истекающих вертикально вниз ($\rho_1/\rho_2 \gg 1$). Так, в работах [5, 6] отмечено, что при наложении пульсаций скоростей эффективная длина участка струи (участок, на котором развиваются неустойчивые возмущения от некоторого малого, но экспериментально определимого значения амплитуды до распада) сокращается с увеличением частоты наложенного возмущения.

Поступила 31 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ламб Г.** Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
2. **Лышевский А. С.** Закономерности дробления жидкости механическими форсунками давления. Новочеркасск, Новочеркасск. политехн. ин-т, 1961.
3. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Научные труды № 25. М., изд. МГУ, 1973.
4. **Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А. и др.** Распыливание жидкостей. М., Машиностроение, 1977.
5. **Панченков Г. М., Мамлеев Р. А.** Особенности развития неустойчивости капиллярных струй жидкости.— ЖФХ, 1978, т. 52, № 3.
6. **Панченков Г. М., Мамлеев Р. А., Максименко М. З., Папко В. В.** О влиянии длительности воздействия наложенных возмущений и распад струи жидкости.— ЖФХ, 1978, т. 52, № 3.

УДК 532.527+532.517.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Никулин

(*Новосибирск*)

Рассматриваются течения идеальной несжимаемой жидкости, скорости которых в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеют вид $(0, V, W)$. Считается, что $V = V(r)$, $W = W(r)$. Исследуется устойчивость последних в линейном приближении. Подобные течения являются идеализацией таких природных явлений, как торнадо, пыльные дьяволы [1, 2]. Их исследование важно для понимания роли неустойчивости при взрыве вихря [3]. Классическое течение Куэтта между цилиндрами также относится к указанному типу.

До настоящего времени известно немного общетеоретических результатов, касающихся линейной устойчивости закрученных потоков по отношению к неосесимметричным возмущениям. Этому вопросу посвящена работа [4], где получено описание нормальных колебаний в терминах одного уравнения и введен аналог числа Ричардсона. В [5] исследованы достаточные условия устойчивости таких течений по отношению к осесимметричным возмущениям. В [6, 7] устойчивость по отношению к неосесимметричным возмущениям исследуется численно. В [6] рассмотрено течение Пуазейля во вращающейся трубе, в [7] — линейный вихрь в следе за крылом. Ряд общих результатов для течений с круговыми линиями тока ($W = 0$) получен в [8, 9], где исследована аналогия таких потоков с плоскопараллельными течениями стратифицированной жидкости. Вопросам устойчивости течений стратифицированной жидкости посвящены работы [10, 11].

В данной работе получены некоторые общие результаты, касающиеся устойчивости закрученных потоков по отношению к неосесимметричным возмущениям. Дана оценка невещественной части спектра возмущений (теорема о круге). Рассмотрена задача с начальными данными, сформулировано правило выбора ветви решения в особой точке. Отмечено сходство и отличие закрученных потоков от течений с круговыми линиями тока и течений стратифицированной жидкости.

1. Пусть (u, v, w) — комплексные амплитуды компонент возмущения скорости, соответствующие координатам (r, φ, z). Пусть возмущения имеют вид нормальных волн: $u(r, \varphi, z, t) = \mathrm{Re}\{u(r) \exp[i(kz + m\varphi - \omega t)]\}$ и т. д. В [4] линеаризованные уравнения движения и неразрывности

сведены к одному. Последнее для $q = ur$ можно записать в виде

$$(1.1)\qquad q'' + \left(\frac{1}{r} - \beta\right)q' - \frac{1}{r^2\rho}q + \left[\frac{A(r)}{\sigma} + \frac{G(r)}{\sigma^2}\right]q = 0,$$

где $\rho = 1/(m^2 + k^2r^2)$; $\beta = -\rho'/\rho$; $\sigma = V/r + kW/m - \omega/m$; $A(r) = (\beta\Omega + k\beta rW'/m - \Omega' - k(rW')'/m)/r$;

$$G(r) = \frac{2kV}{mr^2}\left(\frac{k}{m}\Omega r - W'\right);\quad \Omega = dV/dr + V/r.$$

