ПМТФ, № 6, 1972

УДК 518.5 : 536.252

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ДВОЙНОГО ПЕРИОДА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. С. Маркман, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Исследуется возникновение вторичных конвективных течений в задаче Рэлея (в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами) при наличии изменяющегося со временем с периодом T параметра: градиента температуры или напряженности поля силы тяжести.

Зависимость критического числа Рэлея от частоты модуляции параметра для T-периодических решений исследована в [1].

Рассмотрены решения с удвоенным периодом и половинной частотой (так называемые полуцелые решения). С помощью алгоритма цепных дробей [2,3] найдены критические числа Рэлея при различных значениях частоты модуляции. Оказалось, что в значительном диапазоне частот именно решения с периодом $2T$ ответственны за появление неустойчивости, так как им соответствуют меньшие критические значения числа Рэлея, чем T-периодическим.

С помощью метода Ляпунова — Шмидта установлено, что при значениях числа Рэлея, больших критического (но близких к нему), возникает одно (с точностью до сдвига вдоль горизонтали) вторичное $2T$-периодическое течение, которое устойчиво относительно возмущений одинаковой с ним периодичности и четности.

1. Рассмотрим плоский горизонтальный слой несжимаемой вязкой жидкости в периодически изменяющемся со временем поле силы тяжести. Градиент температуры постоянен, массовая сила вертикальна и изменяется со временем по закону

$$f = g\,(1 + \eta \sin \Omega t), \qquad g,\ \eta = \text{const} \tag{1.1}$$

Уравнения нестационарной конвекции при этих условиях допускают решение, соответствующее относительному равновесию жидкости в системе координат, совершающей вертикальные колебания с ускорением (1.1); распределение температуры при этом стационарно по времени и линейно по z.

Безразмерные уравнения малых возмущений равновесия в указанной системе координат имеют вид

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \Delta\Delta\psi = R\,(1 + \eta \sin \omega t)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x}\right)$$

$$\sqrt{p}\,\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = R\,\frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

$$p = \frac{\nu}{\chi}, \quad R^2 = \text{Ra} = \frac{g\beta a h^4}{\nu\chi}, \quad \omega = \frac{\Omega h^2}{\sqrt{\nu\chi}}$$

Здесь ψ — функция тока, θ — температура, p и Ra — числа Прандтля и Рэлея соответственно, ω — безразмерная частота модуляции.

Линеаризовав систему уравнений (1.2) в окрестности равновесного решения, получим

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\Delta\Delta\psi=R\,(1+\eta\sin\omega t)\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{1.3}$$

$$\sqrt{p}\,\frac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta=R\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Решение системы (1.3) ищем в виде

$$\psi=\psi(t)\,e^{i(\alpha x+\pi z)},\qquad \theta=\theta(t)\,e^{i(\alpha x+\pi z)} \tag{1.4}$$

В результате приходим к одному уравнению относительно θ [1]

$$\theta''+k^2q\theta'+\left[k^4-\frac{\alpha^2}{k^2}\,\mathrm{Ra}\,(1+\eta\sin\omega t)\right]\theta=0 \tag{1.5}$$

$$q=(1+p)\,p^{-1/2},\qquad k^2=\alpha^2+\pi^2,\ \theta'=d\theta/dt$$

решение которого ищем в виде ряда

$$\theta=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\,(in\omega t/2) \tag{1.6}$$

Из (1.5) видно, что коэффициенты c_n удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_nc_n+c_{n-2}-c_{n+2}=0\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

$$a_n=\frac{2k^4qn\omega}{\alpha^2\eta\,\mathrm{Ra}}-i\,\frac{2k^4}{\alpha^2\eta\,\mathrm{Ra}}\left(k^4-\frac{\alpha^2\,\mathrm{Ra}}{k^2}-n^2\omega^2\right) \tag{1.7}$$

Разыскиваем такие решения системы (1.7), что $|c_n|\to0$ при $|n|\to\infty$. Система (1.7) распадается на две независимые системы уравнений соответственно для коэффициентов c_n с четными и нечетными номерами. Система для коэффициентов с четными номерами соответствует ранее рассмотренным T-периодическим решениям [1].

