

О ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ
КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

С. И. Мешков, Т. Д. Шермергор

(Воронеж)

Сделан расчет температурной зависимости частоты колебаний и логарифмического декремента для крутильного маятника, сдвиговые напряжения в котором описываются двумя временами релаксаций. В качестве численного примера взят поликристаллический алюминий. Показано, что внутреннее трение такого маятника почти не отличается от внутреннего трения, рассчитанного по соответствующей четырехэлементной реологической модели (последовательное включение моделей Максвелла и Фойгта).

Температурная зависимость внутреннего трения, за меру которого примем тангенс угла сдвига фаз $\operatorname{tg} \delta$ между напряжением и деформацией, представляет собой ряд релаксационных пиков и фон, под которым понимается резкое возрастание внутреннего трения при температурах, близких к точке плавления.

Обычно для феноменологического описания температурной или частотной зависимости внутреннего трения используются реологические модели. В частности, фон описывается максвелловской реологической моделью, а релаксационный пик — моделью стандартного линейного тела; в этих случаях соответственно получаем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega \tau}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega \tau}{g + (1 + g) \omega^2 \tau^2} \quad \left(g \equiv \frac{M^\circ}{M^\infty - M^\circ} \right) \quad (1)$$

Здесь M° и M^∞ представляют собой релаксированный и нерелаксированный модули упругости соответственно.

Релаксационный пик и фон можно описать последовательным включением максвелловской модели с моделью Фойгта [1], что дает следующую связь между напряжением σ и деформацией ϵ :

$$a_0 \sigma + a_1 \dot{\sigma} + a_2 \ddot{\sigma} = b_1 \dot{\epsilon} + b_2 \ddot{\epsilon} \quad (2)$$

Здесь a_i и b_i — константы, а точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнение (2) эквивалентно следующему выражению для напряжения:

$$\sigma = M_1 \int_{-\infty}^t \dot{\epsilon}(t') \exp \frac{t'-t}{\tau_1} dt' + M_2 \int_{-\infty}^t \dot{\epsilon}(t') \exp \frac{t'-t}{\tau_2} dt' \quad (3)$$

Такая модель использовалась, например, Глоузом и Ли [2] для расчета возмущения, распространяющегося в стержне, один конец которого перемещается с постоянной скоростью.

Если рассматривать зернограничный пик в металлах и следующий за ним фон, то для большинства металлов при комнатной температуре рабочая область частот обеспечивает условие $\omega \tau_j \gg 1$. Поэтому при комнатной температуре выражение (3) дает закон Гука $\sigma = (M_1 + M_2) \epsilon$.

Для периодических деформаций $\epsilon = \epsilon_0 \exp i \omega t$ из выражения (3) найдем

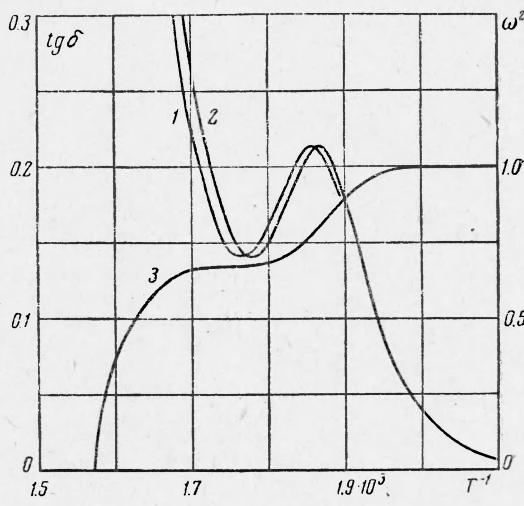
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{Im} M}{\operatorname{Re} M} = \frac{1}{\omega} \frac{M_1 \tau_1 (1 + \omega^2 \tau_2^2) + M_2 \tau_2 (1 + \omega^2 \tau_1^2)}{M_1 \tau_1^2 (1 + \omega^2 \tau_2^2) + M_2 \tau_2^2 (1 + \omega^2 \tau_1^2)} \quad (4)$$

Выражение (4) обеспечивает пик и фон внутреннего трения. Для иллюстрации этого на фиг. 1 приведена температурная зависимость внутреннего трения по формуле (4) при $\omega = 1$, $\tau_1 = 100 \tau_2$, а для величины $M_1 / (M_1 + M_2)$ и τ_2 использовались экспериментальные данные для поликристаллического алюминия [3, 4]

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = 0.67, \quad \tau_2 = 9.2 \cdot 10^{-15} \exp \frac{17250}{T}$$

Таким образом, система, характеризуемая двумя временами релаксаций, должна давать пик и фон внутреннего трения. Нетрудно видеть, что реологическая модель, характеризуемая N временами релаксаций с равновесным напряжением, равным нулю (отсутствие слагаемого $b_0 \epsilon$ в (2) или $M_0 \epsilon$ в (3)), приводит к $N - 1$ пику и фону внутреннего трения.

