

УДК: 532.517:621.436

## **РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ЦИЛИНДРЕ ДВС В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ**

**О.Г. КУДЕЛИН, О.Н. ЛЕБЕДЕВ**

*Новосибирская государственная академия водного транспорта*

Найдено аналитическое решение краевой задачи вихревого движения вязкого газа в цилиндре двигателя внутреннего сгорания (ДВС) с плоской геометрией поршня на такте сжатия. Для угловой компоненты скорости в цилиндрической системе координат с уточняющим полиномом определяется аналитическое решение, которое после подстановки в модельное уравнение, начальное и ряд граничных условий сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. В силу единственности решения исследуемой краевой задачи по полученным значениям констант уточняющего полинома находится угловая компонента скорости в данной точке внутрицилиндрового пространства. Полученное решение сопоставляется с экспериментальными данными.

В работе [1] сделана попытка аналитического исследования процесса движения вихревого воздушного заряда в цилиндре ДВС на такте сжатия. Недостатком этой работы стало использование гипотезы квазистатичности, т. е. на определенных временных участках поршень считался неподвижным. Расчетный метод, основанный на этом предположении, в целом давал удовлетворительные результаты, однако учесть влияние движения поршня на аэродинамику потока не представлялось возможным. В работе [2] эта задача была решена в аналитическом виде. Однако при проведении расчетов возникали трудности в решении системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

В настоящей статье находится аналитическое решение для угловой компоненты скорости в цилиндрической системе координат с уточняющим полиномом, которое после подстановки в определяющее уравнение, начальное и ряд граничных условий сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. В силу единственности нетривиального решения исследуемой краевой задачи, по полученным значениям констант уточняющего полинома находится угловая компонента скорости в данной точке внутрицилиндрового пространства. Такой подход существенно упрощает поиск аналитического решения определяющего уравнения по сравнению с тем, который был предложен в работе [2].

Сформулируем постановку задачи.

Предположим, что рабочий объем двигателя внутреннего сгорания представляет собой цилиндр с характерными размерами  $r_0$ ,  $L_a$ , где  $r_0$  — внутренний радиус цилиндра,  $L_a$  — высота цилиндрического пространства в начальный момент такта сжатия,  $P_0$  — высота цилиндрического пространства в конце такта сжатия (рис. 1). В процессе наполнения воздушный заряд из-за конструктивных особенностей

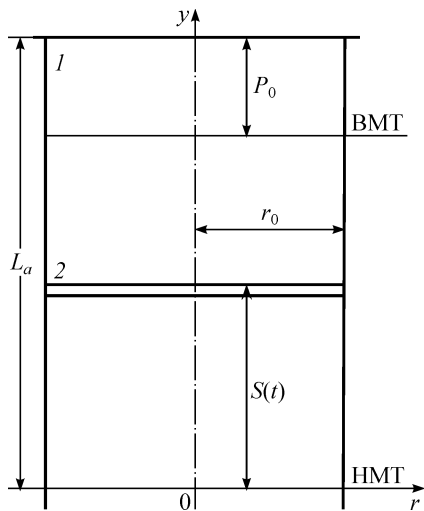


Рис. 1. Система координат с определяющими параметрами цилиндра ДВС.

1 — цилиндр с крышкой, 2 — поршень, НМТ — нижняя мертвая точка, ВМТ — верхняя мертвая точка. Высота цилиндрического пространства:  $L_a$  — в начальный момент такта сжатия,  $P_0$  — в конце такта сжатия,  $S(t)$  — функция перемещения поршня от времени.

впускного тракта получает вращательное движение. Форму закрутки в начальный момент периода сжатия будем считать известной.

Далее положим, что угловая скорость движения воздушного заряда на всей ограничивающей его поверхности падает до нуля вследствие выполнения условия прилипания. Затем, благодаря действию сил

вязкого трения и турбулентного сопротивления, вращение вихревого воздушного заряда, по мере продвижения поршня от НМТ (нижней мертвой точки) к ВМТ (верхней мертвой точке) затухает, и происходит перестройка поля скорости движения.

