ПМТФ, № 1, 1970

О ЗАТУХАНИИ ДРЕЙФОВЫХ ВОЛН

Р. К. Мазитов

(Новосибирск)

Изучается поглощение монохроматической волны, распространяющейся в неоднородной плазме под углом к магнитному полю. Нелинейные уравнения резонансных частиц решаются в дрейфовом приближении. Вычислен нелинейный декремент затухания.

Рассмотрим затухание дрейфовой волны, распространяющейся в плазме с градиентами плотности и температуры, направленными в одну и ту же сторону ($d\ln T / d\ln n > 0$). Будем считать температуру ионов равной нулю. Ограничимся случаем квазинейтральных потенциальных колебаний

$$\omega / k_z \ll v_{Te} < c_A, c_A = (H_0^2 / 4\pi n_0 m)^{1/2} \tag{1}$$

Здесь c_A — альфвеновская скорость, k_z — проекция волнового вектора на направление постоянного магнитного поля.

Нелинейный декремент затухания γ определим как отношение работы A, совершенный электрическим полем волны за единицу времени над резонансными частицами в области локализации, к энергии волны. Как и в работах [1–3], нелинейные уравнения движения резонансных частиц будем решать в предположении, что амплитуда волны не зависит от времени. Энергию волны W будем считать равной энергии волны в начальный момент времени W_0

$$\gamma = \frac{A(E_0)}{2W_0} \qquad (W_0 = W(E_0)) \tag{2}$$

Для частот, близких к дрейфовым

$$W_0 = \int \frac{1}{4} \frac{e^2\varphi_0^2(x)}{kT(x)} n_0(x)\, dx$$

Здесь $\varphi_0(x)$ — амплитуда потенциала в начальный момент времени. В квазиклассическом приближении $\varphi_0(x)$ имеет следующий вид [4]:

$$\varphi_0(x) = CQ^{-1/2}\exp\left(i\int k_x dx\right), \qquad k_x = k_x' + ik_x'' = \sqrt{Q(x,\omega)}$$

$$Q(x,\omega) = -k_y^2 + \frac{k_z^2\omega_{Hi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Hi}M}{v_{Te}^2 m} - \frac{k_y\omega_{Hi}}{\omega}\frac{d\ln n_0}{dx} + \tag{3}$$

$$+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{M\omega_{Hi}^2}{mk_z v_{Te}^3}\left(-\omega + \frac{k_y^2 v_{Te}^2}{\omega_{He}}\frac{d}{dx}\ln\frac{n_0(x)}{\sqrt{T(x)}}\right)$$

Для определения работы, совершенной полем волны над резонансными частицами, требуется решить уравнения движения частиц. Эти уравнения запишем в системе координат, движущейся вдоль оси (направление постоянного магнитного поля) со скоростью ω / k_z

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m}\frac{d\varphi_0(x)}{dx}\cos(k_y y + k_z z') - \omega_{He} v_y \qquad \left(z' = z - \frac{\omega}{k_z}t\right)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m}\varphi_0(x) k_y \sin(k_y y + k_z z') + \omega_{He} v_x \tag{4}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{e}{m}\varphi_0(x) k_z \sin(k_y y + k_z z'), \qquad u = \frac{dz'}{dt} = v_z - \frac{\omega}{k_z}$$

Ограничимся дрейфовым приближением (пренебрежем инерцией частиц при движении поперек магнитного поля). Тогда вместо (4) получим более простую систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ck_y}{H_0}\varphi_0 \sin(k_y y + k_z z'), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c}{H_0}\frac{d\varphi_0}{dx}\cos(k_y y + k_z z')$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{e}{m}\varphi_0 k_z \sin(k_y y + k_z z'), \quad \frac{dz'}{dt} = u \tag{5}$$

Система (5) имеет два интеграла. Умножив третье уравнение на $(k_y / k_z\omega_{He})$ и вычтя его из первого, получим первый интеграл

$$x + \frac{uk_y}{\omega_{He}k_z} = q \tag{6}$$

Введем новую переменную

$$\psi = k_y y + k_z z'$$

Тогда

$$\frac{d\psi}{dt} = k_z u + \frac{ck_y}{H_0}\frac{d\varphi_0}{dx}\cos\psi \tag{7}$$

Используя третье уравнение (5) и (7), найдем второй интеграл системы

$${}^1/_2\, mu^2 - e\varphi_0(x)\cos\psi = E' = \mathrm{const} \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует, что смещение резонансных частиц ($u \sim \sqrt{2e\varphi_0 / m}$) по оси x будет порядка

$$\Delta x \sim (k_y/k_z\omega_{He})\sqrt{2e\varphi_0/m}$$

Если предположить

$$(k_x' k_y/k_z\omega_{He})\sqrt{(2e\varphi_0/m)} \ll 1 \tag{9}$$

то уравнения (6) — (8) можно свести к квадратурам.

Разложив $\varphi_0(x)$, $d\varphi_0 / dx$ в ряд по степеням $\Delta x = (uk_y / \omega_{He}k_z)$ и ограничившись в (6) — (8) членами первого порядка, получим

$$\frac{m}{2k_z^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - e\varphi_0(q)\cos\psi = E' \tag{10}$$

Уравнение такого типа имело место и в задаче о затухании плазменных колебаний [1,2].