Фиг. 1. Температурная зависимость внутреннего трения $\text{tg } \delta$ и квадрата частоты ω^2 : 1 — $\text{tg } \delta$ четырехэлементной реологической модели, 2 — то же после корректировки на изменяющуюся частоту, 3 — квадрат частоты для крутильного маятника, среда которого описывается двумя временами релаксаций



Приближенное решение соответствующей трехмерной задачи приводит к выводу о наличии лишь $N - 2$ пиков [6], что не согласуется с линейной реологией. Так как этот вывод может быть следствием не только трехмерности задачи, но и приближенности решения, представляет интерес точный расчет простейшей трехмерной задачи, обеспечивающей пик и фон. В качестве такой среды была выбрана среда, одномерная модель которой описывается двумя временами релаксаций. Как будет показано ниже, трехмерный случай приводит качественно к тем же результатам, что и соответствующая одномерная реологическая модель.

Необходимость трехмерного рассмотрения определяется не только тем, что реальная среда трехмерна, но также и тем, что реологические модели не дают возможности найти температурный ход квадрата частоты, по которому оценивается температурная зависимость модуля сдвига. Отсюда же следует, что реологическая модель не может дать правильного температурного хода декремента затухания: последний зависит от частоты; кроме того, реологическая модель не позволяет оценить область перехода колебаний в аperiodический процесс.

В данной работе не ставилась задача дать точное количественное описание зернограничного пика, так как для этого требуется вводить спектр времен релаксаций. Целью настоящей работы было сопоставление результатов точного решения трехмерной задачи с расчетом соответствующей реологической модели.

Рассмотрим колебания крутильного маятника — однородного изотропного цилиндрического стержня, верхний конец которого жестко закреплен, а на нижний конец, имеющий инерционную подвеску, действует мгновенная скручивающая пара сил. Пусть в одномерном случае материал стержня описывается уравнением (3). Обобщение выражения (3) на трехмерный случай дает следующую связь между тензором напряжений σ_{ik} и тензором деформаций ϵ_{ik} :

$$\sigma_{ik} = K_0 \epsilon_{ik} \delta_{ik} + \sum_{j=1}^2 K_j \delta_{ik} \int_{-\infty}^t \dot{\epsilon}_{ll}(t') \exp \frac{t'-t}{\tau_j} dt' + \quad (5)$$

$$+ \sum_{j=1}^2 2\mu_j \int_{-\infty}^t \left[\dot{\epsilon}_{ik}(t') - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{ll}(t') \delta_{ik} \right] \exp \frac{t'-t}{\tau_j} dt' \left(\sum_{j=0}^2 K_j = K, \sum_{j=1}^2 \mu_j = \mu \right)$$

Здесь K и μ — модули всестороннего сжатия и сдвига соответственно при частоте $\omega \rightarrow \infty$.

Предполагая амплитуду колебаний малой, будем пренебрегать искажением поперечных сечений стержня при закручивании. Для вывода уравнения крутильных колебаний рассматриваемого маятника выберем цилиндрическую систему координат. Единственные отличные от нуля компоненты вектора смещения u_i , тензора деформаций ϵ_{ik} и тензора напряжений σ_{ik} будут равны

$$u_\theta = r\varphi, \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta z} = \sum_{j=1}^2 \mu_j r \int_{-\infty}^t \frac{\partial \dot{\varphi}(t')}{\partial z} \exp \frac{t'-t}{\tau_j} dt' \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнения движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (8)$$

получим уравнение колебаний крутильного маятника

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^2 \mu_j \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_{-\infty}^t \dot{\varphi}(t') \exp \frac{t'-t}{\tau_j} dt' \quad (9)$$

где ρ — плотность стержня. Уравнение (9) будем решать при следующих граничных и начальных условиях:

$$\sigma_{\theta z} |_{z=0} = 0 \quad (10)$$

$$\iint r \sigma_{\theta z} dS + I \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=l} = M \delta(t) \quad (11)$$

Здесь $\delta(t)$ — функция Дирака, а интеграл берется по площади нижнего сечения цилиндрического стержня.