(Ниже будут рассматриваться течения между цилиндрами радиусов R_1 и R_2). Тогда к (1.1) добавятся граничные условия

$$(1.2)\qquad q = 0 \quad \text{при } r = R_1,\ R_2.$$

Для доказательства теоремы о круге преобразуем уравнение (1.1). Подставим $q = \sigma r f(r)$. После преобразований получим

$$(1.3)\qquad (\rho r^3\sigma^2 f')' + 2\rho rLf - (m^2 + k^2r^2 - 1)\rho r\sigma^2 f - \rho' r^2(M^2 - (N - c)^2)f + 2\rho r^2N'(N - c)f = 0,$$

где $c = \omega/m$; $M = V/r$; $N = kW/m$; $L = k^2rV\Omega/m^2$. Обозначим $Q = \rho r^3|f'|^2 + \rho r(m^2 + k^2r^2 - 1)|f|^2$, $Q_1 = 2\rho r|f|^2$, $Q_2 = -\rho' r^2|f|^2$. Умножим (1.3) на f^*, затем проинтегрируем от R_1 до R_2 с учетом (1.2). В полученном равенстве выделим мнимую и действительную части:

$$(1.4)\qquad 2ic_i\left\{\int Q(M + N - c_r)\,dr + \int Q_2(N - c_r)\,dr - \int \frac{Q_1}{2}rN'dr\right\} = 0;$$

$$(1.5)\qquad \int Q\left[(M + N - c_r)^2 - c_i^2\right]dr + \int Q_2\left[(N - c_r)^2 - M^2 - c_i^2\right]dr - \int Q_1rN'(N - c_r)\,dr - \int Q_1L\,dr = 0.$$

Обозначим $a = \min(M + N - rN'/2,\ M/2 + N - rN'/4,\ M + N)$, $b = \max(M + N - rN'/2,\ M/2 + N - rN'/4,\ M + N)$.

Т е о р е м а. Все невещественные собственные значения уравнения (1.1) при $m^2 > 1$ удовлетворяют неравенствам

$$a < c_r < b,$$

$$\left(c_r - \frac{a+b}{2}\right)^2 + c_i^2 < \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \max\left[V\left(\frac{k}{m}W' - \frac{k^2}{m^2}\Omega r\right),\ 0\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственной проверкой устанавливается, что для $m^2 > 1$ выполнено

$$(1.6)\qquad Q \geqslant Q_1 \geqslant Q_2 \geqslant 0.$$

Докажем правое из неравенств $a < c_r < b$. Левое доказывается аналогично. Предположим противное. Тогда для (1.4) в силу (1.6) имеем цепочку неравенств

$$\int Q(c_r - M - N)\,dr + \int Q_2(c_r - N)\,dr + \int \frac{Q_1}{2}rN'dr > \int (Q_1 - Q_2)\left(c_r - M - N + \frac{rN'}{2}\right)dr + \int 2Q_2\left(c_r - \frac{M}{2} - N + \frac{rN'}{4}\right)dr > 0.$$

Последнее в силу $c_i \neq 0$ противоречит (1.4). Сделаем замену: $N_* = N - (a + b)/2$, $c_* = c - (a + b)/2$. Тогда вид (1.4), (1.5) не изменится, лишь вместо N и c будут стоять N_* и c_*. С помощью (1.4) преобразуем (1.5) к виду

$$\int Q\,[|c_*|^2-(M+N_*)^2]\,dr+\int Q_2\left(|c_*|^2+M^2-N_*^2\right)dr+ \\ +\int Q_1\,(rN'N_*+L)\,dr=0. \tag{1.7}$$

