

Рассмотрим такие возмущения, при которых неподвижен центр массы капли. Тогда значения λ_i при $i = 0, 1$ исключаются из рассмотрения, а условие устойчивости неподвижной заряженной капли примет вид

$$Q^2 < 16\pi\epsilon\sigma R^3.$$

Заряд $Q = \sqrt{16\pi\epsilon\sigma}R^3$ носит название предельного заряда Рэлея [7]. Рассматривая аналогичную задачу для плоского случая, можно получить критерий устойчивости в виде

$$Q^2 < 3\pi\epsilon\sigma R,$$

где Q — заряд на единицу длины заряженного шнура.

Поступила 30 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1976.
2. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М., ОНТИ, 1935.
3. Моисеев И. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
5. Френкель Я. И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. — ЖЭТФ, 1936, т. 6, вып. 4.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеориздат, 1953.
7. Мелчер Дж. Р. Электрогидродинамика. — «Магнит. гидродинамика», 1974, № 2.

УДК 532.526.4

ВЛИЯНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ГРАДИЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕЙ

Г. Ф. Сивых

(Новосибирск)

В отличие от большого числа методов расчета турбулентного пограничного слоя на гладкой поверхности, количество известных методов расчета обтекания шероховатых поверхностей крайне незначительно. При этом практически все они ограничиваются случаем песочной зернистой шероховатости и дают возможность рассчитать коэффициент поверхностного трения только для режима развитой шероховатости при отсутствии градиента давления. Такое положение связано с большим разнообразием геометрических форм шероховатости и способов ее распределения по поверхности, что затрудняет моделирование течения в окрестности элементов шероховатости.

В таком случае определенным преимуществом перед другими подходами к решению задачи обладает метод относительного соответствия [1]. Применение такого подхода к рассматриваемой проблеме позволяет распространить возможности расчета турбулентного пограничного слоя с помощью предельных относительных законов [2] на случай шероховатой поверхности.

1. Введем величину $\Psi_r = (c_{fr}/c_{fs})_{\text{Re}_0}$, представляющую собой относительное изменение коэффициента трения поверхности вследствие шероховатости. Здесь сопоставление коэффициентов трения на шероховатой поверхности c_{fr} и гладкой c_{fs} производится для одинаковых внеш-

них условий при одном и том же числе $Re_\theta = \rho_e \theta u_e / \mu_w$, где θ — толщина потери импульса; ρ , u , μ — плотность, скорость и динамическая вязкость газового потока соответственно. Такой выбор параметра сопоставления следует из общего для теории относительных законов трения [2] алгоритма решения задачи, когда коэффициент трения «эталонной» поверхности рассчитывается при том же самом значении Re_θ , которое получено из интегрального соотношения импульсов для «возмущенного» состояния поверхности. Индекс e здесь и далее относится к параметрам на внешней границе пограничного слоя, w — к параметрам на стенке, aw — к параметрам на теплоизолированной стенке, 1 — к параметрам на границе вязкого подслоя, s — к параметрам на гладкой поверхности, r — к параметрам на шероховатой стенке, k — к параметрам на линии вершин элементов шероховатости.

Выражение для Ψ , получим, используя двухслойную модель турбулентного пограничного слоя при следующих допущениях:

1. Влияние продольного градиента давления на трение как на гладкой, так и на шероховатой поверхности учитывается только через интегральное соотношение импульсов, а прямым влиянием градиента давления на профиль скоростей пренебрегается. Как известно, это допущение приближенно справедливо для течений с отрицательными и умеренными положительными градиентами давления.

2. Профиль скоростей в вязком подслое определяется из уравнения $\tau = \mu_w du/dy = \tau_w$, где $\tau_w = \rho_w u_*^2 = c_f \rho_e u_e^2 / 2$ — напряжение трения на стенке; u_* — динамическая скорость. Отсюда имеем профиль скоростей в вязком подслое

$$(1.1) \quad u^+ = y^+ \text{ при } y^+ \leq y_1^+,$$

где $y^+ = y u_* / \nu_w$ — расстояние от стенки; $u^+ = u / u_*$ — значение скорости в переменных закона стенки; ν — кинематическая вязкость газа.