Для решения уравнения (9) с условиями (10) и (11) используем интегральное преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (12)$$

Тогда уравнение (9) в пространстве изображений будет иметь вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \lambda^2 \Phi, \quad \lambda^2 \equiv p^2 \rho \left(\sum_{j=1}^2 \mu_j \frac{p\tau_j}{1 + p\tau_j} \right)^{-1} \quad (13)$$

Условия (10) и (11) после подстановки в них явного выражения (7) для $\sigma_{\theta z}$, интегрирования и перехода к пространству изображений будут иметь вид

$$\Phi(p) |_{z=0} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\pi R^4}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sum_{j=1}^2 \frac{\mu_j p \tau_j}{1 + p \tau_j} + I p^2 \Phi = M \quad (15)$$

Решая уравнение (13) с условиями (14) и (15), получим

$$\Phi(p) = \frac{M}{I} \frac{\lambda l}{p^2} \frac{\text{sh } \lambda z}{\lambda l \text{ sh } \lambda l + a \text{ ch } \lambda l} \quad \left(a \equiv \frac{\pi R^4 \rho l}{2I} \right) \quad (16)$$

Для того чтобы перейти в решении (16) от изображения к оригиналу, разложим мероморфную функцию $\Phi(p)$ в ряд по теореме Коши

$$\Phi(p) = \frac{2M}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n z/l)}{b_n \cos b_n + (1+a) \sin b_n} \Phi_n(p) \quad \left(\Phi_n(p) = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} \right) \quad (17)$$

$$Q_1(p) = p^2 \tau_1 \tau_2 + p(\tau_1 + \tau_2) + 1 \quad (18)$$

$$Q_2(p) = p \left\{ p^3 \tau_1 \tau_2 + p^2(\tau_1 + \tau_2) + p \left[1 + (\mu_1 + \mu_2) \frac{b_n^2 \tau_1 \tau_2}{l^2 \rho} \right] + \frac{b_n^2}{l^2 \rho} (\mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_2) \right\}$$

Здесь ib_n — корни функции $f(x) = x \operatorname{sh} x + a \operatorname{ch} x$. Определение корней функции $f(x)$ сводится к решению трансцендентного уравнения $b \operatorname{tg} b = a$. Так как $a \ll 1$ (обычно $a \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$), то

$$b_1 \approx \sqrt{a}, \quad b_{n+1} \approx n\pi + \frac{a}{n\pi} \quad (19)$$

Переходя в выражении (17) от трансформанты $\Phi(p)$ к оригиналу $\varphi(t)$, получим

$$\varphi(z, t) = \frac{2M}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n z/l)}{b_n \cos b_n + (1+a) \sin b_n} \times \sum_{\nu=1}^4 \left[Q_1(p_\nu) \exp(p_\nu t) \left(\prod_{s \neq \nu} (p_\nu - p_s) \right)^{-1} \right] \quad (20)$$

Здесь p_ν, \bar{p}_s — корни знаменателя $Q_2(p)$ в выражении (18).

Таким образом, решение уравнения (9) зависит от корней, характер которых определяется знаком дискриминанта D кубического уравнения

$$p^3 \tau_1 \tau_2 + p^2(\tau_1 + \tau_2) + p \left[1 + \frac{b_n^2 \tau_1 \tau_2}{l^2 \rho} (\mu_1 + \mu_2) \right] + \frac{b_n^2}{l^2 \rho} (\mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_2) = 0 \quad (21)$$

Для дискриминанта D_n из уравнения (21) имеем выражение

$$D_n = q_n^2 + m_n^3 \quad (22)$$

$$q_n = \frac{(s_1 + s_2)^3}{27} - \frac{s_1 s_2 (s_1 + s_2)}{6} + \frac{b_n^2 s_1}{3l^2 \rho} \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{2} \right) + \frac{b_n^2 s_2}{3l^2 \rho} \left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \right) \quad (23)$$

$$m_n = \frac{1}{9} \left[s_1 s_2 + \frac{3b_n^2}{l^2 \rho} (\mu_1 + \mu_2) - (s_1^2 + s_2^2) \right] \quad \left(s_j \equiv \frac{1}{\tau_j} \right)$$

Здесь через s_j обозначены константы релаксации ($j = 1, 2$).