Найдем аналитическое решение исследуемой краевой задачи, сопоставим его с экспериментальными данными и проследим за динамикой исследуемых процессов.

Выберем систему координат в соответствии с рис. 1 и примем известной степень сжатия  $\varepsilon$ . Полагаем, что перемещение поршня от НМТ к ВМТ записывается в следующей известной форме [3]:

$$S(t) = R_k [1 - \cos(\omega t) - \lambda/4 (1 - \cos(2\omega t))], \quad (1)$$

где  $S(t)$  — ход поршня на такте сжатия,  $\lambda$ ,  $R_k$  — механические параметры ДВС,  $\omega$  — угловая скорость вращения коленчатого вала.

Для решения поставленной задачи воспользуемся полученным в [1] модельным уравнением, которое описывает вихревое движение воздушного заряда в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial V_\varphi(t, r, y)/\partial t = (v + \varepsilon_r(t))[\partial^2 V_\varphi(t, r, y)/\partial r^2 + \\ + (\partial V_\varphi(t, r, y)/\partial r)/r - V_\varphi(t, r, y)/r^2 + \partial^2 V_\varphi(t, r, y)/\partial y^2], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $V_\varphi(t, r, y)$  —  $\varphi$ -ая компонента вектора скорости;  $\varepsilon_r(t)$  — усредненное по объему значение функционального коэффициента вихревой вязкости;  $v$  — кинематическая вязкость;  $r, y$  — радиальная и осевая координаты соответственно;  $t$  — время.

Сформулируем условия однозначности в поставленной задаче в цилиндрической системе координат, показанной на рис. 1. В силу условия прилипания на всей поверхности внутрицилиндрического объема имеем:

$$V_\varphi(t, r, L_a) = 0, \quad V_\varphi(t, r, S(t)) = 0, \quad V_\varphi(t, r_0, y) = 0. \quad (3)$$

Из условия симметрии движения воздушного заряда следует считать, что на оси цилиндра

$$V_\varphi(t, 0, y) = 0. \quad (4)$$

Начальное условие закрутки воздушного заряда зададим в виде

$$V_\varphi(0, r, y) = \phi(r, y), \quad (5)$$

где  $\phi(r, y)$  — в общем случае непрерывная функция.

Приведем краевую задачу (2)–(5) к безразмерному виду с помощью соотношений:

$$r_1 = r/r_0, \quad y_1 = (y - S(t))/(L_a - S(t)), \quad W_\varphi = V_\varphi/V_0, \quad \phi(r_1, y_1) = \phi(r, y)/V_0, \quad t_1 = t/t_0, \quad (6)$$

где  $t_0$  — масштаб времени, соответствующий периоду сжатия,  $V_0$  — максимальная скорость закрутки.

В соответствии с введенными безразмерными комплексами (6) приведем уравнение (2) к виду

$$\begin{aligned} \partial W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/\partial t_1 + (y_1 - 1) z(t_1) \partial W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/\partial y_1 = \alpha(t_1) [\partial^2 W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/\partial r_1^2 + \\ + (\partial W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/\partial r_1)/r_1 - W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/r_1^2 + \\ + \beta(t_1) \partial^2 W_\varphi(t_1, r_1, y_1)/\partial y_1^2], \end{aligned} \quad (7)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} z(t_1) = dS(t_1)/dt_1 t_0/(L_a - S(t_1)), \quad \alpha(t_1) = (v + \varepsilon_i(t_1)) t_0/r_0^2, \\ \beta(t_1) = r_0^2/(L_a - S(t_1))^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом условия однозначности (3)–(5) переписуются в форме:

$$\begin{aligned} W_\varphi(t_1, r_1, 1) = 0; \quad W_\varphi(t_1, r_1, 0) = 0; \quad W_\varphi(t_1, 1, y_1) = 0, \\ W_\varphi(t_1, 0, y_1) = 0, \\ W_\varphi(0, r_1, y_1) = \phi(r_1, y_1), \\ L = \{r_1 \in [0, 1], y_1 \in [0, 1]\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $L$  — область внутрицилиндрического пространства в фиксированный момент времени.

