

К ЗАДАЧЕ ОБ УГЛОВОМ ПОРШНЕ

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Рассматривается задача о плоском нестационарном движении газа за поршнем, имеющим форму двугранного угла. В предположении малости угла излома поршня производится линеаризация задачи. Для линеаризованного уравнения двойных волн решаются смешанные задачи и задача Гурса в области его гиперболичности, а затем смешанная краевая задача в области эллиптичности. Решения получены в элементарных функциях и квадратурах.

Рассматриваемая задача исследовалась в плоскости годографа в [1] и [2]. В работе [1] рассмотрен случай, когда скорость поршня достаточно велика и происходит истечение газа в вакуум. В работе [2] получено численное решение задачи в области гиперболичности уравнения двойных волн.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Пусть политропный газ с уравнением состояния $p = a^2 \rho^\gamma$ (p — давление, γ — показатель адиабаты, $a^2 = \text{const}$) в момент $t = 0$ покоится внутри двугранного угла, образованного двумя пересекающимися плоскостями P_1 и P_2 . Рассмотрим задачу о нахождении нестационарного плоского течения газа при выдвигании двугранного угла из газа с постоянной скоростью U_0 , направленной по биссектрисе угла между плоскостями P_1 и P_2 . Предполагается, что этот угол меньше π .

Решение будем искать в классе конических течений. При предположении отсутствия ударных волн эти течения будут изэнтропическими и потенциальными. Искомые компоненты скорости u , v и скорость звука c будут зависеть от двух независимых переменных $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, где x , y — декартовы координаты на плоскости, а t — время. При малых углах α излома поршня могут возникать ударные волны с силой разрыва порядка α , но в линейном приближении движение можно считать изэнтропическим, так как скачок энтропии должен иметь порядок α^3 .

Рассмотрим конические, безвихревые и изэнтропические течения политропного газа. Введем независимые переменные $\xi = x/t$, $\eta = y/t$ и представим искомые функции в виде

$$u = \xi + U(\xi, \eta), \quad v = \eta + V(\xi, \eta), \quad p = P(\xi, \eta), \quad \rho = R(\xi, \eta) \quad (1.1)$$

Если ввести потенциал по формулам

$$\varphi_\xi = U, \quad \varphi_\eta = V \quad (1.2)$$

то основные уравнения двумерной газовой динамики приводятся к следующему квазилинейному уравнению, описывающему потенциальные конические течения

$$(U^2 - C^2)(\varphi_{\xi\xi} + 1) + 2UV\varphi_{\xi\eta} + (V^2 - C^2)(\varphi_{\eta\eta} + 1) = 0 \quad (1.3)$$

где

$$C^2 = (1 - \gamma)[\varphi + \frac{1}{2}(U^2 + V^2)] \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) является аналогом интеграла Бернулли. Выберем систему координат в плоскости течения, направив ось x по оси симметрии поршня, ось y — перпендикулярно, так, что начало координат в момент $t = 0$ совпадает с вершиной угла поршня Q . Картина движения в

плоскости $\xi\eta$ совпадает с картиной движения в плоскости xy в момент $t = 1$ (фиг. 1). При больших $|\eta|$ движение есть невозмущенная простая волна Римана

$$C = \left(\frac{2}{\gamma+1} C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi_1 \right), \quad U \cos \alpha - V \sin \alpha = -C \quad (1.5)$$

$$U \sin \alpha + V \cos \alpha = -\eta_1, \quad \xi_1 \in M_1$$

и постоянное течение

$$C = C_1 = C_0 + 1/2(\gamma - 1)U_0 \cos \alpha, \quad U \cos \alpha - V \sin \alpha = U_0 \cos \alpha - \xi_1$$

$$U \sin \alpha + V \cos \alpha = -\eta_1, \quad \xi_1 \in M_2 \quad (1.6)$$

$$(U_0 < 0, \xi_1 = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \eta_1 = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha,$$

$$M_1 = [C_0 + 1/2(\gamma + 1) U_0 \cos \alpha, C_0], M_2 = [U_0 \cos \alpha, C_0 + 1/2(\gamma + 1) U_0 \cos \alpha])$$

Здесь C_0 — скорость звука в покоящемся газе, U_0 — скорость поршня; в силу симметрии течения формулы приводятся только для $\eta \geq 0$. При этом как и во всем дальнейшем предполагается $\gamma \neq 3$; для $\gamma = 3$ решение строится аналогично.