Как и в [2], с помощью новой переменной $\xi = {}^1/_2\,\psi$ приведем уравнение (10) к виду, более удобному для интегрирования

$$\xi^{\cdot 2} = \gamma^{-2}\tau^{-2}(1 - \chi^2\sin^2\xi) \tag{11}$$

Здесь

$$\chi^2 = \frac{2e\varphi_0(q)}{E' + e\varphi_0(q)}, \qquad \tau = \left(\frac{m}{e\varphi_0}\right)^{1/2} k_z^{-1}$$

В случае $\chi^2 < 1$ решение можно записать сразу

$$F(\chi, \xi_0) = F(\chi, \xi) - (t / \chi\tau) \tag{12}$$

Для $\chi^2 > 1$ решение также записывается с помощью эллиптических интегралов, если использовать вместо ξ новую переменную ζ (13)

$$\chi\sin\xi = \sin\zeta, \quad \zeta^{\cdot 2} = \tau^{-2}(1 - \chi^2\sin^2\zeta), \; F(\chi^{-1}, \zeta_0) = F(\chi^{-1}, \zeta) - t/\tau$$

Работа, совершенная электрическим полем над резонансными частицами в единицу времени, или изменение кинетической энергии резонансных частиц за единицу времени, равна [1]

$$A(E_0) = \frac{dT}{dt} = \int dx \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \frac{m}{2}\left(u + \frac{\omega}{k_z}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial t} \tag{14}$$

[1] Ниже при вычислении декремента используется метод, разработанный в [2].

Функцию распределения в любой момент времени запишем в виде

$$f(x, \psi, u, t) = f_0\,[x_0(x, \psi, u, t), \psi_0(x, \psi, u, t), u_0(x, \psi, u, t), 0]$$

$$f_0 = n_0(x_0)\left[\frac{m}{2\pi kT(x_0)}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{m}{2kT(x_0)}\left(u+\frac{\omega}{k_z}\right)^2\right] \qquad (15)$$

Здесь x_0, ψ_0, u_0 — координаты и скорость при $t = 0$.
Используя уравнения движения, найдем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{e}{m}\varphi_0(x_0)k_z\sin\psi_0\left[\frac{\partial f_0}{\partial u_0} + \frac{k_y}{\omega_{He}k_z}\frac{\partial f}{\partial x_0}\right] \qquad (16)$$

$$\psi_0 = k_y y_0 + k_z z_0$$

Дифференцируя (16) по u_0 и x_0 и учитывая, что $u_0 \sim \sqrt{2e\varphi_0/m}$ в резонансной области, получаем следующее выражение для нелинейного декремента затухания:

$$\gamma = \frac{1}{2W_0}\int dq\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u+\frac{\omega}{k_z}\right)^2 f_0\left(x_0, \frac{\omega}{k_z}\right)\frac{e\varphi(x_0)}{2}S\sin\psi_0$$

$$S = \frac{m\omega}{kT(x_0)k_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}k_z n_0(x_0)}\frac{dn_0}{dx}\left[1-\frac{1}{2}\frac{d\ln T(x_0)}{d\ln n_0(x_0)}\right] \qquad (17)$$

$$\varphi(x_0) = \varphi(q) - \frac{2k_y}{\omega_{He}\chi\tau k_z}\left[1-\chi^2\mathrm{cn}^2\left(F(\chi, \xi) - \frac{t}{\chi\tau}, \chi\right)\right]^{1/2}\frac{d\varphi_0}{dq}$$

$$\sin\psi_0 = 2\sin\,[F(\chi, \xi) - t/\chi\tau, \chi]\ \mathrm{cn}\,[F(\chi, \xi) - t/\chi\tau, \chi] \quad (\chi^2 < 1)$$

$$\varphi(x_0) = \varphi_0(q) - \frac{2k_y}{\omega_{He}\chi\tau k_z}\mathrm{cn}\left[F(\chi^{-1}, \zeta) - \frac{t}{\tau}, \chi^{-1}\right]\frac{d\varphi_0}{dq}$$

$$\sin\psi_0 = 2\chi^{-1}\ \mathrm{sn}\,[F(\chi^{-1}, \zeta) - t/\tau, \chi^{-1}]\ \mathrm{dn}\,[F(\chi^{-1}, \zeta) - t/\tau, \chi^{-1}] \quad (\chi^2 > 1)$$

Если пренебречь смещением частиц Δx по сравнению с $(k_x')^{-1}$ и значения плотности и температуры взять в средней точке локализации $x = 0$, то (17) удается привести к очень простому виду

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}\omega^{*2}\eta(0)}{2k_z v_{Te}(0)}P(t), \quad \omega^* = \frac{kT(0)}{M\omega_{Hi}}\frac{1}{n_0(0)}\frac{dn_0(0)}{dx}, \quad \eta(0) = \frac{d\ln T(0)}{d\ln n_0(0)} \qquad (18)$$

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{64}{\pi}\int_0^1 d\chi\left\{\frac{2n\pi^2\sin(\pi nt/\chi\tau F)}{\chi^5k^2(1+q^{2n})(1+q^{-2n})} + \frac{(2n+1)\pi^2\chi\sin[(2n+1)\pi t/2\chi\tau F]}{k^2(1+q^{2n+1})(1+q^{-(2n+1)})}\right\},$$

$$q = \exp\frac{\pi k'}{k}, \quad k = F(\chi, {}^1/{}_2\pi) \qquad (19)$$

В [2] было показано, что $p(t) \to 1$ при $t \to 0$.

Используя формулы (17), можно получить выражение для декремента более точное, чем (18); при этом достаточно учесть члены порядка $k_x'\Delta x$.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за внимание к работе.

Поступила 31 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазитов Р. К. О затухании плазменных волн. ПМТФ, 1965, № 1.
2. O' Neil T. Collisinless damping of nonlinear plasma oscilations. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 12.
3. Ерохин Н. С., Мазитов Р. К. К нелинейной теории затухания электромагнитных волн в плазме. ПМТФ, 1968, № 5.
4. Силин В. П. Колебания слабонеоднородной плазмы. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 4.