Итак, дифференциальное уравнение (7) в частных производных совместно с краевыми условиями (9) образуют замкнутую краевую задачу. Следовательно, для каждой точки  $(r_1, y_1) \in L$  в фиксированный момент времени она имеет единственное нетривиальное решение [4].

Предлагается следующий способ построения решения краевой задачи (7), (9). Пусть она имеет решение в следующем виде:

$$W_\varphi(t_1, r_1, y_1) = \eta(t_1) R(r_1) J_1(\mu r_1) \exp(-A(r_1) t_1) \chi(y_1), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \eta(t_1) = \alpha(t_1)/\alpha(0), \\ \chi(y_1) = (1 - y_1)^y y_1^y, \end{aligned} \quad (11)$$

$$A(r_1) = \sum_{k=0}^N [C_k r_1^k], \quad (12)$$

$\mu, \gamma$  — опытные константы,  $A(r_1)$  — полином с набором неизвестных констант  $C_k$ ,  $R(r_1)$  — эмпирический полином,  $J_1(\mu r_1)$  — функция Бесселя первого порядка.

Потребуем, чтобы предполагаемое решение (10) с учетом (11), (12) для компоненты скорости  $W_\varphi(t_1, r_1, y_1)$  удовлетворяло всем граничным и начальному условиям (9), а также уравнению движения (7) как в любой фиксированной точке  $s_0$  ( $s_0 \in L$ ), так и на границах внутрицилиндрического пространства. Тогда в точке  $s_0$  можно полагать ее координаты постоянными, а постоянные коэффициенты  $C_k$  в полиноме (12) — неизвестными. В силу принятых предположений для выбранной точки система дифференциальных уравнений (7), (9) сведется к нелинейной алгебраической системе уравнений, в которой в роли переменных выступят не прежние переменные ( $t_1, r_1, y_1$ ), а введенные константы  $C_k$ .

Полученная таким образом алгебраическая система уравнений будет иметь одно нетривиальное вещественное решение в силу единственности решения краевой задачи (7), (9).

Далее по найденным значениям констант определяется значение угловой компоненты скорости  $W_\varphi(t_1, r_1, y_1)$  в любой выбранной точке  $s_0$  ( $s_0 \in L$ ). Проводя по указанной методике соответствующие расчеты для других точек, можно получить количественную картину поля скоростей воздушного потока в любой фиксированный момент времени исследуемого процесса.

В уравнении (7), а также в предполагаемом решении (10) остается пока неизвестной величина функционального коэффициента вихревой вязкости  $\varepsilon_i(t_1)$ , которая является определяющим параметром динамического состояния пространственно-временной структуры воздушного заряда на такте сжатия. Поскольку в научной литературе отсутствуют надежные теоретические или экспериментальные данные по этому вопросу, целесообразно, по аналогии с работой [1], воспользоваться полуэмпирическим методом для нахождения  $\varepsilon_i(t_1)$ . Обработка расчетной зависимости (10) с экспериментальными данными, взятыми из работы [5], позволила получить следующую для него зависимость:

$$\varepsilon_i(t_1) = Q_0 U_\varphi(t_1) r_0 10^{-4}, \quad (13)$$

где  $Q_0$  — опытная константа,  $U_\varphi(t_1)$  — усредненное по объему значение скорости  $W_\varphi(t_1, r_1, y_1)$  воздушного заряда на такте сжатия.

Из рис. 2 следует, что зависимость (13) имеет монотонно убывающий характер и удовлетворительно аппроксимирует экспериментальный материал: среднеквадратичная ошибка составила менее 7%.

