM/dx для стационарного течения газа по трубе постоянного сечения при наличии трения [4].

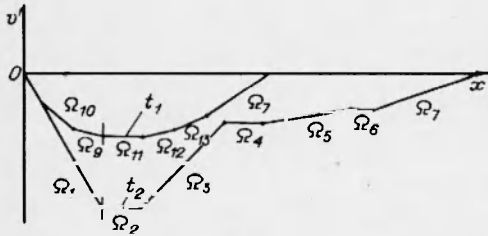


Рис. 12

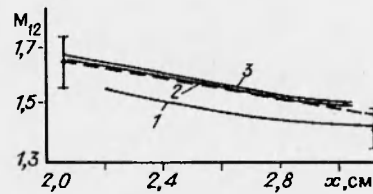


Рис. 13

В [5, 6] экспериментально изучалось взаимодействие УВ с облаком частиц при тех же параметрах газа и частиц, что и в данной работе. Измерялось относительное число Маха $M_{12} = |v_1 - v_2|/a$ на левой и правой границах облака. Результаты эксперимента в момент $t = 40$ мкс показаны на рис. 13 вертикальными линиями, определяющими разброс экспериментальных измерений. Разброс возникает вследствие полидисперсности и неоднородности распределения частиц в облаке. Результаты численного решения системы уравнений (1.1) приведены на рис. 13 сплошными линиями: 1 соответствует фракции $d_1 = 170$ мкм, 2 — $d_2 = 400$ мкм, 3 — $d_3 = 500$ мкм. Штриховой линией даны расчеты по формуле

$$\Delta M = \sum_{i=1}^3 \Delta M_i, \quad \Delta M_i = M(m_2^{(i)}, d_i, x) - M_0,$$

где $M(m_2^{(i)}, d_i, x)$ вычисляется по формуле (3.16) при $\gamma = 1,4$, $C_d = 0,8$, $M_0 = 1,68$, $m_2^{(1)} = 5 \cdot 10^{-4}$, $d_1 = 170$ мкм, $m_2^{(2)} = 10^{-3}$, $d_2 = 400$ мкм, $m_2^{(3)} = 5 \cdot 10^{-4}$, $d_3 = 500$ мкм. Видно, что численное и аналитическое решения удовлетворительно описывают экспериментальные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука, 1992.
2. Киселев С. П., Фомин В. М. Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ. 1986. № 2. С. 93–101.
3. Киселев В. П., Киселев С. П., Фомин В. М. О взаимодействии ударной волны с облаком частиц конечных размеров // ПМТФ. 1994. № 2. С. 26–37.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
5. Бойко В. М., Папырин А. Н., Поплавский С. В. О механизме воспламенения пылей в проходящих ударных волнах // ФГВ. 1993. № 3. С. 143–148.
6. Поплавский С. В. Исследование нестационарного взаимодействия ударных волн с пылегазовыми смесями: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1992.

Поступила в редакцию 11/III 1994 г.
