ПМТФ, № 6, 1962

РАЗВИТИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ БЕГУЩЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Н. М. Охременко

(Ленинград)

Развитие ламинарного течения проводящей жидкости на начальном участке каналов в присутствии постоянного поперечного магнитного поля рассматривалось в работе [1], где задача была сведена к линейной при помощи приближения Релея. В работе [2] проведен приближенный анализ той же задачи для плоского канала с учетом нелинейных членов в уравнении движения методами теории пограничного слоя. Рассмотрение ламинарного течения в бесконечном плоском канале под действием поперечного бегущего поля приведено в работах [3,4].

Ниже исследуется развитие этого течения при помощи приближенных уравнений движения, в которых слагаемые от ускорения и вязкости учитываются частично как и в работе [5]. При ряде упрощающих предположений (скорость на входе постоянна, поверхностный эффект отсутствует, дополнительные касательные напряжения за счет пульсации скорости пренебрежимо малы) с использованием преобразования Лапласа получены выражения для осредненной скорости, длины начального участка и перепада давлений. Профиль осредненной скорости не зависит от частоты и совпадает с решением Шерклиффа [1].

Запишем основные уравнения, которым подчиняются магнитогидродинамические явления в проводящей жидкости, вводя векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 \mathbf{A}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\sigma}{\rho} \left\{ -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}] \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \right\} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, μ — магнитная проницаемость, σ — электропроводность, ρ — плотность, а ν — кинематическая вязкость жидкости, p — давление. Пусть на границах канала с полубесконечными параллельными стенками $y = \pm a$, $x \geqslant 0$, задана z-компонента вектор-потенциала магнитного поля

$$A = A_m \cos(\omega t - \alpha x) \qquad \left(\alpha = \frac{\pi}{\tau}\right) \tag{3}$$

Здесь A_m — амплитуда векторного потенциала, ω — угловая частота, τ — полюсное деление.

Примем следующие допущения.

1. Движение жидкости происходит параллельно оси x со скоростью

$$u = u_0(x, y) + u_1(x, y, t) \tag{4}$$

где u_1 — периодическая по t функция с периодом, кратным $T = 2\pi / \omega$. По начальному сечению основная компонента скорости постоянна, т. е.

$$u = V = \text{const} \quad \text{при } x = 0$$

2. Ширина канала в направлении Oz больше его высоты, поэтому в уравнении (2) можно пренебречь членом d^2u / dz^2 по сравнению с $\partial^2 u / \partial y^2$.

3. Плоскости $y = \pm a$ являются изоляторами, а две другие стенки — идеальными проводниками. Поэтому имеется лишь одна z-компонента вектор-потенциала магнитного поля и плотности тока в жидкости.

4. Пренебрегаем затуханием электромагнитного поля по высоте канала. Это означает, что во всех точках рассматриваемой среды векторпотенциал магнитного поля будет определяться формулой (3).

При сделанных предположениях из системы уравнений (1) — (3) получим приближенные уравнения магнитной гидродинамики, описывающие плоскопараллельное течение вязкой, несжимаемой жидкости под действием бегущего поля.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+V\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\sigma B_m^2}{\rho}\left(\frac{\omega}{\alpha}-u\right)\sin^2(\omega t-\alpha x) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (6)$$

Здесь V — скорость во входном сечении, $B_m=-\alpha A_m$ — амплитуда магнитной индукции.

Систему уравнений (4) — (6) необходимо решить при граничных условиях

$$u=0, \qquad v=0 \quad \text{при } y=\pm a, \qquad x>0 \qquad (7)$$

При этом расход жидкости через любое сечение канала должен оставаться неизменным

$$\int_{-a}^{a} u\,dy = 2Va \qquad (8)$$

Введем в рассмотрение усредненные величины

$$u_0=\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt, \qquad p_0=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt, \qquad v_0=\frac{1}{T}\int_0^T v\,dt \qquad (9)$$

и проведем осреднение уравнений (5), (6) по времени за период T. Тогда вместо (5) получим

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{1}{\eta}\frac{\partial p_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{M^2}{a^2}\left(\frac{\omega}{\alpha}-u_0\right) \qquad \left(k=\frac{\nu}{V},\ M=\frac{B_m a}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}\right) \qquad (10)$$

Здесь η — динамическая вязкость, M — число Гартмана.