Толщина вязкого подслоя на гладкой поверхности $y_{1s}^+ = \frac{y_{1s} u_*}{\nu_w}$ принимается такой же, что и в безградиентном потоке несжимаемой жидкости $y_{1s}^+ = 11,6$. В случае шероховатой поверхности зависимость толщины вязкого подслоя от высоты бугорков шероховатости $k^+ = k u_* / \nu_w$ (k — геометрическая высота) и их формы получена ниже.

3. В турбулентном ядре пограничного слоя (по всей его толщине) примем следующие распределения касательного напряжения τ и длины пути смещения l , которые справедливы лишь в пристеночной области:

$$(1.2) \quad \tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w, \quad l = \kappa y,$$

где $\kappa = 0,4$ — константа турбулентности.

Проинтегрируем (1.2) в пределах турбулентного ядра, используя для распределения плотности модифицированный интеграл Крокко:

$$(1.3) \quad \rho_w / \rho = 1 - \alpha \bar{u} - \beta \bar{u}^2.$$

Здесь $\bar{u} = u / u_e$; $\alpha = 1 - T_{aw} / T_w$ — фактор теплообмена; $T_{aw} = T_e \times \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)$ — температура теплоизолированной поверхности; r — коэффициент восстановления; γ — отношение удельных теплоемкостей; M — число Маха; $\beta = r \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \frac{T_e}{T_w}$.

Используя (1.2), (1.3), получим профиль в форме дефекта скорости, не зависящей от состояния поверхности:

$$(1.4) \quad \frac{u_e^+}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{2\beta \bar{u} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}} - \arcsin \frac{2\beta + c}{\sqrt{c^2 + 4\beta}} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln \xi \quad \text{при } \xi \geq \xi_{\min},$$

где $\xi = y/\delta$; δ — толщина пограничного слоя; $u_e^+ = \frac{u_e}{u_*} = \sqrt{\frac{2}{c_f} \frac{\rho_w}{\rho_e}}$ — параметр трения.

Нижней границей применимости профиля (1.4) в случае гладкой поверхности является граница вязкого подслоя $y_{\min s} = y_{1s}$. Для шероховатой поверхности такое положение ($y_{\min} = y_1$) сохраняется лишь до тех пор, пока элементы шероховатости утоплены в вязком подслое. Если же $k \geq y_1$, то за нижнюю границу следует принять линию вершин элементов шероховатости $y_{\min} = k$. Используя эти соображения и ограничиваясь первым членом в разложении \arcsin по степеням аргумента, из (1.4) получим выражение для Ψ_r

$$(1.5) \quad \Psi_r = \left(\frac{\kappa u_{1s}^+ \sqrt{\frac{4\beta}{\alpha^2 + 4\beta}} - \ln \xi_{1s}}{\kappa u_{\min}^+ \sqrt{\frac{4\beta}{\alpha^2 + 4\beta}} - \ln \xi_{\min}} \right)^2, \quad \text{Re}_\theta$$

где, как уже обсуждалось выше,

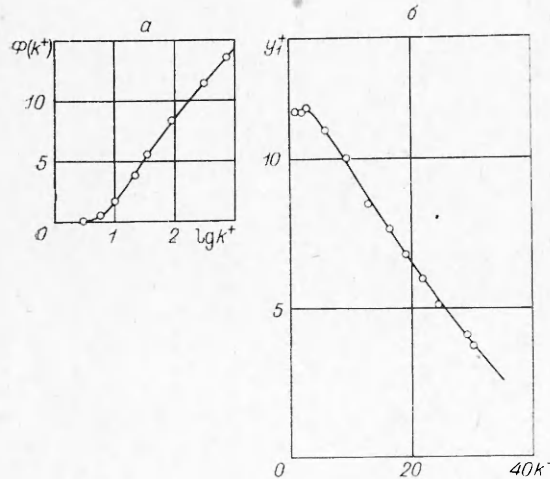
$$u_{\min}^+ = \frac{u_{\min}}{u_*} = \begin{cases} u_1^+ & \text{при } y_1 \geq k \\ u_k^+ & \text{при } k \geq y_1, \end{cases} \quad \xi_{\min} = \begin{cases} \xi_1 & \text{при } y_1 \geq k \\ \frac{k}{\delta} & \text{при } k \geq y_1. \end{cases}$$