В окрестности вершины Q угла поршня ищется течение типа двойной волны. Примыкание простой волны и постоянного течения к двойной волне происходит по характеристикам BE и BF , выходящим из точки B ($C_0 \sec \alpha, 0$). Уравнение характеристик для уравнения (1.3) имеет вид

$$(U^2 - C^2) d\eta^2 - 2UVd\xi d\eta + (V^2 - C^2)d\xi^2 = 0 \quad (1.7)$$

Используя известные вдоль BE значения U, V, C , интегрируем уравнение (1.7), в результате получаем уравнение отрезка BD

$$\eta_1^2 = -\frac{\gamma+1}{\gamma-3} C^2 + \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-3} \right) C_0^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} C^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \xi_1 \in M_1 \quad (1.8)$$

уравнение отрезка DE (1.9)

$$\eta_1 = \frac{1}{T} \left[\left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\gamma+1}{\gamma-3} \right) C_0^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} C_1^{\frac{2}{\gamma-1}} - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma-3} C_1 \right] (\xi_1 - U_0 \cos \alpha - C_1) + T$$

$$\xi_1 \in M_2$$

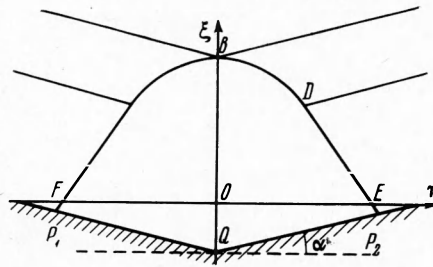
где C определено в (1.5) и постоянная $T = \eta_1$ — в точке D .

Таким образом, в точной постановке задача сводится к отысканию решения φ уравнения (1.3) в известной области, принимающего значение φ_0 на граничных характеристиках BE и BF и удовлетворяющего условию непротекания $\varphi_{\eta} n_1 + \varphi_{\xi} n_2 = 0$ на линии поршня EQF ($n = (n_1, n_2)$ — нормаль к линии поршня). Известный потенциал φ_0 задается формулой

$$\varphi_0 = -1/2\eta_1^2 - 1/2C^2 + C^2 (1 - \gamma)^{-1}, \quad \xi_1 \in M_1$$

$$\varphi_0 = -1/2\eta_1^2 - 1/2(U_0 \cos \alpha - \xi_1)^2 + C_1^2 (1 - \gamma)^{-1}, \quad \xi_1 \in M_2 \quad (1.10)$$

В точной постановке задача усложняется тем, что квазилинейное уравнение (1.3) имеет смешанный тип и внутри области $BEQF$ содержатся как области гиперболичности, так и области эллиптичности уравнения.



Фиг. 1

Далее рассматривается случай малых углов α . Положим

$$\varphi = \psi_0 + \alpha\psi \quad (\psi_0 = \varphi_0|_{\alpha=0}) \quad (1.11)$$

Здесь ψ_0 — потенциал невозмущенного движения, а ψ — искомый потенциал возмущений. Подставляя (1.11) в (1.3) и отбрасывая слагаемые, содержащие α во второй степени и выше, получаем уравнения на ψ

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi\right)\eta\psi_{\xi\eta} + \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \left(\frac{2}{\gamma+1}C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi\right)^2\right)\psi_{\eta\eta} - \left(\frac{2}{\gamma+1}C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi\right)\psi_{\xi\xi} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\eta\psi_{\eta\xi} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\psi = 0 \quad (1.12)$$

$$U_0 + C_1 \leq \xi \leq C_0$$

$$((U_0 - \xi)^2 - C_1^2)\psi_{\xi\xi} - 2(U_0 - \xi)\eta\psi_{\xi\eta} + (\eta^2 - C_1^2)\psi_{\eta\eta} = 0 \quad (1.13)$$

$$U_0 \leq \xi \leq U_0 + C_1$$

Уравнение (1.13) — смешанного типа, его характеристиками в области гиперболичности являются касательные к линии вырождения, задаваемой уравнением

$$(\xi - U_0)^2 + \eta^2 = C_1^2 \quad (1.14)$$

Здесь и далее C_1 — скорость звука в постоянном течении при $\alpha = 0$ (см. (1.6)). Характеристика MN (фиг. 2) уравнений (1.12), (1.13), соответствующая BE , задается уравнениями (1.8), (1.9) при $\alpha = 0$. Перенос условий с характеристики BE на характеристику MN и условия непротекания с линии EQ на HA приводит к следующей задаче для уравнений (1.12), (1.13): найти решение ψ , удовлетворяющее условиям