Заметим, что в случае малых амплитуд ($\eta\leqslant1$) уравнение (1.5) имеет только T-периодические решения [5]. Это утверждение является аналогом так называемого «принципа смены устойчивости» для стационарных задач.

Коэффициенты Фурье для $2T$-периодического собственного решения (не являющегося T-периодическим) находим из системы

$$a_{2n+1}c_{2n+1}+c_{2n-1}-c_{2n+3}=0\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{1.8}$$

С помощью замены

$$c_{2n+1}=d_n \tag{1.9}$$

система приводится к виду

$$a_{2n+1}+\rho_n^{-1}=\rho_{n+1},\qquad \rho_n=d_n/d_{n-1} \tag{1.10}$$

Отсюда выводим два представления для ρ_n

$$\rho_n=-\cfrac{1}{a_{2n+1}+\cfrac{1}{a_{2n+3}+\ldots}},\qquad \rho_n=a_{2n-1}+\cfrac{1}{a_{2n-3}+\cfrac{1}{a_{2n-5}\ldots}} \tag{1.11}$$

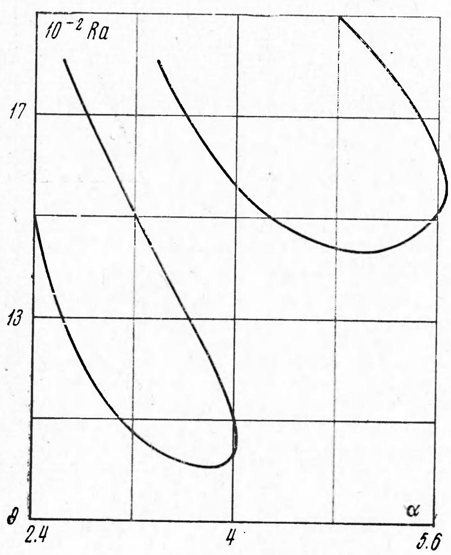
[1] Это же уравнение получается при исследовании конвекции в постоянном гравитационном поле, если градиент температуры $\nabla\theta_0=a\,(1+\eta\sin\,\omega t)$ [4].

Условие совпадения этих двух выражений для ρ_n приводит к трансцендентному уравнению для определения Ra

$$a_{-1}+\cfrac{1}{a_{-3}+\cfrac{1}{a_{-5}}+\cfrac{1}{a_{-7}}+\dots}+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_3}+\cfrac{1}{a_5}+\dots}=0 \qquad (1.12)$$

Расчеты зависимости числа Рэлея Ra от волнового числа α и частоты модуляции ω проводились на ЭВМ «ODRA-1204».

На фиг. 1 представлена нейтральная кривая на плоскости Ra, α. (Остальные параметры имеют следующие значения: $\omega = 5$, $\eta = 10$, $p = 1$.) Зона неустойчивости находится выше нейтральной кривой.



Фиг. 1

Наиболее опасным является возмущение с волновым числом α_*, которому соответствует минимальное значение Ra_* на нейтральной кривой. С ростом частоты ω критическое волновое число α_* также растет.

Заметим, что в отличие от случая T-периодических решений минимальное значение Ra_* достигается при всех ω на первом языке.

С ростом ω возрастает и критическое значение числа Рэлея. На фиг. 2*а*, 2*б* представлены графики зависимости Ra_* и α_* от ω при фиксированных значениях $\eta = 10$ и $p = 1$.

Сравнение этих графиков с соответствующими результатами работы [1] показывает, что в значительном диапазоне частот $2T$-периодическим решениям отвечают меньшие числа Рэлея и лишь при очень малых или очень больших частотах первыми возникают T-периодические решения.