Как будет показано ниже, затухающие колебания крутильного маятника будут иметь место при условии $D_n > 0$.

1°. Рассмотрим сначала случай $m_n > 0$, когда корни p_ν будут равны

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 2\kappa_n - \frac{1}{3}(s_1 + s_2), \quad p_{3,4} = -\kappa_n \pm i\omega_n - \frac{1}{3}(s_1 + s_2) \quad (24)$$

Здесь

$$\kappa_n = -r_n \operatorname{sh} \theta_n, \quad \omega_n = \sqrt{3} \operatorname{ch} \theta_n, \quad r_n = \pm \sqrt{m_n}, \quad \operatorname{sh} 3\theta_n = \frac{q_n}{r_n^3} \quad (25)$$

причем знак у r_n выбирается таким же, каков знак у q_n .

Подставляя корни (24) в выражение (20), получим

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) = & \frac{2M\tau_1\tau_2}{\pi R^2(\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2)} z + \frac{2M}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n z / l)}{b_n \cos b_n + (1+a) \sin b_n} \times \\ & \times \frac{1}{(9\kappa_n^2 + \omega_n^2)\beta_n} \left\{ -[1 - \beta_n(\tau_1 + \tau_2) + \beta_n^2\tau_1\tau_2] e^{-\beta_n t} + \right. \\ & \left. + \frac{(f_n^2 + h_n^2)^{1/2}\beta_n}{(\gamma_n^2 + \omega_n^2)\omega_n} e^{-\gamma_n t} \sin(\omega_n t + \psi_n) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_n = & (\gamma_n^2 + \omega_n^2) \tau_1\tau_2 (9\kappa_n^2 - \omega_n^2 - 6\kappa_n\gamma_n) + 3\kappa_n\gamma_n - \omega_n^2 \\ h_n = & \omega_n [\gamma_n (1 - 2\omega_n^2\tau_1\tau_2) - 2\gamma_n^3\tau_1\tau_2 + 3\kappa_n] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\gamma_n = \kappa_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right), \quad \beta_n = -2\kappa_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right), \quad \psi_n = \arctg \frac{h_n}{f_n}$$

2°. В случае $D_n > 0$ и $m_n < 0$ можно легко установить, что корни p_n будут также определяться формулой (24), где вместо выражений (25) следует пользоваться выражениями

$$\kappa_n = -r_n \operatorname{ch} \theta_n, \quad \omega_n = \sqrt{3} r_n \operatorname{sh} \theta_n, \quad r_n = \pm \sqrt{|m_n|}, \quad \operatorname{ch} 3\theta_n = \frac{a_n}{r_n^3} \quad (28)$$

Поэтому решение для угла $\varphi(z, t)$ будет и в этом случае определяться формулой (26).

Итак, в обоих случаях $m_n > 0$ и $m_n < 0$ при $D_n > 0$ решение $\varphi(z, t)$ дается формулой (26), с той лишь разницей, что в первом случае параметры κ_n и ω_n определяются формулами (25), тогда как во втором случае — формулами (28). Решение $\varphi(z, t)$ представляет собой сумму трех слагаемых. Первое слагаемое дает новое положение равновесия. Второе слагаемое описывает эффект последствия всех гармоник. Наконец, третье слагаемое представляет собой затухающие гармоники.

Первые два слагаемых можно объединить. Тогда они будут определять положение равновесия, разное для различных гармоник и меняющееся со временем вследствие наличия у среды собственной вязкости. При $t \rightarrow \infty$ положение равновесия определяется лишь первым слагаемым.

Условием того, что крутильный маятник совершает затухающие колебания, является $D_n > 0$, т. е.

$$\begin{aligned} & \left[(s_1 + s_2)^3 - 4.5 s_1 s_2 (s_1 + s_2) + \frac{9b_n^2}{l^2 \rho} s_1 \left(\mu_2 - \frac{\mu_1}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{9b_n^2}{l^2 \rho} s_2 \left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{2} \right) \right]^2 > \left| s_1 s_2 + \frac{3b_n^2}{l^2 \rho} (\mu_1 + \mu_2) - (s_1^2 + s_2^2) \right|^3 \end{aligned} \quad (29)$$