Преобразуем (1.5) к виду, не зависящему явно от соотношения между значениями k и y_1 . С этой целью запишем профиль скоростей в ядре слоя в форме закона стенки

$$(1.6) \quad \frac{u_e^+}{\sqrt{\beta}} \left(\arcsin \frac{2\beta \bar{u} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}} - \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{c^2 + 4\beta}} \right) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C - \Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots),$$

где $C = 5,5$ — константа интегрирования; $\Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ — функция шероховатости (для гидравлически гладкого течения $\Phi = 0$); $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ —

параметры, характеризующие форму и расположение элементов шероховатости. Вид функции $\Phi(k^+)$ для случая песочной шероховатости приведен на фиг. 1, а. Влияние плотности распределения по поверхности некоторых других форм однородной шероховатости (двумерные элементы, элементы с «правильной» геометрией и т. д.) на поведение функции $\Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ было исследовано в ряде экспериментальных работ и недавно получило свое обобщение в виде единой корреляционной зависимости [3].



Ф и г. 1

Из экспериментальных результатов [4, 5], полученных при нулевом градиенте давления, следует, что как в сжимаемом адиабатическом случае, так и для течения с теплопередачей функция $\Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ сохраняет тот же самый вид, что и в несжимаемом потоке. Эксперименты [6], выполненные в несжимаемом потоке, показали, что функция шероховатости остается неизменной и при умеренном положительном градиенте давления. В таком случае разумно сделать еще допущение:

4. Вид функции шероховатости $\Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ является инвариантом относительно суммарного воздействия возмущающих факторов (сжимаемости, теплообмена, градиента давления).

Сомкнем распределение скоростей в вязком подслое (1.1) с распределением (1.6), в котором по-прежнему ограничимся только первым членом разложения \arcsin по степеням аргумента. В результате получим зависимость толщины вязкого подслоя y_1^+ от высоты шероховатости k^+

$$(1.7) \quad y_1^+ \sqrt{\frac{4\beta}{\alpha^2 + 4\beta}} - \frac{1}{\kappa} \ln y_1^+ = C - \Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots).$$

На фиг. 1, б эта зависимость представлена в явном виде для случая адиабатической поверхности, покрытой песочной шероховатостью. Так как возможность применения двухслойной модели ограничена снизу значением $y_1^+ = \frac{1}{\kappa}$, то вырождение вязкого подслоя прослежено здесь лишь до значения $k^+ \simeq 35$. Общеизвестно, однако, что режим развитой шероховатости, отвечающий полному вырождению вязкого подслоя, наступает для такого типа шероховатости при $k^+ \simeq 70$.

Видно, что соотношение (1.7) связано с выражением для числителя (1.5) и его знаменателя в случае, пока $y_1^+ \geq k^+$. Если же $k^+ \geq y_1^+$, то значение скорости $u_{\min}^+ = u_k^+$ в первом приближении можно получить, экстраполируя распределение скоростей (1.6) вплоть до $y^+ = k^+$, что приводит знаменатель в (1.5) к тому же самому виду

$$\kappa u_k^+ \sqrt{\frac{4\beta}{\alpha^2 + 4\beta}} - \ln \left(\frac{k}{\delta} \right) = \ln \delta^+ + \kappa C - \kappa \Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots).$$