2. Для исследования $2T$-периодических течений, появляющихся после потери устойчивости относительного равновесия, воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта [6]. При этом будем предполагать, что критическое значение числа Рэлея Ra_* простое. Заметим, что простота Ra_* далее подтверждается расчетом. При этом единственность собственного решения (1.6) следует из однозначной разрешимости (1.7), отсутствие присоединенных векторов доказывается численной проверкой условия леммы 1.5 из [3].

Систему уравнений (1.2) запишем в виде операторного уравнения в пространстве пар функций $w = (\psi, \theta)$, периодических по времени с периодом $2T$

$$Aw = RB(t)w + L(w, w)$$

$$Aw = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{p}}\dfrac{\partial\Delta}{\partial t} - \Delta\Delta & 0 \\ 0 & \sqrt{p}\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi \\ 0\end{pmatrix}, \quad Bw = \begin{pmatrix} 0 & \Phi\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi \\ \theta\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

$$L(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\Delta\psi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\Delta\psi_2}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}\dfrac{\partial\theta_2}{\partial z}\end{pmatrix}, \qquad \Phi = 1 + \eta\sin\omega t$$

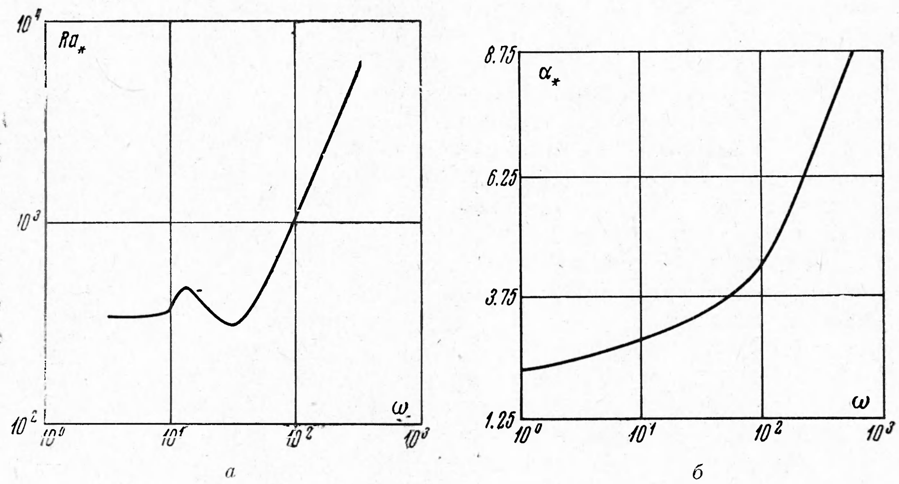
Через $\varphi = (\psi_0, \theta_0)$ обозначим решение линеаризованной задачи (1.3)

$$Aw = RB(t)w \tag{2.2}$$

отвечающее критическому значению параметра $R_* = \mathrm{Ra}_*^{1/2}$.

Применяя обычную схему Ляпунова — Шмидта, можно вывести, что если постоянная γ вещественна и отлична от нуля, то существует одно с точностью до сдвига по x [7] нетривиальное решение задачи (1.3)

$$w = \gamma\varepsilon\varphi + \gamma^2\varepsilon^2 w_1 + O(\varepsilon^3), \qquad \varepsilon = \sqrt{R - R_*} \tag{2.3}$$



Фиг. 2 *а,б*

Постоянная γ определяется по формуле

$$\gamma^2 = \left[R_* \int_0^{2T} (L^\circ(\varphi, w_1), w_*)_E \, dt\right]^{-1} \tag{2.4}$$

Здесь w_1 — решение неоднородной задачи

$$Aw - R_* B(t)\, w = L(\varphi, \varphi) \tag{2.5}$$

w_* — собственный вектор сопряженного уравнения

$$Aw - R_* B^*(t)\, w = 0, \qquad R^* \int_0^{2T} (B\varphi, w_*)_E \, dt = 1 \tag{2.6}$$

Оператор L° и скалярное произведение в (2.4) определены так:

$$L^\circ(u_1, u_2) = L(u_1, u_2) + L(u_2, u_1) \tag{2.7}$$

$$(u_1, u_2)_E = ((\psi_1, \theta_1), (\psi_2, \theta_2))_E = (\psi_1, \psi_2)_{L_2} + (\theta_1, \theta_2)_{L_2}$$

Исследуя уравнение в вариациях

$$Au - R_* Bu - \varepsilon\gamma L^\circ(\varphi, u) + \varepsilon^2\gamma^2 L^\circ(w_1, u) + \ldots = -\sigma u \tag{2.8}$$

как и в [8], можно показать, что решение (2.3) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, в левой или в правой полуплоскости окажется собственное число σ_ε уравнения (2.8), возникающее из $\sigma = 0$.

