

Известно, что $(dv' / dT)_* = \pm \infty$, поэтому с учетом (7) получим

$$\left(\frac{da'}{dT}\right)_* = +\infty \quad (11)$$

Из (11) и (9) следует, что в критической точке кривые температурной зависимости скорости звука в насыщенных парах и жидкой фазе плавно сопрягаются (см. фигуру). При удалении от критической точки ($T < T_*$) скорость звука в жидкой фазе сначала уменьшается, достигая минимума, затем монотонно возрастает. При $T = T^0$ она становится равной a'' (точка пересечения кривых).

Величина температурного интервала $T_* - T^0$, в котором $a' < a''$, может быть различной для разных веществ. Если она не превышает погрешности измерения температуры при измерениях скорости звука, то пересечение кривых, естественно, не может быть экспериментально обнаружено. Именно такой случай, очевидно, имел место в работе [7], где были проведены весьма подробные измерения скорости звука в обеих фазах в области критической точки аргона.

Необходимо заметить, что вывод о наличии пересечения кривых справедлив при $a_* \neq 0$, т. е. $c_{p*} \neq \infty$. Поэтому обнаружение такого пересечения может служить экспериментальным подтверждением того, что теплоемкость c_p в критической точке конечна.

Поступила 5 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Таппебергер Н. Eine Untersuchung des kritischen Zustandes mit Ultraschall. Z. Phys., 1959, В 153, S. 445.
2. Трелин Ю. С. Исследование скорости распространения ультразвуковых волн в двуокиси углерода в области жидкого и газообразного состояния. Сб. «Применение ультразвука к исследованию вещества». Изд. МОПИ, 1961, вып. 13.
3. Ноздрев В. Ф. Применение ультразвука в молекулярной физике. Физматгиз, 1958.
4. Глинский А. А. Об одном акустическом эффекте в системе жидкость — пар вблизи критической точки. Акуст. ж., 1965, № 1.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Физматгиз, 1951.
6. Радовский И. С. Об акустическом методе определения критической температуры вещества. Теплофиз. высоких температур, 1967, № 5.
7. Радовский И. С. Экспериментальное исследование скорости звука в аргоне на линии насыщения. ПМТФ, 1963, № 3.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ НЕКОТОРЫХ КОЛЬЦЕВЫХ РЕБЕР, ОХЛАЖДАЕМЫХ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Г. Л. Гродзовский, З. В. Пасечник

(Москва, Киев)

Рассмотрена осесимметричная задача об определении оптимальной геометрии некоторых типов одиночных кольцевых теплопроводящих ребер, охлаждаемых излучением.

Если базовая поверхность (от которой тепло отводится ребрами) представляет собой достаточно длинное цилиндрическое или призматическое тело, то ребра располагаются вдоль него, и задачу можно решать в плоской постановке. В такой постановке исследовалась задача об оптимальном профиле одиночного ребра в работах [1-6].

В работах [1-5] рассматривались ребра с контурами из определенных классов кривых, и определялись их оптимальные размеры. В работах [1-2] изучено ребро прямоугольного профиля, в [3] — ребро треугольного профиля, в [4] — ребро с контуром из класса степенных функций, в [5] — трапециевидное ребро.

В работе [6] была решена вариационная задача об абсолютном оптимальном профиле плоского ребра с заданной толщиной у края. Показано, что этот профиль совпадает вначале с профилем степенного вида, а затем переходит в профиль постоянной толщины. Таким образом, в плоской постановке задача решена полностью.

Если базовой поверхностью является довольно короткое цилиндрическое тело, то для охлаждения ее возможно применение кольцевого ребра (фиг. 1).

Такие кольцевые ребра исследованы частично. В работе [7] исследовалась эффективность кольцевого ребра постоянной толщины, в [8] — решена задача об определении оптимальных, в смысле веса, размеров такого же ребра, в работе [9] — исследована система кольцевых ребер постоянной ширины (прямоугольного сечения).