Окончательно для Ψ_r имеем

$$(1.8) \quad \Psi_r = \left(\frac{\kappa C + \ln \delta_s^+}{\kappa C + \ln \delta_r^+ - \kappa \Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)} \right)_{\text{Re}\theta}^2.$$

Шероховатость поверхности, как правило, задается через величину $\text{Re}_k = \kappa u_e / \nu_e$. В таком случае параметры, входящие в (1.8), представляются в виде

$$(1.9) \quad k^+ = \text{Re}_k \frac{\mu_e}{\mu_w} \sqrt{\frac{c_{fr} \rho_w}{2 \rho_e}}, \quad \delta^+ = \frac{\text{Re}_\theta}{\theta/\delta} \sqrt{\frac{c_f \rho_w}{2 \rho_e}}.$$

Выражение для $\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_e} \bar{u} (1 - \bar{u}) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \right)^{-1} d\bar{u}$ можно получить, если воспользоваться профилем скоростей (1.4) по всей толщине пограничного слоя, а не только в его ядре (для больших значений параметра трения

u_e^+ ошибка от такого приближения незначительна)

$$(1.10) \quad \frac{\theta}{\delta} - \kappa u_e^+ \frac{\rho_w}{\rho_e} \exp \left(- \frac{\kappa u_e^+}{\sqrt{\beta}} \arcsin \frac{2\beta + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}} \right) \int_0^1 \frac{\bar{u}(1-\bar{u})}{(1-\alpha\bar{u}-\beta\bar{u}^2)^{3/2}} \times \\ \times \exp \left(\frac{\kappa u_e^+}{\sqrt{\beta}} \arcsin \frac{2\beta\bar{u} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}} \right) d\bar{u}.$$

Для вычисления интеграла, входящего в (1.10), воспользуемся тем обстоятельством, что $u_e^+ \gg 1$. В этом случае интеграл можно представить в виде знакпеременного асимптотического ряда по степеням $(\kappa u_e^+)^{-1}$, получающегося в результате интегрирования по частям. Ограничиваясь двумя первыми членами ряда, имеем для θ/δ выражение, единое для гладкой и шероховатой поверхности:

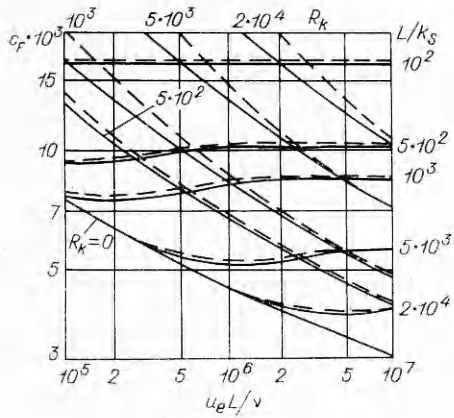
$$(1.11) \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{\sqrt{1-\alpha-\beta}}{\kappa u_e^+} - \frac{2-\frac{\alpha}{2}+\beta}{(\kappa u_e^+)^2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{c_f}{2} - \frac{c_f}{2\kappa^2} \left(2 - \frac{\alpha}{2} + \beta \right)} \frac{T_w}{T_e}.$$

Здесь и в (1.9) $c_f = c_{fs}$ для гладкой поверхности и $c_f = c_{fr} = \Psi_r c_{fs}$ — для шероховатой, причем значения Ψ_r и c_{fs} вычисляются при одном и том же значении $Re_\theta = idem$. Следует отметить, что при $c_f = c_{fmax} = 2(\kappa T_e/2T_w(2-\alpha/2+\beta))^2$ выражение (1.11) достигает своего максимума и при дальнейшем росте c_f начинает убывать, что не отвечает действительности. Поэтому в том случае, когда $c_f \geq c_{fmax}$, для отношения θ/δ следует использовать его максимальное значение $(\theta/\delta)_{max} = T_e/4T_w(2-\alpha/2+\beta)$.