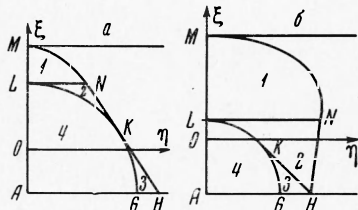
$$\psi|_{MN} = 2(\gamma+1)^{-1}(C_0 - \xi)\eta, \quad U_0 + C_1 \leq \xi \leq C_0 \quad (1.15)$$

$$\psi|_{MH} = -U_0\eta, \quad U_0 \leq \xi \leq U_0 + C_1$$

и условию $\psi_{\xi} = 0$ при $\xi = U_0$. Область определения решения разбивается на четыре подобласти. В области 1, ограниченной характеристикой MN и отрезком ML оси ξ , решается смешанная задача для уравнения (1.12). После решения этой задачи возникает задача Гурса в области 2, ограниченной характеристиками LN и NK (NH) (фиг. 2, а и б). В области 3 решается смешанная задача для уравнения (1.13), а затем, когда решение найдено в областях гиперболичности 1, 2, 3, решается смешанная краевая задача для (1.13) в области 4, причем функция ψ задается на линии вырождения типа уравнения, которая входит в границу области. Вид области 3 меняется в зависимости от скорости поршня U_0 и показателя адиабаты γ . При

$$U_0 = U_* = \frac{2C_0}{\gamma-1} \left(\left(2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma-1}{3-\gamma}} - 1 \right)$$

область 3 вырождается в точку, так как характеристика NH перпендикулярна линии $\xi = U_0$. При $U_0 < U_*$ область 3 ограничена характеристикой второго семейства, выходящей из точки H , и линией $\xi = U_0$. В дальнейшем различаем три случая: а) $U_0 > U_*$ (фиг. 2, а), б) $U_0 < U_*$ (фиг. 2, б), в) $U_0 = U_*$.



Фиг. 2

2. Решение в области 1. Если уравнение (1.12) привести к характеристическим переменным

$$z = \eta^2 \left(\frac{2}{\gamma+1} C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} + \frac{\gamma+1}{\gamma-3} \left(\frac{2}{\gamma+1} C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} \quad (2.1)$$

$$\tau = - \frac{\gamma+1}{\gamma-3} \left(\frac{2}{\gamma+1} C_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}}$$

то получившееся уравнение

$$\Psi_{z\tau} - \frac{1}{\gamma-3} \frac{(\gamma-1)z+2\tau}{\tau(z+\tau)} \Psi_z - \frac{1}{2(z+\tau)} \Psi_\tau + \frac{\gamma-1}{\gamma-3} \frac{1}{2\tau(z+\tau)} \Psi = 0 \quad (2.2)$$

интегрируется в квадратурах. Полагая

$$g = \Psi_z - \frac{1}{2(z+\tau)} \Psi \quad (2.3)$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на g

$$g_\tau - \frac{1}{\gamma-3} \frac{(\gamma-1)z+2\tau}{(z+\tau)\tau} g = 0 \quad (2.4)$$

Разрешая последовательно уравнения (2.3) и (2.4), получаем общее решение уравнения (1.12)

$$\Psi = \left(\left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \int_{a_1}^z \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta+\tau)^{\gamma/2}} + h(\tau) \right) \sqrt{z+\tau} \quad (2.5)$$

Здесь f и h — произвольные функции; переменные z и τ выражаются через ξ и η по формулам (2.1). Характеристика MN задается уравнением

$$z = a_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-3} C_0^{\frac{(\gamma-3)}{(\gamma-1)}}$$