В настоящей работе рассмотрена осесимметричная задача об оптимальной форме одиночного кольцевого ребра, закон изменения толщины которого задается из определенного класса функций.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрическое тело радиуса r_0 , охлаждаемое при помощи кольцевого теплопроводящего ребра переменной толщины (фиг. 1). Тепло передается от тела равномерно через основание ребра, проходит по ребру и излучается в пространство, представляющее вакуум с температурой, равной абсолютному нулю.

Если внутри ребра нет источников тепла и материал ребра изотропный, то задача осесимметрична, и при решении ее будем пользоваться системой координат r, y , где r — координата, отсчитываемая от оси вращения тела, а y — координата, отсчитываемая от плоскости симметрии ребра.

Будем рассматривать стационарный тепловой режим ребра с постоянной температурой основания. Пусть ребро — тонкое и пологое, так что тепловым потоком в ребре в направлении y можно пренебречь по сравнению с радиальным тепловым потоком.

Тогда уравнение теплопередачи вдоль ребра запишется в виде

$$Q = -4\pi r y \lambda dT / dr \quad (1.1)$$

а закон теплового излучения даст

$$dQ / dr = -4\pi r \sigma \varepsilon T^4 \quad (1.2)$$

Здесь y — полутолщина ребра, Q — тепловой поток по ребру, λ — коэффициент теплопроводности, T — температура ребра, σ — постоянная Стефана — Больцмана, ε — степень черноты поверхности ребра, σ и ε считаются постоянными.

Оптимальный контур сечения ребра минимального веса должен обеспечить минимум величине

$$V = 2 \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r y dr \quad (1.3)$$

при заданных Q_0 и T_0 . Индекс 1 относится к величинам, взятым на внешней окружности ребра, 0 — на внутренней.

Удобно ввести новую переменную $x = r^2$. Тогда (1.1) — (1.3) примут вид

$$Q = -8\pi \lambda x y \frac{dT}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = -2\pi \sigma \varepsilon T^4, \quad V = 2 \int_{x_0}^{x_1} \pi y dx \quad (1.4)$$

Введем безразмерные переменные

$$Q^\circ = \frac{Q}{Q_0}, \quad T^\circ = \frac{T}{T_0}, \quad x^\circ = \frac{2\pi \sigma \varepsilon T_0^4 x}{Q_0}, \quad y^\circ = \frac{8\pi \lambda T_0 y}{Q_0}, \quad V^\circ = \frac{16\pi \lambda \sigma \varepsilon T_0^5 V}{Q_0^2}$$

Тогда

$$Q = -xy \frac{dT}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = -T^4, \quad V = 2 \int_{x_0}^{x_1} y dx \quad (1.6)$$

Здесь и ниже индексы при безразмерных переменных опускаем.

При решении задачи будем пользоваться граничными условиями в виде

$$x = x_0, \quad Q = 1, \quad T = 1; \quad x = x_1, \quad Q = 0, \quad T = T_1 \quad (1.7)$$

Здесь x_1 и T_1 заранее неизвестны.

Теперь можно математически сформулировать задачу следующим образом: среди всевозможных функций $y(x)$, $Q(x)$ и $T(x)$ и параметров x_1 и T_1 , удовлетворяющих уравнениям (1.6.1), (1.6.2) и граничным условиям (1.7), найти те, которые обеспечивают минимум функционалу (1.6.3).

2. **Решение задачи.** Зададимся определенным законом изменения $y(x)$. Рассмотрим три случая.

а) Пусть закон изменения полутолщины ребра имеет вид

$$y = y_0 x_0 / x \quad (2.1)$$

где y_0 — неизвестная постоянная, которую надо найти из условий оптимальности V , принявшего в этом случае вид

$$V = 2x_0 y_0 \ln x_1 / x_0 \quad (2.2)$$

Из уравнений (1.6.1) и (1.6.2) найдем

$$d^2 T / dx^2 = T^4 / x_0 y_0 \quad (2.3)$$

Уравнение такого типа было получено в плоском случае для ребра прямоугольного профиля [2]. Интегрируя (2.3) и используя третье и четвертое из граничных условий (1.7), найдем зависимости для определения $Q(x)$ и $T(x)$

$$Q = \sqrt[2]{x_0 y_0 (T^5 - T_1^5)}, \quad B^{(3/10, 1/2)} - B_0^{(3/10, 1/2)} = \sqrt[2]{10/x_0 y_0} T_1^{3/2} (x_1 - x) \quad (2.4)$$

в которые входят пока неизвестные параметры T_1, x_1, y_0 .