Использование приближенного уравнения (5) привело к тому, что после осреднения уравнение (10) не содержит дополнительных касательных напряжений, обусловленных пульсационными составляющими скорости. Поэтому такой подход требует дополнительного предположения об относительной малости этих касательных напряжений. Можно полагать, что оно оправдывается, а течение остается ламинарным.

Выполняя интегрирование уравнения (10) по y и учитывая (8), найдем выражение для перепада давления

$$\frac{\partial p_0}{\partial x}=\frac{\eta M^2}{a^2}\left(\frac{\omega}{\alpha}-V\right)+\frac{\eta}{2a}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)_a-\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)_{-a}\right] \qquad (11)$$

В рассматриваемом случае допустимо считать профиль скоростей в любом сечении симметричным относительно оси x. Поэтому можно положить

$$\partial u_0 / \partial y = 0 \quad \text{при } y=0, \qquad (\partial u_0/\partial y)_a = -(\partial u_0/\partial y)_{-a} \qquad (12)$$

Используя (12), вместо уравнения (10) получим дифференциальное уравнение для определения основной скорости

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}-\frac{M^2}{a^2}u_0-\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)_a+\frac{M^2}{a^2}V \qquad (13)$$

с граничными условиями

$$u_0 = V \quad \text{при } x = 0, \qquad |y| < a$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x > 0, \qquad y = 0 \tag{14}$$
$$u_0 = 0 \quad \text{при } x > 0, \qquad y = \pm a$$

Подвергнем уравнение (13) преобразованию Лапласа по x, используя первое из условий (14). Для изображения $U_0(s, y)$, где s — оператор преобразования Лапласа, получаем уравнение

$$\frac{d^2U_0}{dy^2} - \beta U_0 = -\frac{\beta^2}{s} V + \frac{1}{a}\left(\frac{dU_0}{dy}\right)_a \qquad \left(\beta = \sqrt{\frac{s}{k} + \frac{M^2}{a^2}}\right) \tag{15}$$

с условиями

$$U_0 = 0 \quad \text{при } y = \pm a, \qquad \frac{dU_0}{dy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \tag{16}$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$U_0 = V \frac{\operatorname{ch} \beta y - \operatorname{ch} \beta a}{s\left[(\beta a)^{-1} \operatorname{sh} \beta a - \operatorname{ch} \beta a\right]} \tag{17}$$

Для нахождения оригинала $u_0(x, y)$ по изображению (17) воспользуемся теоремой разложения. Выполняя преобразования, найдем

$$u_0(x, y) = V \left\{\frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch}(My/a)}{\operatorname{ch} M - M^{-1} \operatorname{ch} M} - \right.$$
$$\left. - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_m - \cos(\gamma_m y/a)}{(M^2 + \gamma_m^2) \cos \gamma_m} \exp\left(-\frac{M^2 + \gamma_m^2}{R} \frac{x}{a}\right)\right\} \tag{18}$$

Здесь $R = aV/\nu$ — число Рейнольдса для плоского канала, γ_m — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} z = z \tag{19}$$

Усредненная скорость u_0, как следует из решения (18), не зависит от ω и поэтому совпадает с решением [1] для $\omega = 0$.

Значение скорости на бесконечном удалении от входа

$$u_0(\infty, y) = V \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch}(My/a)}{\operatorname{ch} M - M^{-1} \operatorname{sh} M} = V_0 \frac{\operatorname{ch} M - \operatorname{ch}(My/a)}{\operatorname{ch} M - 1} \tag{20}$$

где V_0 — скорость в центре потока совпадает с известными решениями [3,4]. При $M \to 0$ из формулы (18) вытекает результат обычной гидродинамики [6].

Представляет интерес определение влияния внешнего поперечного магнитного поля на величину длины начального участка, на протяжении которого устанавливается асимптотическое распределение скорости. Полагая $y = 0$ в решении (18) и сохраняя в бесконечной сумме только одно слагаемое, так как величины γ_m^2 растут очень быстро, найдем приближенное выражение для скорости жидкости на оси канала

$$u_0(x, 0) = V \frac{\operatorname{ch} M - 1}{\operatorname{ch} M - M^{-1} \operatorname{sh} M}\left[1 - 2\frac{(\operatorname{ch} M - M^{-1} \operatorname{sh} M)(\cos \gamma_1 - 1)}{(M^2 + \gamma_1^2)(\operatorname{ch} M - 1) \cos \gamma_1} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(-\frac{M^2 + \gamma_1^2}{R} \frac{x}{a}\right)\right] \tag{21}$$