Нетрудно вывести, что

$$\sigma_\varepsilon = \zeta (R - R_*)\,\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \zeta = \left[R_* \int_0^{2T} (\varphi, w_*)_E\, dt\right]^{-1} \tag{2.9}$$

Итак, течение (2.3) устойчиво по линейному приближению, если $\zeta(R - R_*) > 0$, и неустойчиво в противном случае. Из результатов работы [9] следует, что имеет место и нелинейная устойчивость (в классе возмущений той же периодичности по x).

Вычисление постоянной γ приводилось следующим образом. Решение системы (1.3) ищем в виде

$$\psi = \psi_0(t) \sin \alpha x \sin \pi z, \qquad \theta = \theta_0(t) \cos \alpha x \sin \pi z \tag{2.10}$$

Амплитуду $\theta_0(t)$ находим из уравнения (1.5) с помощью ряда (1.6). Коэффициенты c_{2n+1} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) находятся по формулам

$$c_1 = 1, \quad c_{2n+1} = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n \quad (n > 0), \quad c_{-2n-1} = \bar{c}_{2n+1}$$

(черта — знак комплексного сопряжения).

Амплитуду $\psi_0(t)$ функции тока находим теперь из второго уравнения системы (1.3). Решения сопряженной системы находятся аналогично.

Неоднородная система (2.5) в данном случае такова:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi_1 - \Delta\Delta\psi_1 = R_* (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \tag{2.11}$$

$$\sqrt{p} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \Delta\theta_1 = R_* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\pi\alpha}{2} \psi_0(t)\, \theta_0(t) \sin 2\pi z$$

Решение системы (2.11) ищем в виде

$$w_1 = \varphi_1(t) \sin 2\pi z \tag{2.12}$$

Периодическую с периодом $2T$ вектор-функцию $\varphi_1(t) = (\psi_1(t), \theta_1(t))$ находим из уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \psi_1' + 4\pi^2 \psi_1 = 0, \quad \sqrt{p}\, \theta_1' + 4\pi^2 \theta_1 = -\frac{\pi\alpha}{2} \psi_0 \theta_0 \tag{2.13}$$

При этом $\psi_1 = 0$, а θ_1 легко находится по известным $\psi_0(t)$ и $\theta_0(t)$.

Вычисления показали, что $\zeta > 0$ и $\gamma^2 > 0$ при всех значениях ω.

Таким образом, при малых $\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_* > 0$ существует одно с точностью до сдвига по x устойчивое вторичное течение, $2T$-периодическое по времени.

Заметим, что в случае T-периодических решений в широком диапазоне частот ω возникают неустойчивые докритические режимы. Вычисления показали (см. фиг. 2*а*), что в этом диапазоне частот $2T$-периодическим режимам соответствуют меньшие критические значения числа Рэлея, при переходе через которые возникают устойчивые $2T$-периодические вторичные течения.

Поступила 26 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркман Г. С., Юдович В. И. Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
2. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.

3. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
5. Маркман Г. С. О неустойчивости равновесия жидкости, находящейся под действием вибрационных сил и периодического по времени градиента температуры. В сб. «Математический анализ и его приложения», т. 2, Изд. Ростовск. ун-та, 1970.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. Я. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Усп. матем. н., 1962, т. 17, вып. 2.
7. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, т. 74, вып. 4.
8. Юдович В. И. Устойчивость конвекционных потоков. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
9. Юдович В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 2.