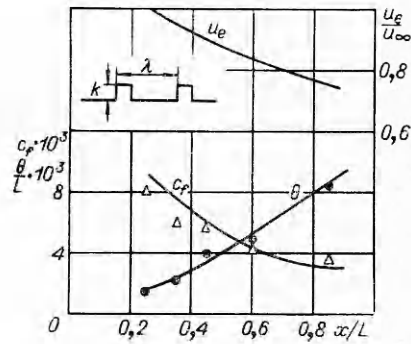
2. Расчет сопротивления трения в каждом конкретном случае связан, согласно идеям метода [2], с интегрированием уравнения импульсов. При этом для учета градиента давления, сжимаемости и неадиабатичности течения используются функции Ψ_f , Ψ_M и Ψ_t , полученные в [2], а функция влияния шероховатости Ψ_r вычисляется по (1.8) на каждом шаге интегрирования методом последовательных приближений, где в качестве нулевого принимается $\Psi_r = 1$. Итерационный процесс быстро сходится: например, при определении коэффициента трения c_{fr} с точностью до 1% время расчета одного варианта на БЭСМ-6 составляло ~ 1 с. Используя (1.8), можно получить, что условием сходимости процесса является разумное соотношение между величиной шага интегрирования и высотой бугорков шероховатости. В общем случае это условие имеет чрезмерно громоздкий вид, однако в качестве ориентировочного укажем следующее: $k_s/\Delta x < 5$, где Δx — шаг интегрирования; k_s — высота эквивалентной песочной шероховатости.

Коэффициент местного трения вычислялся, согласно выражению $c_{fr} = \Psi_r c_{fs}$, где $c_{fs} = \Psi_M \Psi_t \Psi_f c_{f0}$, причем для закона трения в «стандартных» условиях использовалась степенная аппроксимация $c_{f0} = B Re_\theta^{-m}$ (для $Re_\theta \leq 3 \cdot 10^3$ $m = 0,25$, $B = 0,0256$; $Re_\theta > 3 \cdot 10^3$ $m = 1/6$, $B = 0,0131$).

На фиг. 2—5 показано сравнение расчетов, проведенных по предлагаемому методу, с результатами измерения местного c_f и среднего c_{fr} коэффициентов трения для некоторых форм однородной шероховатости (форма показана на фиг. 3, 5). В качестве функции шероховатости в расчетах использовались функции, определенные в соответствующих экспериментах, — во всех случаях они хорошо согласуются с корреляционной формулой [3]. При этом, согласно допущению 4, для проведения рас-