Если же $D_n < 0$, то крутильный маятник аperiodически возвращается в положение равновесия. Действительно, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) = & \frac{2M\tau_1\tau_2}{\pi R^2(\mu_1\tau_1 + \mu_2\tau_2)} z - \frac{2M}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n z / l)}{b_n \cos b_n + (1+a) \sin b_n} \times \\ & \times \left\{ \frac{1 - (\tau_1 + \tau_2) c_n + \tau_1\tau_2 c_n^2}{c_n(\xi_n + \eta_n)(\xi_n + \zeta_n)} \exp(-c_n t) + \right. \\ & + \frac{1 - (\tau_1 + \tau_2) d_n + \tau_1\tau_2 d_n^2}{d_n(\xi_n + \eta_n)(\eta_n - \zeta_n)} \exp(-d_n t) + \\ & \left. + \frac{1 - (\tau_1 + \tau_2) k_n + \tau_1\tau_2 k_n^2}{k_n(\xi_n + \zeta_n)(\xi_n - \eta_n)} \exp(-k_n t) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь

$$c_n = \xi_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right), \quad d_n = -\eta_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right)$$

$$k_n = -\zeta_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \quad (31)$$

$$\xi_n = 2r_n \cos \frac{\theta_n}{3}, \quad \eta_n = 2r_n \cos \frac{\pi - \theta_n}{3}, \quad \zeta_n = 2r_n \cos \frac{\pi + \theta_n}{3}$$

$$\theta_n = \arccos \frac{q_n}{r_n^3} \quad (32)$$

Так как из условия $D_n < 0$ вытекает вещественность θ_n , все показатели степеней в (30) будут вещественными, т. е. колебаний не будет.

Из формулы (27) следует, что логарифмический декремент затухания колебаний Δ_n для n -й гармоники равен

$$\Delta_n = \left[\kappa_n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \right] \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (33)$$

Здесь параметры κ_n и ω_n вычисляются по формулам (25) или (28) в зависимости от знака m_n .

Для сопоставления внутреннего трения, определяемого формулой (33) с реологической формулой (4), учтем, что $\operatorname{tg} \delta = \Delta / \pi$, а также, что основной вклад вносится первой гармоникой. Тогда из (33) получим

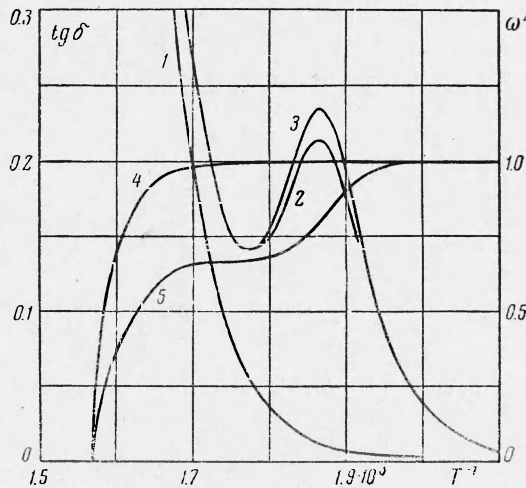
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2}{\omega_1} \left[\kappa_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \right] \quad (34)$$

Положим, что при комнатной температуре $\omega_1 = 1$. Так как в этом случае $\omega \tau_j \gg 1$, выражение (5) дает закон Гука, с учетом которого находим $\mu a / \rho l^2 = 1$.

Для зернограничного пика [3] в алюминии

$$\mu_1 = \frac{2}{3} \mu, \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \mu$$

Фиг. 2. Температурная зависимость внутреннего трения $\operatorname{tg} \delta$: 1 — максвелловского крутильного маятника; 2 — четырехэлементной реологической модели после корректировки; 3 — крутильного маятника, среда которого описывается двумя временами релаксаций; 4 и 5 — квадраты частоты максвелловского маятника и маятника, среда которого описывается двумя временами релаксаций соответственно



Учет этого дает следующие выражения:

$$r_1 = \pm \frac{1}{3} |s_1 s_2 + 3 - (s_1^2 + s_2^2)|^{1/2} \quad (35)$$

$$q_1 = \frac{1}{27} (s_1 + s_2)^3 - \frac{1}{6} s_1 s_2 (s_1 + s_2) + \frac{1}{6} s_2$$