На рис. 3, а – е приведены расчетные зависимости радиального распределения угловой скорости  $V_0 W_\varphi(t_1, r_1, y_1)$  в плоскости, соответствующей середине свободного пространства в конце периода сжатия ( $P_0/2$ ), для двигателя Ч7,8/8,3 в различные моменты поворота коленчатого вала. На этих рисунках в области значений

$r_1 \leq 0,7$  имеет место удовлетворительное совпадение расчетов по формуле (10) с опытным материалом [5]. Однако при  $r_1 > 0,7$  сравниваемые величины расходятся,

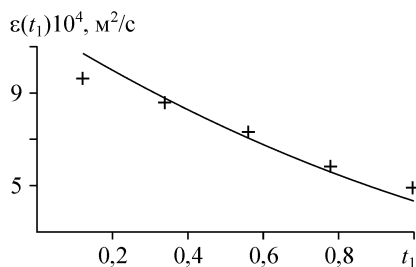


Рис. 2. Сопоставление теоретического (линия) и экспериментального (точки) коэффициентов вихревой вязкости на протяжении периода сжатия для ДВС Ч7,8/8,3.

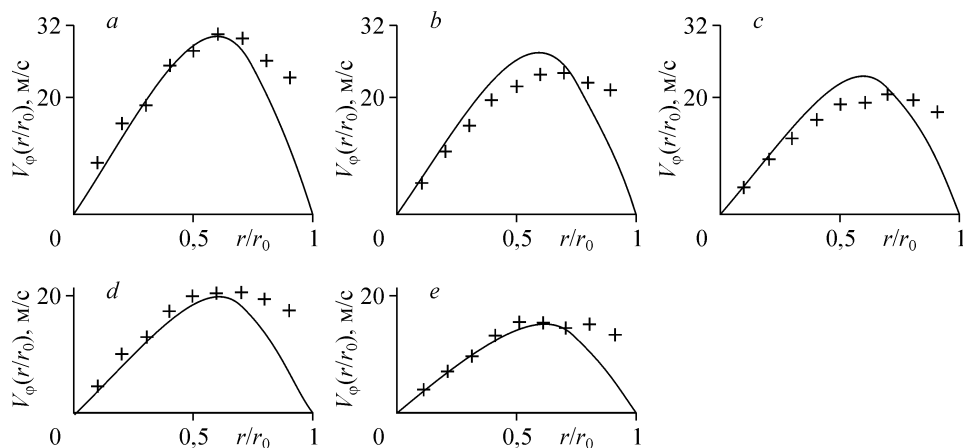


Рис. 3. Сопоставление радиальных теоретического (линия) и экспериментального ([5], точки) распределений угловой скорости воздушного заряда для различных значений угла поворота коленчатого вала  $\varphi$  на такте сжатия для ДВС Ч7,8/8,3, в середине свободного пространства ( $P_0/2$ ).

$\varphi = 200^\circ$  (a),  $240^\circ$  (b),  $280^\circ$  (c),  $320^\circ$  (d),  $360^\circ$  (e).

что свидетельствует о том, что в общем случае необходимо учитывать зависимость вихревой вязкости  $\varepsilon_i(t_1)$  от координат.

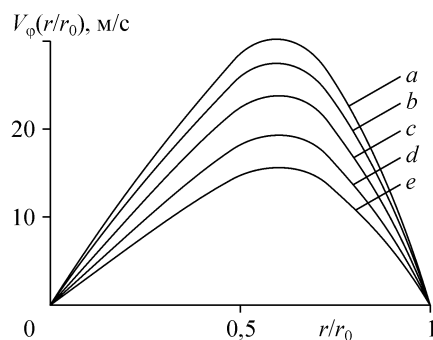
Общий характер радиального распределения угловой скорости для двигателя Ч7,8/8,3 в том же сечении в зависимости от продвижения поршня от НМТ к ВМТ показан на рис. 4.

На рис. 5, a – e представлено изменение угловой скорости для этого же двигателя по высоте внутрицилиндрового пространства в различные моменты ПКВ при  $r_1 = 0,6$ . По аналогии с вращением квазитвердого тела в начальный момент времени такта сжатия принято допущение о постоянстве угловой скорости воздушного заряда по высоте цилиндра ДВС. Однако по мере продвижения поршня от НМТ к ВМТ происходит деформация осевого распределения угловой скорости, что подтверждается в исследовании [2]. В отличие от данных работы [1] в настоящем исследовании наблюдается нарушение симметрии осевого профиля угловой скорости, что вызвано учетом движения поршня.