поэтому в формуле (2.5) удобно взять постоянную $a_1 = a_0$. Удовлетворяя условию (1.15) на MN , определяем

$$h(\tau) = \frac{2}{\gamma-1} \left(C_0 - \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \right) \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{-1/2} \quad (2.6)$$

Из условия симметрии $\Psi_\eta = 0$ при $\eta = 0$ получаем интегральное уравнение Абеля для определения f

$$\int_{a_0}^{-\tau} \frac{f'(\xi) d\xi}{(\xi+\tau)^{\gamma/2}} = - \frac{1}{\gamma-1} \left(C_0 - \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \right) \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{-1/2} \quad (2.7)$$

Обращая интегральный оператор в правой части (2.7) и подставляя результат и выражение для $h(\tau)$ (2.6) в (2.5), получаем вид Ψ в области 1

$$\Psi = - \frac{2}{\pi(\gamma-1)} \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \int_{a_0}^z \frac{\sqrt{\xi-z}}{\tau+\xi} \left(C_0 - \left(\frac{\gamma-3}{\gamma+1} \xi \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \left(\frac{\gamma-3}{\gamma+1} \right)^{-1/2} \right) d\xi +$$

$$+ \frac{2\sqrt{z+\tau}}{\gamma-1} \left(C_0 - \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma-3)}} \right) \left(\frac{3-\gamma}{\gamma+1} \tau \right)^{-1/2} \quad (2.8)$$

Далее, используя найденное значение потенциала Ψ на характеристике LN , решаем задачу в области 2. Обозначим

$$\Psi_1(\eta / C_1) = \Psi(U_0 + C_1, \eta) \quad (2.9)$$

3. Решение задачи в области 2. Данные на характеристике MH имеют разрыв первой производной в точке N , как это следует из (1.15). Поэтому вдоль характеристики LN после решения задачи Гурса в области 2 производная φ_{ξ} будет иметь разрыв порядка α .

Перейдем в уравнении (1.13) к полярным координатам

$$\begin{aligned} \xi - U_0 &= r \cos \theta, & \eta &= r \sin \theta \\ r^2(r^2 - C_1^2)\psi_{rr} - C_1^2\psi_{\theta\theta} - C_1^2 r\psi_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Это уравнение допускает трехпараметрическую группу преобразований и, как следует из результатов работы [3] Л. В. Овсянникова, сводится к уравнению Эйлера — Пуассона. Применяя алгоритм, изложенный в статье [3], произведем следующие замены независимых переменных и функции

$$s = \operatorname{tg} \frac{\theta + \arccos(C_1/r)}{2}, \quad q = \operatorname{tg} \frac{\theta - \arccos(C_1/r)}{2}, \quad \psi = \frac{\chi}{sq+1} \quad (3.2)$$

$$0 \leq \arccos(C_1/r) < 1/2\pi$$

Уравнение (3.2) сведется к уравнению Эйлера — Пуассона

$$\chi_{sq} + \frac{1}{s-q}(\chi_s - \chi_q) = 0 \quad (3.3)$$

Общее решение уравнения (3.3) легко выписывается, а из (3.2) получаем общее решение уравнения (1.13)

$$\psi = \frac{s-q}{sq+1}(\omega'(q) + \omega_1'(s)) + \frac{2}{sq+1}(\omega(q) - \omega_1(s)) \quad (3.4)$$

Здесь ω и ω_1 — произвольные функции, а переменные s и q выражаются через ξ и η .

Зная общее решение, можно решить задачу Гурса в области 2. Характеристики LN и NK (MH), на которых задаются данные, в плоскости sq задаются уравнениями $q = 0$ и

$$s = s_0 = \left(\frac{\gamma+1}{3-\gamma} - \frac{\gamma+1}{3-\gamma} C_0^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} C_1^{-\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} \right)^{1/2}$$

соответственно. На этих характеристиках функция ψ известна

$$\psi|_{s=s_0} = -U_0\eta = -U_0C_1 \frac{s_0+q}{s_0q+1}, \quad \psi|_{q=0} = \psi_1(s)$$

По данным на характеристиках функции ω и ω_1 определяются как решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Найдем произвол в определении ω и ω_1 . Если

$$\omega(q) = b_0q^2 + b_1q + b_2, \quad \omega_1(s) = b_0s^2 + b_1s + b_2$$

то функция $\psi = 0$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать

$$\omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 0, \quad \omega_1(s_0) = 0$$

