

ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКО-УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

А. М. Локощенко, С. А. Шестериков

(Москва)

Исследуется поведение шарнирно закрепленного стержня с начальным прогибом, к концам которого достаточно быстро прикладывается сжимающая сила, остающаяся неизменной во времени. Предполагается, что материал стержня таков, что в момент нагружения весь стержень находится в упругом состоянии. После этого при напряжениях, больших некоторого, к упругим деформациям добавляются деформации установившейся ползучести. Такая схема может найти хорошее экспериментальное подтверждение, например, в опытах Вуда, Вильямса, Ходжа и Огдена над медно-бериллиевой проволокой при невысоких температурах и высоких напряжениях [1]. Проведенное исследование непосредственно примыкает к решению задачи о выпучивании вязко-упругого идеально-пластического стержня [2].

§ 1. Будем исследовать процесс выпучивания в условиях ползучести шарнирно-закрепленного стержня длиной l , имеющего начальное искривление, сжатого постоянной силой P . Для простоты выкладок примем, что стержень имеет прямоугольное сечение шириной b и высотой $2h$. Прогиб стержня аппроксимируем одной полуволной синусоиды и уравнения равновесия удовлетворим в средней точке. Считаем, что напряжения σ_1 и деформации ε_1 связаны следующим образом:

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 \quad (|\sigma_1| \leq \sigma_T), \quad E \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} + BE (|\sigma_1| - \sigma_T) \text{sign } \sigma_1 \quad (|\sigma_1| > \sigma_T) \quad (1.1)$$

Здесь E — модуль Юнга, σ_T — статический предел текучести, B — характеристика ползучести. Напряжения и деформации сжатия будем считать положительными. Если приложенная сила такова, что в некоторых волокнах стержня $|\sigma_1| > \sigma_T$, то напряжения со временем могут перераспределяться по сечению стержня, при этом граница (или две границы) между зонами упругости и вязкоупругости движется.

Уравнения равновесия для стержня имеют вид

$$P = \int_S \sigma_1 dS, \quad -P(a + a_{00}) = \int_S \sigma_1 z_1 dz_1$$

где S — площадь поперечного сечения, z_1 — координата по сечению S в плоскости изгиба, отсчитываемая от нейтральной оси, a_{00} — начальный прогиб в середине стержня, $a(t)$ — приращение прогиба. Примем гипотезу плоских сечений:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - \frac{\rho}{h^2} az_1, \quad \rho = \frac{\pi^2 h^2}{l^2}$$

где ε_{10} — деформация нейтральной оси. Введем безразмерные параметры

$$\sigma = \frac{3\sigma_1}{\rho E}, \quad \gamma = \frac{3\sigma_T}{\rho E}, \quad \beta = \frac{P}{P_0}, \quad z = \frac{z_1}{h}, \quad u = \frac{a}{h}, \quad \varepsilon = \frac{3}{\rho} \varepsilon_1, \quad t' = \frac{t}{B} \quad \left(P_0 = \frac{2\pi^2 E b h^3}{3l^2} \right)$$

Тогда уравнения равновесия и гипотеза плоских сечений принимают вид

$$2\beta = \int_{-1}^1 \sigma dz, \quad -2\beta(u + u_{00}) = \int_{-1}^1 \sigma z dz \quad (1.2)$$

§ 2. Исследуем упруго-идеально-пластическое состояние сжатого стержня. Рассмотрим стержень из упруго-идеально-пластического материала (со статическим пределом текучести), сжатый силой 2β . Точное решение этой задачи дано в работе [3], здесь использовано приближенное решение в удобной для исследований форме. Сначала рассмотрим случай, когда по сечению имеется одна пластическая зона. Тогда

$$\sigma = \gamma \quad (-1 \leq z \leq b_1), \quad \sigma = \varepsilon_0 - 3uz \quad (b_1 \leq z \leq 1) \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.2), получим

$$u_{00} = \left[\frac{(b_1 + 2)}{3\beta} - \frac{4}{3(1 - b_1)^2} \right] (\gamma - \beta) \quad (2.2)$$