Докажем последнее неравенство теоремы. Предположим противное. Тогда $|c_*|^2>(M+N_*)^2$. В силу этого и (1.6) для (1.7) имеем цепочку неравенств

$$\int Q\,[|c_*|^2-(M+N_*)^2]\,dr+\int Q_2\left(|c_*|^2+M^2-N_*^2\right)dr+$$
$$+\int Q_1\,(rN'N_*+L)\,dr>\int (Q_1-Q_2)\,[|c_*|^2-(M+N_*)^2+rN'N_*+L]\,dr+$$
$$+\int Q_2\,[2|c_*|^2-(M+N_*)^2+M^2-N_*^2+rN'N_*+L]\,dr>$$
$$>\int (Q_1-Q_2)\left\{|c_*|^2-\left[\left(M+N_*-\frac{rN'}{2}\right)^2+V\left(\frac{k}{m}W'-\frac{k^2}{m^2}\Omega r\right)\right]\right\}+$$
$$+\int 2Q_2\left\{|c_*|^2-\left[\left(N_*+\frac{M}{2}-\frac{rN'}{4}\right)^2+\frac{V}{2}\left(\frac{k}{m}W'-\frac{k^2}{m^2}\Omega r\right)\right]\right\}>0,$$

что противоречит (1.7).

2. Доказанное утверждение позволяет рассмотреть задачу с начальными данными. Дальнейшие результаты получаются методами, аналогичными [5, 9—11]. Поэтому изложение будет кратким с соответствующими ссылками.

Представим возмущение в виде $u(r,\varphi,z,t)=\mathrm{Re}\,\{u(r,t)\exp[i(kz+m\varphi)]\}$, $u(r,0)=u_0(r)$ и т. д. Обозначим $\lambda=ru(p,r)$, где $u(p,r)=\int\limits_0^\infty u(r,t)\exp(-pt)\,dt$ — преобразование Лапласа функции $u(r,t)$. Из линеаризованных уравнений движения и неразрывности можно получить уравнение на λ

$$\lambda''+\left(\frac{1}{r}-\beta\right)\lambda'-\frac{\lambda}{r^2\rho}+\left[\frac{A(r)}{\sigma}+\frac{G(r)}{\sigma^2}\right]\lambda=\frac{X_1}{\sigma}+\frac{X_2}{\sigma^2}. \tag{2.1}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r; $\sigma=V/r+kW/m-ip/m$; $X_1=-i(ru_0)''/m-i(1/r-\beta)(ru_0)'/m$; $X_2=2kV(krv_0/m-w_0)/(mr)$.

Будем считать функцию $V/r+kW/m$ монотонной. На случай немонотонной функции результаты переносятся аналогично [11]. Асимптотику функции $u(r,t)$ при $t\to\infty$ найдем, следуя [9—11]. Аналогом числа Ричардсона в данном случае является число [4, 8]

$$J=\frac{2kV\,(k\Omega r/m-W')}{mr^2\,[(V/r)'+kW'/m]^2}.$$

Обозначим $\nu(r)=\sqrt{1-4J}$ и рассмотрим возмущения, принадлежащие к непрерывному спектру. При $\nu>0$, $k\neq 0$, $t\to\infty$ имеем $u(r,t)\sim t^{\nu-1}\exp(-imUt)$, $U=V/r+kW/m$. Отметим, что в отличие от [9—11] для любого r, где $V\neq 0$, $W'\neq 0$, существуют такие k/m, что $J<0$, $\nu>1$. Эти значения k/m соответствуют наиболее растущим решениям непрерывного спектра. Таким образом, всегда найдутся такие k/m, для которых возмущения радиальной компоненты скорости закрученного потока растут степенным образом, поскольку всегда существует точка r, где $V\neq 0$, $W'\neq 0$. Случай $W'\equiv 0$, согласно (1.1), (2.1), просто сводится к случаю $W=0$.