Удовлетворяя условиям на характеристиках, определяем ω и ω_1

$$\omega_1(s) = s^2 \int_{s_0}^s \psi_1(\zeta) \zeta^{-3} d\zeta, \quad \omega(q) = -\frac{U_0C_1}{s_0} q^2 \quad (3.5)$$

Как следует из первой формулы (3.5) и выражения (2.9) для ψ_1 , производная $\omega_1''(s) = 0$ ($\ln s$), поэтому производная ψ_r оказывается неограниченной в точке L , причем $\psi_r = 0$ ($\ln s$); производная же ψ_0 ограничена всюду в области 2. Неограниченность производных решения задачи Гурса в точках касания характеристиками линии вырождения является известным фактом в теории уравнений смешанного типа.

Далее в случае в) можно переходить к решению задачи в области 4, в случаях а) и б) решается задача в области 3.

4. Решение задачи в области 3. *Случай а).* Здесь возникает следующая смешанная задача: функция ψ задана на характеристике KH и $\psi_\xi = 0$ при $\xi = U_0$. В переменных s и q эти условия имеют вид

$$\psi|_{q=s_0} = -U_0 C_1 \frac{s+s_0}{ss_0+1}, \quad s\psi_s + q\psi_q|_{sq=1} = 0 \quad (4.1)$$

Не ограничивая общности, предполагаем

$$\omega(s_0) = 0, \quad \omega'(s_0) = 0, \quad \omega_1(1/s_0) = U_0 C_1 / s_0$$

Из условия на характеристике KH определяется

$$\omega_1(s) = U_0 C_1 s \quad (4.2)$$

Далее, удовлетворяя второму условию (4.1) на линии GH

$$\frac{1}{2}(1 - q^2)\omega''(q) + q\omega'(q) - \omega(q) = 0$$

определяем $\omega(q) = 0$. Таким образом, потенциал ψ в области 3 задается формулой

$$\psi = -U_0 \eta \quad (4.3)$$

Случай б). Данные на характеристике KH , задаваемой уравнением $q = q_1 = 1/s_0$, получаются после решения задачи в области 2. Пусть функции ω_1^0 и ω^0 получены при решении задачи в области 2. Не ограничивая общности, предполагаем, что функции ω и ω_1 в области 3 такие, что

$$\begin{aligned} \omega(q_1) = \omega^0(q_1) = -U_0 C_1 q_1^3, \quad \omega'(q_1) = \omega^{0'}(q_1) = -2U_0 C_1 q_1^2 \\ \omega_1(s_0) = \omega_1^0(s_0) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Так как функция ω_1^0 удовлетворяет уравнению вдоль характеристики, из которого должна определяться ω_1 , в силу теоремы единственности для линейных обыкновенных уравнений

$$\omega_1(s) = \omega_1^0(s) = s^2 \int_{s_0}^s \psi_1(\xi) \xi^{-3} d\xi \quad (4.5)$$

Второе из условий (4.1) дает уравнение второго порядка для определения $\omega(q)$

$$\frac{1}{2}(1 - q^2)\omega''(q) + q\omega'(q) - \omega(q) = \frac{q^2-1}{2q^2} \omega_1''\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q} \omega_1'\left(\frac{1}{q}\right) - \omega_1\left(\frac{1}{q}\right)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\omega = D_1 q + D_2 (q^2 - 1)$$

Частным решением неоднородного уравнения является функция

$$\omega = -q^2 \omega_1 (1/q)$$

Определяя постоянные D_1 и D_2 из (4.4), находим

$$\omega(q) = U_0 C_1 q - U_0 C_1 q_1 (q^2 + 1) - \int_{s_0}^{1/q} \psi_1(\zeta) \zeta^{-3} d\zeta \quad (4.6)$$

Таким образом, решение задачи найдено всюду в областях гиперболичности линеаризованных уравнений.