Полагая $b_1 = -1$, получим зависимость между параметрами β , γ и начальным прогибом u_{00} , соответствующую моменту появления пластичности на вогнутой стороне стержня

$$u_{00} = \frac{(1 - \beta)(\gamma - \beta)}{3\beta} \quad (2.3)$$

При дальнейшем росте β при $u_{00} < \beta_k^{1/2}$, где β_k определяется из условия $(1 - \beta_k^{1/2})\gamma = \beta_k$, наступает разрушение, соответствующее условию $\partial\beta / \partial u = 0$, откуда получим

$$u_{00} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta^{1/2}} \right) \quad (2.4)$$

Отметим, что β_k является границей двух областей: в первой предельное состояние наступает при наличии одной пластической области по сечению; во второй — при двух. В случае, когда $u_{00} > \beta_k^{1/2}$, при β , удовлетворяющем соотношению

$$u_{00} = \frac{\gamma}{3\beta} + \frac{1}{3} - \frac{2\beta}{3\gamma} - \frac{\gamma^2}{3(\gamma - \beta)} \quad (2.5)$$

появляется пластичность на выпуклой стороне стержня. При дальнейшем росте β в сечении имеются две пластические области, разделенные упругим ядром. При нагрузках, больших, чем определяемые по соотношению (2.5), упругое ядро внутри стержня с обеих сторон окружено пластическими зонами. В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma &= \gamma \quad (-1 \leq z \leq b_1), & \sigma &= \varepsilon_0 - 3uz \quad (b_1 \leq z \leq b_2) \\ & & \sigma &= -\gamma \quad (b_2 \leq z \leq 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (1.2), получаем

$$\frac{\gamma^3}{27u^2} + \frac{\beta^3}{\gamma} - \gamma + 2\beta(u + u_{00}) = 0 \quad (2.7)$$

Используя условие $\partial\beta / \partial u = 0$, можно найти нагрузку, при которой произойдет разрушение

$$u_{00} = \frac{(\gamma - \beta)(1 - \beta^{1/2})}{\beta} \quad (2.8)$$

§ 3. Рассмотрим процесс выпучивания стержня при наличии по сечению одной вязкой области.

Прежде чем начать исследование этого случая, необходимо отметить, что в рамках принятых гипотез о свойствах материала для любого заданного u_{00} существует некоторая область нагрузок, для которых в начальном (упругом) распределении напряжений всюду $|\sigma| \leq \gamma$; следовательно, при этой нагрузке не появляются зоны вязкого течения и прогибы во времени не меняются.

Рассмотрим случай, когда этот предел пройден. Примем тогда, что распределение напряжений по сечению при $t = 0$ удовлетворяет неравенствам $\sigma \geq \gamma$ при $-1 \leq z \leq c_0$ и $|\sigma| \leq \gamma$ при $c_0 \leq z \leq 1$. Разобьем поперечное сечение стержня на три зоны. При $-1 \leq z \leq c_0$ для всех $t \geq 0$ выполняются соотношения вязко-упругости. Во второй зоне $c_0 \leq z \leq c$, где c — подвижная граница между упругой и вязко-упругой зонами и $\sigma(c) = \gamma$, деформации ползучести имеют место при $t > \tau(z)$, где $\tau(z)$ — момент прохождения $c(t)$ через точку z . В третьей зоне $c \leq z \leq 1$ при $t \geq 0$ имеют место только упругие деформации.

Перепишем дифференциальное соотношение $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \dot{\sigma} - \dot{\gamma}$ в интегральной форме (точкой обозначена производная по t). Получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_0^t \varepsilon e^t dt + \gamma(1 - e^{-t}) \quad (-1 \leq z \leq c_0) \\ \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_{\tau}^t \varepsilon e^t dt + \gamma(1 - e^{\tau-t}) \quad (c_0 \leq z \leq c) \\ \sigma &= \varepsilon \quad (c \leq z \leq 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из условия $\sigma(c) = \gamma$ имеем $\varepsilon_0 = \gamma + 3uc$. Для определения функций c и u вставим выражения (3.1) в уравнения равновесия (1.2). Для преобразования интегральных соотношений в дифференциальные умножим их на e^t , продифференцируем и разделим на e^t . В итоге получим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \frac{(1-c)^2}{4} - \left[\frac{(1+c)^2(2-c)}{4(1-\beta)} - 1 \right] c - \frac{(c-c_0)\beta u_{00}}{(1-\beta)u}, & \dot{c}_0 &= -\frac{(\gamma-\beta)(1-\beta)}{3\beta u_{00}} \\ \dot{u} &= \left[\frac{(1+c)^2(2-c)}{4(1-\beta)} - 1 \right] u + \frac{\beta u_{00}}{(1-\beta)}, & \dot{u}_0 &= \frac{\beta u_{00}}{(1-\beta)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Дальнейший анализ качественных особенностей поведения рассматриваемого стержня (при постоянном β) будем проводить, используя фазовую диаграмму $\beta \sim u_{00}$.

