# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ СЛОЕ, С АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ

*В. Л. Присекин (Новосибирск)*

Рассматривается движение пластинки, лежащей на упругом слое, под действием акустической волны. Падающая на пластинку волна предполагается плоской и ее фронт параллелен поверхности пластинки. Давление перед фронтом волны равно нулю, а за фронтом убывает по экспоненциальному закону. Акустическая среда, примыкающая к пластинке, имеет плотность $\rho$. Скорость звука в среде $c$. Плотность пластинки на единицу поверхности равна $m$. Упругий слой рассматривается как однородное изотропное тело, характеризующееся величинами: $a$ — скорость продольных волн, $\rho_0$— плотность. Толщина слоя — $h$. Слой лежит на жестком основании.

Направим ось $z$ перпендикулярно к поверхности жесткого основания в сторону пластинки. Начало отсчета совместим с поверхностью основания.

Уравнение движения слоя имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Пусть $\varphi$ — потенциал скорости падающей волны, а $\psi$—потенциал скорости отраженных и излученных пластинкой волн.

Потенциал $\psi$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

нулевым начальным условиям и условию излучения, выделяющему систему волн бегущих в положительном направлении оси $z$. Кроме этого, для уравнений (1) и (2) должны выполняться граничные условия

$$w = 0, \quad \text{при } z = 0 \qquad (3)$$

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_0 a^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad \text{при } z = h, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{при } z = h \qquad (4)$$

Так как потенциалы $\varphi$ и $\psi$ определяют плоские волны, то, учитывая направления движения этих волн, получим соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (5)$$

Используя эти соотношения и второе условие (4), запишем выражение для давления $P_*$ среды на пластинку

$$P_* = 2P + \rho c\frac{\partial w}{\partial t} \qquad \left(P = P_0 \exp\left[-\alpha\left(t + \frac{z-h}{c}\right)\right]\eta\left(t + \frac{z-h}{c}\right)\right) \qquad (6)$$

Здесь $P$ — давление в падающей волне, $P_0$ — давление на фронте волны, $\eta(t)$ — единичная функция, $\eta(t) = 1$ при $t > 0$, $\eta(t) = 0$ при $t < 0$. Учитывая, что

$$P_* = -\rho\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_{z=h}$$

запишем первое граничное условие (4) в виде

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho c\frac{\partial w}{\partial t} + \rho_0 a^2\frac{\partial w}{\partial z} = -2P, \qquad z = h \qquad (7)$$

Для решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (3), (7) и нулевым начальным условиям, воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной $t$. Сохраняя для изображений те же обозначения, что и для оригиналов, получим

$$w = A\,\mathrm{sh}\frac{pz}{a}, \quad A = -\frac{2P_0}{\Delta}, \quad \Delta = p(p+\alpha)\left[(mp + \rho c)\,\mathrm{sh}\frac{ph}{a} + \rho_0 a\,\mathrm{ch}\frac{ph}{a}\right] \qquad (8)$$

Представляя решение в виде

$$w = -\frac{4P_0}{m}\frac{\exp(-ph/a)\,\mathrm{sh}\,pz/a}{p(p+\alpha)(p+\beta)}\frac{1}{1 - \varepsilon\exp(-2ph/a)}$$

и разлагая последнюю дробь в ряд, получим

$$w = \frac{2P_0}{m}\frac{1}{p(p+\alpha)(p+\beta)}\sum_0^\infty \varepsilon^n\left[\exp\left(p\frac{z-(2n+1)h}{a}\right) - \exp\left(-p\frac{z+(2n+1)h}{a}\right)\right] \qquad (9)$$

Здесь обозначено $\beta = (\rho c + \rho_0 a)\,/\,m$, $\quad \gamma = (\rho c - \rho_0 a)\,/\,m$, $\quad \varepsilon = (p + \gamma)\,/\,(p + \beta)$