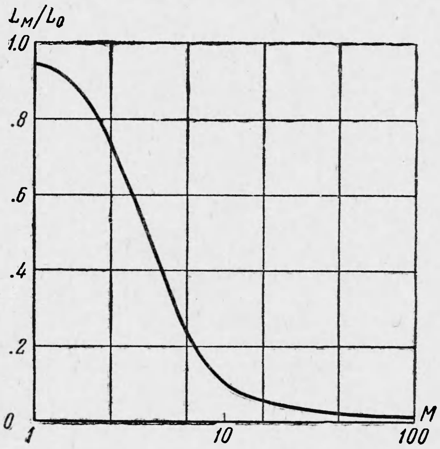
где $\gamma_1 = 4.493$ — наименьший, отличный от нуля, корень уравнения (19).

Требуя, чтобы величина в квадратной скобке выражения (21) при $x = L_M$ равнялась 0.99, найдем приближенное значение длины начального участка

$$L_M = \frac{aR}{M^2+\gamma_1^2}\ln\frac{200\,(\operatorname{ch} M - M^{-1}\operatorname{sh} M)(\cos\gamma_1 - 1)}{(M^2+\gamma_1^2)(\operatorname{ch} M - 1)\cos\gamma_1} \tag{22}$$

При $M \to 0$ из этой формулы получается известное выражение для длины начального участка в случае отсутствия магнитного поля [6]

$$L_0 = \frac{aR}{\gamma_1^2}\ln\frac{400\,(\cos\gamma_2 - 1)}{3\gamma_1^2\cos\gamma_1} \tag{23}$$



На фигуре показано уменьшение длины начального участка под влиянием магнитного поля.

Как известно, внешнее магнитное поле способствует расширению области устойчивого течения до значительно больших, чем обычно, критических чисел Рейнольдса. Поэтому область применения формулы (22) увеличивается. При значениях $M \gg 1$ и сохранении ламинарного режима длина начального участка имеет порядок

$$L_M \approx \frac{aR}{M^2}$$

что совпадает с оценкой [1].

Перепад давления определится подстановкой скорости по формуле (18) в равенство (11). После преобразований будем иметь

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\eta M^2}{a^2}\left[\frac{\omega}{\alpha} - \frac{V}{1 - M^{-1}\operatorname{th} M} - 2\frac{V}{M^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_m^2}{M^2+\gamma_m^2}\exp\left(-\frac{M^2+\gamma_m^2}{R}\frac{x}{a}\right)\right] \tag{24}$$

Отсюда

$$\frac{p_0 - p'}{\rho V^2} = \frac{M^2}{R}\left(\frac{\omega}{\alpha V} - \frac{1}{1 - M^{-1}\operatorname{th} M}\right)\frac{x}{a} - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma_m^2}{(M^2+\gamma_m^2)^2}\times$$

$$\times\left[1 - \exp\left(-\frac{M^2+\gamma_m^2}{R}\frac{x}{a}\right)\right] \tag{25}$$

где p' — давление в начальном сечении канала. Последняя формула справедлива лишь для бегущего поля. При $M \to 0$ из (25) получим результат обычной гидродинамики [6]

$$\frac{p - p'}{\rho V^2} = -\frac{3}{R}\frac{x}{a} - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_m^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma_m^2}{R}\frac{x}{a}\right)\right] \tag{26}$$

Поступила 30 VIII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Entry of conducting and non-conducting fluids in pipes. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1956, vol. 52, part 3, No. 7, pp. 573—583.
2. Roidt M., Cess R. D. An approximate analisis of laminar magnetohydrodynamic flow in the entrance region of a flat duct. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, ser. E, No. 1, pp. 171—176.
3. Кирко И. М. О моделировании магнитогидродинамических явлений в жидких металлах. Тр. Ин-та физики АН ЛатвССР, 1956, т. VIII.
4. Тютин И. А. Введение в теорию индукционных насосов. Тр. Ин-та физики АН ЛатвССР, 1956, т. VIII.
5. Слезкин Н. А. О развитии течения вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. ПММ, 1955, т. XXI, вып. 4.
6. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951, стр. 225.