Фазовая диаграмма имеет две основные разновидности. Фиг. 1 соответствует случаю $\gamma < 1$, а фиг. 2 — случаю $\gamma > 1$. Кривая 1 на обеих фигурах определяется соотношением (2.3) и отделяет область А, в которой нет вязкого течения, и, следовательно, стержень ведет себя как идеально упругий.

Кривая 2 до точки сопряжения с кривыми 3 и 4 определяется уравнением (2.5). Легко показать, что точки кривой 2 соответствуют такому состоянию стержня, при котором $\sigma(1) \rightarrow -\gamma$ при $t \rightarrow \infty$. Кривая 3 определяется соотноше-



Фиг. 1

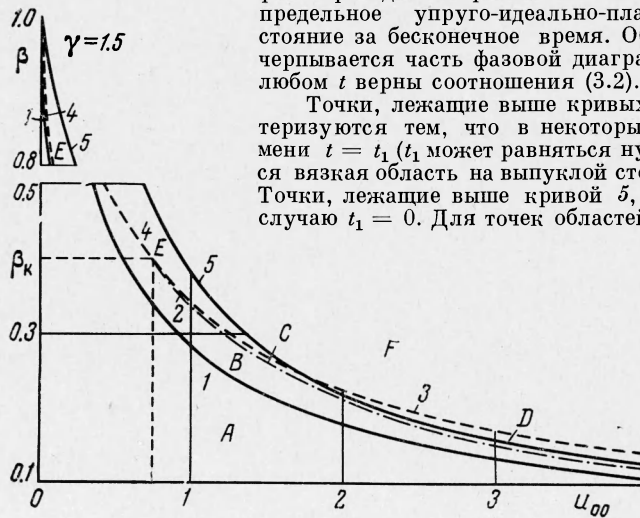
нием (2.4). В области В, ограниченной указанными кривыми, все время работаю соотношения (3.2). Для области В эпюра напряжений при любых t такова, что всюду $\sigma \geq -\gamma$. В этом случае имеет место предельное состояние при $t \rightarrow \infty$, характеризуемое условием $u = c = 0$.

Используя это условие, из (3.2) найдем уравнение для предельного значения c_{∞}

$$3\beta u_{00} (1 - c_{\infty})^2 = [4(1 - \beta) - (1 + c_{\infty})^2 (2 - c_{\infty})] (\gamma - \beta) \quad (3.3)$$

Легко показать, что (3.3) совпадает с (2.2) при замене c_{∞} на b_1 . Значение u_{∞} можно найти из второго уравнения (3.2), положив $u = 0$. Следовательно, в области В стержень асимптотически устойчив. При этом имеет место некоторое вязкое течение, которое переводит стержень из чисто-упругого в предельное упруго-идеально-пластическое состояние за бесконечное время. Областью В исчерпывается часть фазовой диаграммы, где при любом t верны соотношения (3.2).

Точки, лежащие выше кривых 2 и 3, характеризуются тем, что в некоторый момент времени $t = t_1$ (t_1 может равняться нулю) появляется вязкая область на выпуклой стороне стержня. Точки, лежащие выше кривой 5, соответствуют случаю $t_1 = 0$. Для точек областей E и C при



Фиг. 2

$t < t_1$ верны соотношения (3.2). Значение времени t_1 определяется из условия $\sigma(1, t_1) = -\gamma$.