Рассмотрим опять возмущения, имеющие вид нормальных волн. Их поведение описывается уравнением (1.1). Последнее имеет особенности в точках $\sigma = 0$, т. е. при некоторых вещественных значениях ω. Решения с $\sigma = 0$ называются сингулярными нейтральными модами (СНМ). Далее следуем [5, 9]. Пусть r_0 такова, что $\sigma(r_0) = 0$. Тогда в окрестности r_0 решение (1.1) имеет вид $X = AX_+ + BX_-$. Здесь $X = \sqrt{\rho r}\cdot q$; A, B — постоянные;

$$X_\pm = \xi^{1/2(1\pm\nu_0)}\Phi_\pm(r); \quad \nu_0 = \nu(r_0); \quad \xi = (r - r_0);$$

$\Phi\pm$ — аналитические в окрестности r_0 функции вида $\Phi\pm = 1 + a_\pm\xi + \ldots$ Из рассмотрения задачи с начальными данными следует, что СНМ являются пределом решений с $\operatorname{Im}\omega > 0$ при $\operatorname{Im}\omega \to 0$. Это условие задает правило обхода особенности при интегрировании (1.1), а следовательно, правило выбора ветви. Для $J(r_0) < 1/4$ вблизи критической точки получаем

$$X_\pm = |\xi|^{1/2(1\pm\nu_0)} \exp\left[-\frac{i\pi}{2}(1\pm\nu_0)S(\xi)\right]\Phi_\pm,$$

$$S(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi > 0, \\ \pm 1 & \text{при } \xi < 0,\ U_0' \gtrless 0, \end{cases}$$

$$U_0 = V/r + kW/m \quad \text{при } r = r_0.$$

Выделим класс течений, в которых отсутствуют СНМ во внутренних точках отрезка $[R_1R_2]$. Рассмотрим напряжения Рейнольдса $\tau = -\langle uv\rangle$, где $\langle uv\rangle$ — среднее по z и φ. Так как u, v имеют вид нормальных волн, то $2\tau r = \operatorname{Re}(qv^*)\exp(2t\operatorname{Im}\omega)$. Отсюда с помощью (1.1) можно получить

$$\frac{d}{dr}(\tau r^2) = \frac{\operatorname{Im}\omega}{2}\left\{-\left(\frac{A}{|\sigma|^2} + \frac{2G\operatorname{Re}\sigma}{|\sigma|^4}\right)|X|^2 + \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{k^2}{m^2}\Omega r - \frac{k}{m}W'\right)\left|\frac{X}{\sigma}\right|^2\right]\right\}\times$$
$$\times\exp(2t\operatorname{Im}\omega).$$

Таким образом, при $\operatorname{Im}\omega \to 0$ $\tau r^2 = \mathrm{const}$, за исключением возможных скачков при $\sigma = 0$. Используя представление для X в окрестности особой точки r_0, найдем, что при $J(r_0) < 1/4$

$$2\tau r^2 = \nu_0 m \operatorname{Im}\{AB^*\exp[-i\pi(1+\nu_0)S(\xi)]\}. \tag{2.2}$$

Данное выражение описывает скачок τ в особой точке. В рассматриваемом случае течения между цилиндрами с монотонной функцией $U = V/r + kW/m$ имеем $\tau = 0$ при $r = R_1$, R_2, на интервале (R_1R_2) может быть не более одной особой точки. Тогда скачка τ в особой точке быть не должно. Отсюда с учетом (2.2) следует, что при $J_0 < 1/4$ либо $X = X_+$, либо $X = X_-$. При $J_0 \geqslant 1/4$ аналогично [5, 9] можно показать, что решений типа СНМ не существует. Напишем условия отсутствия СНМ для $J > 0$. Они будут подобны последним из [9]. Поэтому выпишем только одно из них, остальные по аналогии. Необходимо, чтобы во всей области течения выполнялись неравенства: $G > 0$, $G' \leqslant 0$, $U' > 0$, $U'' \geqslant 0$, $(\rho\Omega + k\rho r W'/m)' \geqslant 0$. Отметим отличие от [9]. Для течений с круговыми линиями тока неравенство $J > 0$ выполнено одновременно при всех k, m. Здесь же всегда существуют такие k/m, что $J < 0$ при некоторых r, т. е. для любого потока существуют такие k/m, для которых нельзя гарантировать отсутствие СНМ.