Соответствующие кривые для $\operatorname{tg} \delta_1$ и ω_1^2 приведены на фиг. 2. При построении графиков использовались те же данные для поликристаллического алюминия, что и при построении кривой внутреннего трения по реологической модели. Для более полного сопоставления результатов на фиг. 2 представлена скорректированная реологическая кривая внутреннего трения. Корректировка состояла в учете изменения частоты с ростом температуры в реологической формуле (4) по температурной зависимости частоты, рассчитанной по трехмерной модели. Сопоставление исходной и

корректированной реологических кривых $\operatorname{tg} \delta$ приведено на фиг. 1. Там же приводится температурный ход квадрата частоты, по которой проводилась корректировка. На фиг. 2. представлены также $\operatorname{tg} \delta$ и ω^2 для максвелловского крутильного маятника, причем для времени релаксации было взято время релаксации фона четырехэлементной модели. Построение кривых сделано по формулам для основной гармоники

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{1}{\omega_1 \tau}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu R^4 \pi}{I l} - \frac{1}{\tau^2} \right)^{1/2} \quad (36)$$

которые вытекают из решения задачи движения крутильного маятника

$$\varphi(z, t) = \frac{2M}{\pi \mu R^4} z + \frac{2M\tau}{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(b_n z / l)}{b_n \cos b_n + (1+a) \sin b_n} \frac{\sin(\omega_n t + \psi_n)}{\omega_n} \exp \frac{-t}{2\tau} \quad (37)$$

Здесь

$$\psi_n = \arccos \left(1 - \frac{1}{2\alpha_n^2 \tau^2} \right), \quad \alpha_n^2 = \frac{\mu b_n^2}{\rho l^2} \quad (38)$$

Как видно из фиг. 2, внутреннее трение, рассчитанное по реологической модели и при помощи решения трехмерной задачи, дает в обоих случаях пик и фон. Кривые почти полностью совпадают, за исключением небольшой температурной области вблизи максимума, где трехмерная задача дает несколько более высокий пик. Для того чтобы убедиться в том, что это различие не обусловлено отбрасыванием всех гармоник, кроме первой, для пика подсчитано отношение коэффициентов перед $\sin(\omega_n t + \psi_n)$, согласно формуле (26). Оно оказалось равным $4,6 \cdot 10^{-4}$, т. е. намного меньше разницы между рассматриваемыми кривыми.

Разница между скорректированной реологической кривой $\operatorname{tg} \delta$ и кривой трехмерного случая относительно невелика, а расчеты в последнем весьма громоздки, поэтому для обработки экспериментальных данных можно, по-видимому, пользоваться по-прежнему реологическими моделями, внося соответствующую поправку на изменяющуюся частоту, особенно в области фона внутреннего трения.

Температурная зависимость квадрата частоты четырехэлементной модели представляет собой два плато и две области резкого релаксационного спада. Участки плато получились в результате игнорирования температурной зависимости коэффициентов μ_j . Для упругой области $\omega^2 \sim \mu$, как это видно, например, из выражения (36). Таким образом, учет температурной зависимости μ_j даст вместо участков плато участки медленного уменьшения ω^2 с ростом температуры, что согласуется с экспериментом.

Несовпадение кривых фона максвелловской и четырехэлементной моделей связано с тем, что в первом случае фон получается в результате релаксации μ , тогда как во втором случае лишь $2/3\mu$. Наконец, отметим, что температура, определяющая переход колебаний в аperiodический процесс, одинакова в обоих случаях. Эта температура зависит как от физических свойств материала крутильного маятника, так и от геометрии системы. Например, изменяя исходную частоту при помощи инерционной подвески, можно сдвинуть рассматриваемую точку по оси температур.

Авторы признательны В. С. Постникову за обсуждение полученных результатов.

Поступила 3 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т. Д. О дисперсионных соотношениях для упругости и податливости. ПМТФ, 1960, № 1, стр. 96.
2. Glauz R. D., Lee E. H. Transient Wave Analysis in a Linear Time-Dependent Material. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8, p. 947.
3. Ке Тин-суй. Опытное доказательство вязкого поведения границ зерен в металлах. Сб. Упругость и неупругость металлов, М., ИЛ, 1954, стр. 198.
4. Ке Тин-суй. Релаксация напряжений на границах зерен в металлах. Сб. Упругость и неупругость металлов, М., ИЛ, 1954, стр. 223.
5. Фастов Н. С. О высокотемпературной ветви фона внутреннего трения. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 5, стр. 1069.