§ 4. Рассмотрим второй основной случай, когда на обеих сторонах стержня развиваются вязкие области с напряжениями разных знаков, с границами c на вогнутой стороне и d — на выпуклой. Преобразовывая (1.1) к интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_{t_1}^t \varepsilon e^t dt + \gamma(1 - e^{t_1-t}) \quad (-1 \leq z \leq c_0) \\ \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_{\tau_1(z)}^t \varepsilon e^t dt + \gamma(1 - e^{\tau_1-t}) \quad (c_0 \leq z \leq c) \\ \sigma &= \varepsilon \quad (c \leq z \leq d) \\ \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_{\tau_2(z)}^t \varepsilon e^t dt - \gamma(1 - e^{\tau_2-t}) \quad (d \leq z \leq d_0) \\ \sigma &= \varepsilon - e^{-t} \int_{t_1}^t \varepsilon e^t dt - \gamma(1 - e^{t_1-t}) \quad (d_0 \leq z \leq 1) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Кроме того, для c и d легко получить соотношение

$$3u(d - c) = 2\gamma \tag{4.2}$$

Для определения функций u , c и d имеем (4.1), (4.2) и уравнения равновесия (1.2), которые приводятся к двум уравнениям для c и d

$$\begin{aligned} c' &= -\frac{\beta c}{(1-\beta)} + \frac{(d-c)}{4(1-\beta)} \left[\left(\frac{2\beta}{\gamma} - d - c \right) (1-\beta) - \frac{6\beta u_{00} c}{\gamma} + 3c - cd^2 - c^2d - c^3 \right] \\ d' &= -\frac{\beta d}{(1-\beta)} + \frac{(d-c)}{4(1-\beta)} \left[\left(\frac{2\beta}{\gamma} - d - c \right) (1-\beta) - \frac{6\beta u_{00} d}{\gamma} + 3d - cd^2 - c^2d - d^3 \right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Начальные условия для системы (4.3) могут быть двух видов. Если на фазовой диаграмме точка лежит в областях F и D , то $t_1 = 0$ и

$$c(0) = \frac{(1-\beta)(\beta-\gamma)}{3\beta u_{00}}, \quad d(0) = \frac{(1-\beta)(\beta+\gamma)}{3\beta u_{00}} \tag{4.4}$$

Если точка находится в областях E и C , то уравнения (4.3) имеют место при $t > t_1$ и начальное значение для c определяется по решению системы (3.2) при $t = t_1$, а $d(t_1) = 1$ — по определению.

Рассмотрим на фазовой диаграмме области C и D . Обе эти области характеризуются тем, что для u_{00} и β , принадлежащих этим областям, имеется некоторое конечное предельное значение для c , d и u при $t \rightarrow \infty$. Это вытекает из существования предельных значений (4.3) при условии $c' = d' = 0$ и при $c \neq d$. Легко показать, что предельные значения для c , d и u совпадают с соответствующими параметрами при решении упруго-идеально-пластической задачи. Следовательно, области C и D также являются областями асимптотической устойчивости. Кривые 3 и 4 (кривая 4 определяется соотношением (2.8)) отделяют области устойчивости от областей, где имеет место неограниченный рост прогибов во времени (при $t \rightarrow \infty$). Этот вывод следует из анализа (4.3) с учетом (4.2); отметим также, что эта граница совпадает с границей, соответствующей условию $\partial\beta / \partial u = 0$ при упруго-идеально-пластической схеме поведения материала.

В области E имеем $t_1 > 0$ и $t_1 = 0$ в области F . В этих областях имеет место неограниченный рост прогиба u при $t \rightarrow \infty$. При достаточно больших временах u растет со временем по экспоненте как для линейно-вязко-упругого стержня. Следовательно, в областях E и F реальный стержень может работать только ограниченное время (например, при заданных условиях на прогибы). Области E и F разделены кривой 5, которая определяется из условия $\sigma(1, 0) = -\gamma$.

В случае, когда $\gamma < 1$, на фазовой диаграмме имеется дополнительная область G , характеризующаяся тем, что в начальный момент всюду $\sigma > \gamma$ и вязкое течение охватывает все поперечное сечение стержня. Используя в упругом решении условие $\sigma(1) = \gamma$, получим уравнение кривой 6

$$u_{00} = \frac{(1-\beta)(\beta-\gamma)}{3\beta} \tag{4.5}$$

Для стержня с u_{00} и β из области G зависимость u от t при малых t имеет вид

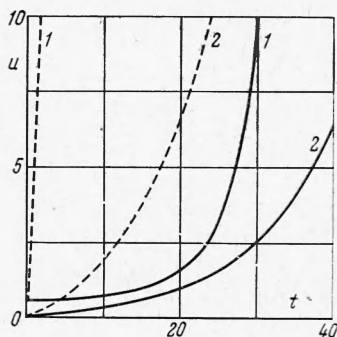
$$u = \frac{u_{00}}{(1-\beta)} \left[\exp \frac{\beta t}{(1-\beta)} - 1 + \beta \right] \tag{4.6}$$