Изложенные результаты в случае $m^2 > 1$ непосредственно обобщаются на течения типа смерча. Так, теорема о круге обобщается в силу того, что при $r \to 0$ выполнено $q = O(r^2)$. Для задачи с начальными данными, кроме $m^2 > 1$, необходимо потребовать $v_0(0) = 0$.

Поступила 3 IV 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ives R. L.** Behavior of dust devil.— Bull. Amer. Meteor. Soc., 1947, vol. 28, N 4.
2. **Hoecker W. H.** Wind speed and air flow patterns in the Dallas tornado of April 2, 1957.— Monthly Weather Rev., 1960, vol. 88, N 5.
3. **Leibovich S.** The structure of vortex breakdown.— In: Annual Review on Fluid Mech. Vol. 10. N. Y., 1978.
4. **Howard L. N., Gupta A. S.** On the hydrodynamic and hydromagnatic stability of swirling flows.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, N 3.
5. **Yang Cheng-I.** Sufficient conditions for stability of rotating flows.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1978, vol. 45, N 1.
6. **Maslowe S. A.** Instability of rigidly rotating flows to nonaxisymmetric disturbances.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, N 2.
7. **Lessen M., Singh P. J., Paillet F.** The stability of a trailing line vortex. Pt 1. Inviscid theory.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, N 4.
8. **Владимиров В. А.** Устойчивость течения типа смерча.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 37. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1978.
9. **Владимиров В. А.** Устойчивость течений идеальной несжимаемой жидкости с круговыми линиями тока.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 42. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
10. **Case K. M.** Stability of idealised atmosphere.— Phys. Fluids, 1960, vol. 3, N 2.
11. **Chimonas G.** Algebraic disturbances in stratified shear flows.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 90, N 1.

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГО ВИХРЯ

Т. А. Лисейкина

(*Новосибирск*)

Исследованию устойчивости вращающегося течения Куэтта посвящено большое число работ теоретического и экспериментального характера [1—3]. Основное внимание уделено осесимметричным возмущениям как наиболее опасным.

Результаты экспериментов и расчеты показывают, что при вращении цилиндров в одном направлении с увеличением относительной скорости вращения внешнего цилиндра критическое число Тейлора, при котором нарушается исходный ламинарный режим и возникают тейлоровские вихри, увеличивается. При $\omega_1 r_1^2 \approx \omega_0 r_0^2$ кривая зависимости $T_*\left(\dfrac{\omega_1 r_1^2}{\omega_0 r_0^2}\right)$ (ω_0, ω_1— угловые скорости вращения внутреннего и внешнего цилиндров, r_0, r_1 — радиусы соответствующих цилиндров) выходит на асимптотику.

Менее исследованы течения вращающейся жидкости при наличии одной из поверхностей, неограниченной жесткой стенкой. С такими течениями часто сталкиваются в химической, бумажной промышленности, при охлаждении вращающихся механизмов пленками жидкости и т. д. Возникновение возмущений в жидкости приводит к искривлению «свободной» поверхности и появлению на ней волн, а это оказывает влияние на общую картину устойчивости.

Вопрос устойчивости вращающегося течения, когда одна из границ «свободна», а другая граница жесткая или на бесконечности, рассмотрен в [4]. Исследуется устойчивость по отношению к малым невязким возмущениям.

В [5] проведено экспериментальное исследование устойчивости течения со «свободной» внешней поверхностью и дан численный анализ. При определенном соотношении угловой скорости (рассматривается твердотельное вращение) и толщины пленки наблюдается изменение поверхности волновыми образованиями.

В работе [6] изучаются формы равновесия жидкости, находящейся на внешней или внутренней поверхности твердой границы и вращающейся вместе с ней как твердое тело. С учетом поверхностного натяжения получено, что в возмущенном движении поле скорости остается первоначальным, а возмущается «свободная» граница.