Здесь $\theta = (T_1/T)^5$, а B и B_0 — полная и неполная бэта-функции.

Используя оставшиеся граничные условия, можно выразить y_0 и x_0 через T_1 :

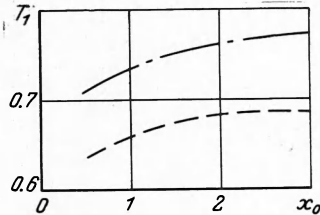
$$y_0 = \frac{5}{2} \frac{1}{x_0 (1 - T_1^5)}, \quad x_1 - x_0 = \frac{B^{(3/10, 1/2)} - B_T^{(3/10, 1/2)}}{2 (1 - T_1^5)^{1/2} T_1^{3/2}}, \quad \text{где } m = T_1^5 \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5.1) в (2.2), приходим к отысканию минимума функции

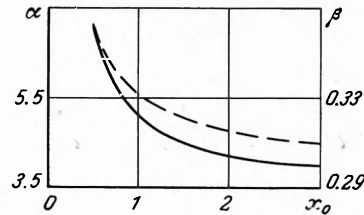
$$V(T_1, x_1) = \frac{5}{1 - T_1^5} \ln \frac{x_1}{x_0} \quad (2.6)$$

при условии (2.5.2).

Такая задача была решена для различных значений x_0 (начиная от $x_0 = 0.5$ до $x_0 = 3$ с шагом $\Delta x_0 = 0.5$). Найденные зависимости оптимальных значений $T_1, x_1 - x_0, y_0, V$ от x_0 изображены на фиг. 2, 4–6 штрих-пунктирными линиями.



Фиг. 2



Фиг. 3

Иследуем поведение решения при $x_0 \rightarrow \infty$. Из фиг. 4 видно, что с ростом x_0 разность $(x_1 - x_0)$ уменьшается, а так как при этом x_1 растет, то при достаточно больших x_0 отношение $(x_1 - x_0) / x_1 = \delta$ будет малой величиной. Разложим выражение (2.6) в ряд по степеням δ

$$V = -\frac{5}{1 - T_1^5} \ln(1 - \delta) = \frac{5}{1 - T_1^5} \left(\delta + \frac{\delta^2}{2} + \dots + \frac{\delta^n}{n} + \dots \right)$$

Оставляя только старшие члены, найдем

$$V \approx \frac{5}{1 - T_1^5} \frac{x_1 - x_0}{x_0}, \quad \left(x_1 = \frac{x_0}{1 - \delta} \approx x_0 + O(\delta) \right) \quad (2.7)$$

Пользуясь работой [2], легко показать, что решение задачи об оптимальном плоском ребре прямоугольного профиля может быть сведено к определению минимума величины

$$F = \frac{5L}{1 - T_1^5} \quad \text{при} \quad L = \frac{B^{(3/10, 1/2)} - B_T^{(3/10, 1/2)}}{2 (1 - T_1^5)^{1/2} T_1^{3/2}} \quad (2.8)$$

Здесь для плоского ребра приняты обозначения, приведенные в работе [6].

Сопоставляя (2.7.1) и (2.8.1), (2.5.2) и (2.8.2), убеждаемся, что исследуемые в случаях кольцевого и плоского ребра функции отличаются при достаточно больших x_0 только множителем $1/x_0$, не зависящим от искомого параметра T_1 .

Следовательно, с ростом x_0 значение T_{1opt} для кольцевого ребра стремится к 0.799 — значению T_{1opt} , полученному для плоского прямоугольного ребра.