Соотношение (4.6) имеет силу при $t \leq t_2$, при этом t_2 определяется из условия $\sigma(1, t_2) = \gamma$. При $t > t_2$ на выпуклой стороне стержня появляется упругая зона и начинает работать уравнение типа (3.2). При $t = t_1$ выполняется условие $\sigma(1, t_1) = -\gamma$. При $t > t_1$ определяющей становится система типа (4.3), и при $t \rightarrow \infty$ для любого $u_{00} \neq 0$ из этой области $u \rightarrow \infty$. Системы нелинейных уравнений (3.2) и (4.3) можно решать только численно. Для ряда наиболее характерных значений параметров γ , β и u_{00} эти системы были решены на ЭВЦМ «Наири». На фиг. 3 сплошными линиями представлены вычисленные кривые $u(t)$ для следующих случаев:

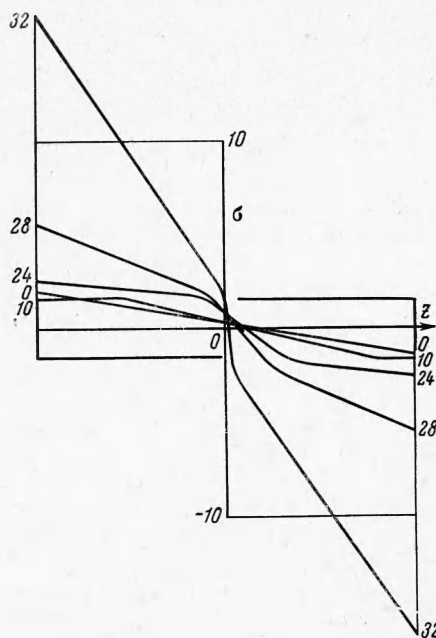
- индексом 1 обозначена кривая для $\gamma = 1.5, \beta = 0.25, u_{00} = 1.8$
 индексом 2 соответственно $\gamma = 0.2, \beta = 0.1, u_{00} = 1$

Для сравнения на этом же графике пунктиром показаны кривые $u(t)$ при условии $\gamma = 0$ (чисто-вязко-упругий стержень). Видно, что даже в случае, когда нет предельного состояния, но точка на фазовой диаграмме близка к области асимптотической устойчивости, имеет место резкое расхождение вычисленных кривых с кривыми для чисто-вязко-упругого стержня. При этом (например, кривая 1) для начального участка по t прогиб u растет очень медленно (почти линейно со временем), в отличие от экспоненциального роста для вязко-упругого стержня.

Представляет интерес изменение во времени эпюры напряжений по сечению стержня. В качестве одного из наиболее интересных случаев на фиг. 4 показана ди-



Фиг. 3



Фиг. 4

намика изменения эпюры σ для случая $\gamma = 1.5, \beta = 0.25, u_{00} = 1.8$ (цифрами справа и слева обозначены соответствующие безразмерные времена). Из графика (полученного также численно на машине «Наири») следует, что начальное линейное (упругое при $t = 0$) распределение напряжений при малых t стремится к упруго-идеально-пластическому. В этом периоде преобладают «релаксационные» эффекты.

При дальнейшем росте прогибов увеличивается изгибающий момент, и распределение напряжений снова стремится к линейному по сечению, за исключением переходов у границ между упругой и вязко-упругой зонами. При этом граница c переходит 0 и при дальнейшем росте прогибов будет стремиться к 0 справа. Граница d монотонно приближается к 0 справа (оставаясь всегда правее c). Из рассмотрения большого числа случаев следует, что при отсутствии асимптотической устойчивости $c \rightarrow +0$ независимо от знака $c(0)$.

Поступила 9 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Wood R. A., Williams D. N., Hodge W., Ogden H. R. Creep behaviour of copper — 2% beryllium wire at slightly elevated temperatures. «Trans. Amer. Soc. Metals», 1964, vol. 57, p. 362—364.
2. Шестериков С. А. Выпучивание при ползучести с учетом мгновенных пластических деформаций. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Ježek K. Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, Wien, 1937.