5. Решение задачи в области 4. После решения задач в области гиперболичности уравнения (1.13) возникает смешанная краевая задача в области эллиптичности. Потенциал ψ определяется в области 4 если он известен на полуокружности (1.14), а на диаметре $\xi = U_0$ задана производная $\psi_\xi = 0$. Вследствие единственности решения этой задачи достаточно решить задачу Дирихле в круге с данными Дирихле, продолженными на нижнюю полуокружность четным образом. Здесь тоже удобно перейти к координатам s, q , которые будут комплексными в области 4

$$s = \bar{q}, \quad s = \lambda + i\mu$$

Если χ — решение уравнения (3.3), то потенциал ψ в области 4 связан с функцией χ соотношением

$$\psi = \operatorname{Re} \frac{\chi}{sq + 1}$$

Пусть $\sigma = \operatorname{Re} \chi$. тогда из (3.3) следует уравнение на σ

$$\Delta \sigma - \frac{2}{\mu} \sigma_\mu = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \right) \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения выражается через произвольную гармоническую функцию F переменных λ и μ

$$\sigma = F - \mu F_\mu$$

Круг $(\xi - U_0)^2 + \eta^2 \leq C_1^2$ в плоскости $\xi\eta$ при отображении (3.2) переходит в полуплоскость $\mu \geq 0$. Окружность (1.14) отображается в ось $\mu = 0$ так, что верхняя полуокружность переходит в отрезок $[-1, 1]$ оси λ . Продолжение данных Дирихле

$$\psi|_{\mu=0} = f_0(\lambda), \quad |f_0(\lambda)| < \infty$$

на всю ось осуществляется по формуле

$$f_0(\lambda) = f_0(\lambda^{-1}), \quad |\lambda| \geq 1$$

Потенциал ψ выражается через гармоническую функцию F

$$\psi = \frac{1}{1 + \lambda^2 + \mu^2} (F - \mu F_\mu) \quad (5.2)$$

Поэтому исходная краевая задача сводится к следующей задаче для гармонической в полуплоскости $\mu \geq 0$ функции F

$$F|_{\mu=0} = (1 + \lambda^2) f_0(\lambda), \quad |F| \leq A_1^2 |s|^2, \quad |s| \rightarrow \infty \quad (A_1^2 = \text{const}) \quad (5.3)$$

Последнее неравенство следует из требования ограниченности ψ . Данные на оси $\mu = 0$ выражаются через функции ω и ω_1 , полученные при решении задач в областях 2 и 3, потому что

$$f_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2 + 1} (\omega(\lambda) - \omega_1(\lambda)) \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \quad f_0(\lambda) = f_0(-\lambda),$$

$$f_0(\lambda) = f_0(\lambda^{-1}) \quad (5.4)$$

Из (5.4) и (3.5) следует, что $(1 + \lambda^2) f_0(\lambda)$ можно представить так:

$$(1 + \lambda^2) f_0(\lambda) = f_1(\lambda) + \lambda^2 \psi_1(0) + \frac{1}{2} \psi_1''(0) \ln(\lambda^2 + 1)$$

Здесь $f_1(\lambda)$ — ограниченная на всей оси λ функция.

Решением задачи (5.3) будет функция

$$F(\lambda, \mu) = \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(\xi) d\xi}{(\lambda - \xi)^2 + \mu^2} + \psi_1(0) (\lambda^2 - \mu^2) + \frac{1}{2} \psi_1''(0) \ln(\lambda^2 + (\mu + 1)^2) \quad (5.5)$$

Как нетрудно установить, это решение единственно с точностью до несущественных слагаемых вида $b\mu + d\lambda\mu$.

Таким образом, линейная задача полностью решена. Полученные формулы дают возможность вычислить физические величины u , v , c в области двойной волны. При больших по абсолютной величине скоростях поршня U_0 происходит образование зоны вакуума в окрестности вершины угла поршня Q . Тогда в областях 3 и 4 найденное решение не применимо, так как в этом случае следовало решать задачу со свободной границей. Критическая скорость поршня U_0 , при которой происходит первый отрыв газа, определяется из уравнения

$$C_1^2 + \alpha(1 - \gamma)\psi(v_0, 0) = 0$$

При меньших скоростях найденное решение описывает в первом приближении движение газа.

Автор благодарит Л. В. Овсянникова за интерес к данной работе и полезные советы.

Поступила 24 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косой стенке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
2. Ермолин Е. В., Сидоров А. Ф. Некоторые конфигурации изэнтропических распадов двумерных разрывов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина. ПМТФ, 1960, № 3.