б) Рассмотрим случай, когда закон изменения $y(x)$ имеет вид

$$y(x) = y_0 \frac{x_0}{x} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad (2.9)$$

Тогда

$$V = 2x_0 y_0 \left(\frac{x_1}{x_1 - x_0} \ln \frac{x_1}{x_0} - 1 \right) \quad (2.10)$$

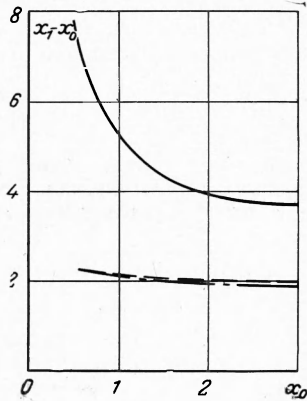
а уравнения (1.6.1), (1.6.2) и граничные условия (1.7) запишутся так:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \frac{dT}{dx} \right] = \frac{1}{x_0 y_0} T^4 \quad (2.11)$$

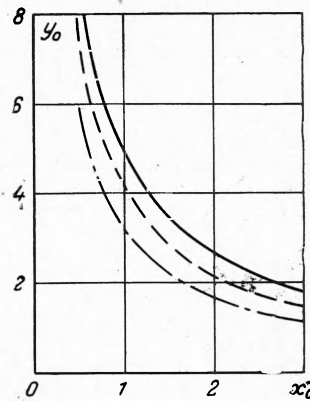
$$x = x_0, \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{x_0 y_0}, \quad T = 1; \quad x = x_1, \quad T = T_1 \quad (2.12)$$

Третье из граничных условий (1.7) выполняется тождественно, так как ребро имеет острую кромку ($x = x_1, y = 0$).

Уравнение типа (2.11) было получено в плоском случае для треугольного ребра в работе [4]. Для решения его воспользуемся предлагаемой в [4] методикой.



Фиг. 4



Фиг. 5

Введем новую неизвестную функцию v и новую независимую переменную u , связанные со старыми формулами

$$T = \gamma v(u), \quad u = \beta \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad \left(\frac{\beta}{\gamma^3} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 y_0} \right) \quad (2.13)$$

где γ и β — пока неопределенные постоянные.

Тогда уравнение (2.11) и граничные условия (2.12) примут вид

$$\frac{d}{du} \left(u \frac{dv}{du} \right) = v^4 \quad (2.14)$$

$$u = \beta, \quad \frac{x_0 y_0}{x_1 - x_0} \gamma^3 v'(\beta) = 1, \quad \gamma v(\beta) = 1; \quad u = 0, \quad \gamma v(0) = T_1 \quad (2.15)$$

Здесь штрих означает производную по u . Выберем теперь постоянную γ в виде $\gamma = 1/v(\beta)$ (2.16)

Тогда, используя (2.12) и (2.13), можем выразить искомые параметры y_0, x_1 и T_1 через неизвестный пока параметр β

$$y_0 = \frac{1}{x_0} \frac{v^5(\beta)}{\beta v'^2(\beta)}, \quad x_1 = x_0 + \frac{v^4(\beta)}{v'(\beta)}, \quad T_1 = \frac{v(0)}{v(\beta)} \quad (2.17)$$

При таком выборе y_0, x_1 и T_1 граничные условия (2.15) выполняются тождественно, каково бы ни было значение $v(0)$.

Выберем $v(0) = 1$. Тогда, в силу регулярности решения уравнения (2.14) в точке $u = 0$ производная $v'(0) = 1$.

Решение уравнения (2.14) при граничных условиях $v(0) = v'(0) = 1$ может, как показано в [4], быть представлено в виде ряда

$$v = 1 + u + u^2 + 1.1111u^3 + 1.2778u^4 + 1.4978u^5 + 1.7775u^6 + 2.1279u^7 + 2.5638u^8 + \dots$$

имеющего радиус сходимости не менее 0.5.

Итак, требуется найти значение β , для которого величина

$$V = 2 \frac{v(\beta)}{v'(\beta)} \left[\left(x_0 + \frac{v^4(\beta)}{v'(\beta)} \right) \ln \frac{x_0 + v^4(\beta)/v'(\beta)}{x_0} - \frac{v^4(\beta)}{v'(\beta)} \right] \quad (2.18)$$

имеет минимальное значение.