При постановке исследуемой задачи был сделан ряд физических и математических допущений в выводе определяющего уравнения движения. Тем не менее, как показывает сопоставление теоретических и экспериментальных данных, наблюдается удовлетворительное количественное и качественное совпадение расчетно-опытных значений угловой скорости движения. Это позволяет утверждать, что усреднение величины вихревой вязкости для всего внутрицилиндрового пространства является вполне приемлемой процедурой, которая не приводит к грубым нарушениям физической картины исследуемого процесса.

Рис. 4. Радиальное распределение угловой скорости воздушного заряда для различных значений угла поворота коленчатого вала  $\varphi$  на такте сжатия для ДВС Ч7,8/8,3.

$\varphi = 200^\circ$  (a),  $240^\circ$  (b),  $280^\circ$  (c),  $320^\circ$  (d),  $360^\circ$  (e).



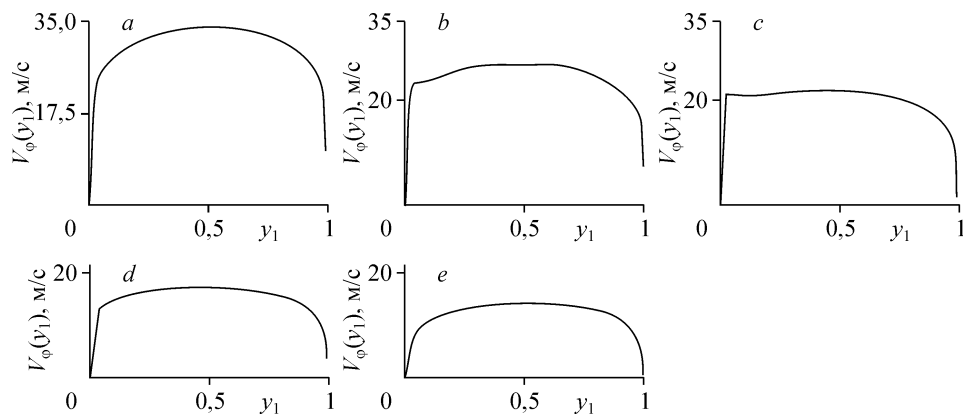


Рис. 5. Осевое распределение угловой скорости воздушного заряда для различных значений угла поворота коленчатого вала  $\varphi$  на такте сжатия для ДВС Ч7,8/8,3, при  $r/r_0 = 0,6$ .

$\varphi = 200^\circ$  (a),  $240^\circ$  (b),  $280^\circ$  (c),  $320^\circ$  (d),  $360^\circ$  (e).

Сравнительный анализ двух аналитических решений, полученных в настоящей статье и в работе [2], показывает, что они практически совпадают. Небольшое количественное расхождение вызвано различием в задании начального распределения закрутки воздушного заряда.

Таким образом, разработанный расчетно-аналитический метод может быть использован для всестороннего анализа исследуемого процесса закрутки воздушного заряда в цилиндрах ДВС на такте сжатия. С помощью предложенного метода достигается высокая точность результата в конкретной точке, что позволяет распространить его на решение других краевых задач с любым набором определяющих уравнений, начальных и граничных условий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Закржевский В.П., Лебедев О.Н., Рудин С.Н. Математическая модель процесса вихревого движения воздушного заряда в цилиндре двигателя // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1982. — Вып. 3, № 13. — С. 81–86.
2. Куделин О.Г., Лебедев О.Н., Рудин С.Н. Анализ вихревого движения воздушного заряда в цилиндре ДВС // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1984. — Вып. 3, № 16. — С. 130–136.
3. Ваншейдт В.А. Судовые двигатели внутреннего сгорания. — Л.: Судостроение, 1977. — 391 с.
4. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. — М.: Наука, 1981. — 366 с.
5. Johnston S., Robinson C., W., Rorke W.C., Smith J.K., Witze P.O. Application of laser diagnostics to injected engine // SAE Techn. Pap. — 1979. — № 790 092. — 18 p.

Статья поступила в редакцию 1 февраля 2005 г.