Ф и г. 2

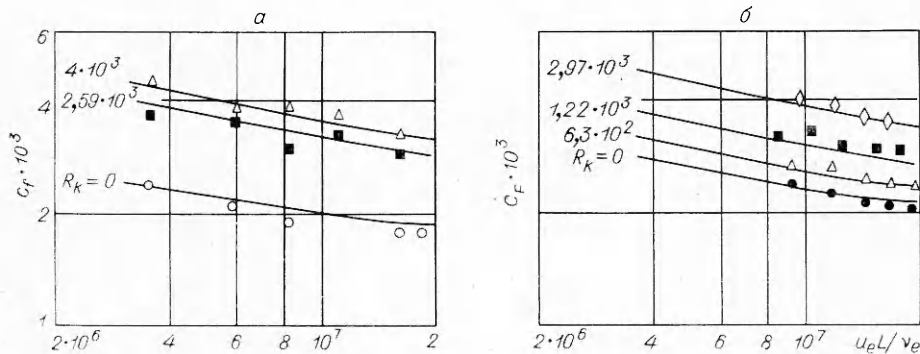


Ф и г. 3

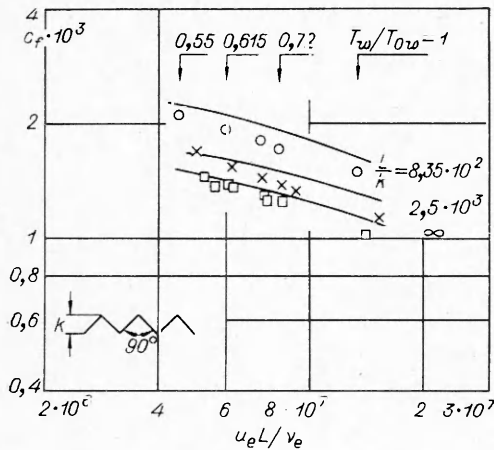
четов достаточно знать поведение функции $\Phi(k^+, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ для произвольных внешних условий.

На фиг. 2 приведены результаты расчета среднего коэффициента трения пластины с песочной шероховатостью в несжимаемом потоке (сплошные линии). Штриховыми линиями нанесены зависимости, полученные Прандтлем и Шлихтингом [7] путем пересчета на случай пластины результатов Никурадзе по измерению сопротивления труб с песочной шероховатостью. Для семейства кривых с параметром L/k совпадение результатов находится в пределах точности расчета. Относительно расхождения в поведении кривых с параметром $Re_k = ku_e/\nu$ следует отметить, что семейства с параметрами L/k и Re_k , приведенные в [7], не коррелируют между собой в области отличия сравниваемых методов. Действительно, в точке пересечения двух кривых с параметрами $(L/k)_i$ и $Re_{k,j} = (ku_e/\nu)_j$ должно выполняться равенство $(L/k)_i Re_{k,j} = Re_{i,j}$, где $Re_{i,j} = (u_e L/\nu)_{i,j}$ — число Рейнольдса, при котором имеет место данное пересечение. Видно, что это условие для штриховых линий не соблюдается. Что касается поведения кривых для местного коэффициента трения (график не приводится), то здесь наблюдается полное согласование с расчетами Прандтля и Шлихтинга, причем оба семейства в [7] на этот раз коррелируют между собой.

На фиг. 3 приведено сравнение с экспериментальными данными [6]. полученными в несжимаемом потоке с градиентом давления (скорость



Ф и г. 4



Фиг. 5

обмен сравниваются на фиг. 5 с экспериментальными данными [5]. Шероховатость представляет собой V-образные желобки с углом при вершине 90° , ориентированные перпендикулярно потоку. Теплообмен обеспечивался путем изменения температуры потока (температура пластины поддерживалась равной $T_w = 305\text{K}$), поэтому фактор теплообмена однозачно связан с числом Рейнольдса ($T_w/T_{aw} = 0,55 - 1$).

Во всех приведенных выше случаях отклонение расчетных значений коэффициентов трения от экспериментальных находится в пределах точности опытов (не превышает 10%). Следует отметить, что нельзя заранее оценить точность метода для не проверенных экспериментально условий течения.

Автор выражает благодарность Е. Г. Зауличному за внимание к работе и полезные обсуждения, В. Я. Иванову за помощь при проведении расчетов и ценные замечания.

Поступила 5 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Мотулевич В. П. Метод относительного соответствия и его применение в задачах тепло- и массообмена. — ИФЖ, 1968, т. 14, № 1.
2. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
3. Simpson R. L. A generalized correlation of roughness density effects on the turbulent boundary layer — «AIAA J.», 1973, vol. 11, N 2. Рус. пер. Обобщенная корреляция для оценки влияния плотности шероховатости на параметры турбулентного пограничного слоя. — «Ракетн. техника и космонавтика», 1973, т. 11, № 2.
4. Fenter F. W. Analysis and direct measurement of the skin friction of uniformly rough surfaces at supersonic speeds. — Inst. of the Aeronaut. Sci., 1958, preprint N 837.
5. Young F. L. Experimental investigation of the effects of surface roughness on compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer. The University of Texas, 1965, AD 621085.
6. Perry A. E., Joubert P. N. Rough-wall boundary layers in adverse pressure gradients. — «J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, pt 2.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.