В соотношении (2.18) функции v и v' имеют значения

$$v(\beta) = 1 + \beta + \beta^2 + 1.1111\beta^3 + 1.2778\beta^4 + 1.4978\beta^5 + \\ + 1.7775\beta^6 + 2.1279\beta^7 + 2.5638\beta^8 + \dots \\ v'(\beta) = 1 + 2\beta + 3.3333\beta^2 + 5.1112\beta^3 + 7.4890\beta^4 + \\ + 10.665\beta^5 + 14.895\beta^6 + 20.510\beta^7 + \dots$$

Соответствующие расчеты были проведены на ЭВМ «Раздан-2». Полученная оптимальная зависимость β от x_0 дана на фиг. 3. Рассчитанные по (2.17) зависимости T_1 , x_1 , y_0 , V от x_0 изображены на фиг. 2, 4–6 штриховыми линиями.

Аналогично предыдущему случаю, из поведения $(x_1 - x_0)$ с ростом x_0 следует, что при достаточно больших x_0 исследуемая функция (2.10) может быть разложена в ряд по степеням δ

$$V = 2 \frac{v^5(\beta)}{\beta v'^2(\beta)} \left[\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{3} + \dots + \frac{\delta^n}{n+1} + \dots \right] \quad \left(\delta = \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right) \quad (2.19)$$

Ограничиваясь в этом разложении малыми величинами первого порядка малости, найдем

$$V = \frac{1}{x_1} \frac{v^5(\beta)}{\beta v'^2(\beta)} \approx \frac{1}{x_0} \frac{v^5(\beta)}{\beta v'^2(\beta)} \quad (2.20)$$

Вспоминая, что в [4] решение задачи об оптимальной форме плоского треугольного ребра было сведено к определению минимума величины $v^5(\beta) / \beta v'^2(\beta)$ при тех же условиях (2.18), а найденное значение β_{opt} было равно 0.287, можем утверждать, что при $x_0 \rightarrow \infty$ оптимальное значение β для кольцевого ребра вида (2.9) стремится к 0.287.

в) Рассмотрим ребро, полутолщина которого меняется по закону

$$v = y_0 \frac{x_0}{x} \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^\alpha \quad (2.21)$$

Здесь y_0 , α — неизвестные параметры, которые, наряду с x_1 и T_1 , надо найти из условий оптимальности. Исследуемый функционал принимает вид

$$V = 2x_0 y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^\alpha dx \quad (2.22)$$

а уравнения (1.6.1), (1.6.2) сведутся к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^\alpha \frac{dT}{dx} \right] = \frac{1}{x_0 y_0} T^4 \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) можно легко проинтегрировать и, используя первое и второе из граничных условий (1.7), получить оптимальные зависимости $T(x)$ и $Q(x)$:

$$T = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^{1/3(\alpha-2)}, \quad Q = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^{1/3(4\alpha-5)} \quad (2.24)$$

Отсюда видно, что оптимальное значение $T_1 = 0$.

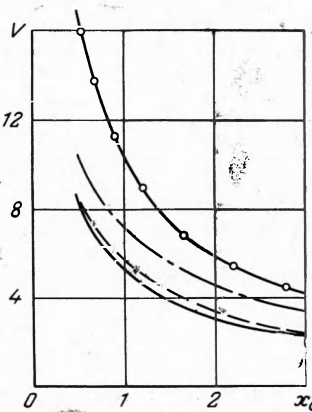
Используя оставшиеся граничные условия, можем выразить все неизвестные параметры через α :

$$x_1 = x_0 + \frac{4\alpha - 5}{3}, \quad y_0 = \frac{1}{x_0} \frac{4\alpha - 5}{\alpha - 2}. \quad (2.25)$$

Остается определить значения α , обеспечивающие минимум величине

$$V = 2 \frac{4\alpha - 5}{\alpha - 2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x} \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right)^\alpha dx \quad (2.26)$$

при условии (2.25), причем из (2.24) видно, что физические соображения требуют, чтобы $\alpha > 2$.



Фиг. 6