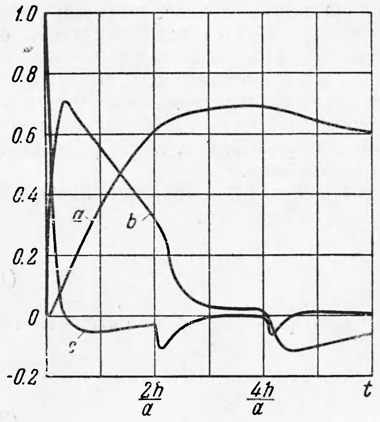
Формулой (9) при помощи обратного преобразования Римана — Меллина определяется система волн, возникающая в результате многократного отражения первой прошедшей в слой волны. Из (9) при $z = h$ следует выражение для перемещения пластинки, лежащей на поверхности упругого слоя

$$[w]_{z=h} = -\frac{2P_0}{m}\sum_{0}^{\infty} w_n(t)\,\eta\left(t - \frac{2nh}{a}\right)$$

$$w_0(t) = \frac{1}{\alpha\beta(\beta - \alpha)}\left[\beta\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \alpha\left(1 - e^{-t\beta}\right)\right] \tag{10}$$

$$w_n(t) = (\gamma - \beta)\left\{\frac{\gamma^{n-1}}{\alpha\beta^{n+1}} - \frac{(\gamma - \alpha)^{n-1}}{\alpha(\beta - \alpha)^{n+1}}e^{-\alpha\tau} - \lim_{p\to-\beta}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{(p+\gamma)^{n-1}}{p(p+\alpha)}e^{p\tau}\right]\right\}$$

$$\left(\tau = t - \frac{2nh}{a}\right)$$




Фиг. 1

Формулы для скорости и ускорения движения пластинки получаются аналогичным способом.

Формулой (6) определяется величина давления акустической среды на пластинку. Давление полосы на жесткое основание равно

$$P^* = -\rho_0 a^2\left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{z=0}, \quad \text{или} \quad P^* = \frac{4P_0}{m}\rho_0 a^2\sum_{0}^{\infty} f_n(t)\,\eta\left(t - \frac{(2n+1)\,h}{a}\right) \tag{11}$$

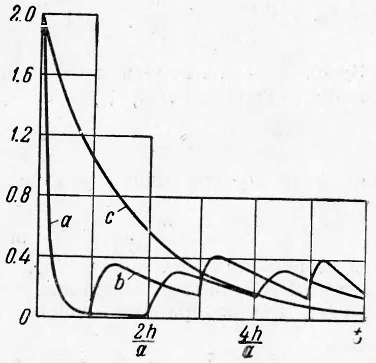
$$f_n(t) = \frac{(\gamma - \alpha)^n}{(\beta - \alpha)^{n+1}}e^{-\alpha\tau} + \lim_{p\to-\beta}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dp^n}\left[\frac{(p+\gamma)^n}{p+\alpha}e^{p\tau}\right]\left(\tau = t - \frac{(2n+1)\,h}{a}\right)$$

Из анализа решения следует, что движение пластинки с течением времени затухает, вследствие излучения пластинкой волн в акустическую среду.

По полученным формулам были проведены расчеты для случая

$\rho = 10.4 \cdot 10^{-4}$ *гсм*$^{-4}$ *сек*$^2$, $c = 14.9 \cdot 10^4$ *см сек*$^{-1}$,
$\rho_0 = 2.86 \cdot 10^{-4}$ *гсм*$^{-4}$ *сек*$^2$, $a = 7 \cdot 10^4$ *см сек*$^{-1}$,
$m = 15.9 \cdot 10^{-4}$ *гсм*$^{-3}$*сек*$^2$, $h = 4.2$ *см*

Результаты расчетов приведены на фиг. 1, 2. На фиг. 1 показана зависимость от времени смещения $a$, скорости $b$ и ускорения $c$ пластинки, отнесенные к величине $-2P_0/m$. На фиг. 2 кривой $a$ изображено изменение давления акустической среды на пластинку, лежащую на упругом основании, кривой $b$ показано давление слоя на жесткое основание. Здесь же для сравнения кривой $c$ показано давление падающей волны на абсолютно жесткую стенку.




Фиг. 2

Как следует из расчета, ускорения пластинки, в результате воздействия на нее вторичных волн в слое, невелики и величина их ($\rho_0 a < \rho c$) при $\alpha < \beta$, достигает по абсолютной величине порядка

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k g \qquad \left(k = \frac{\beta}{\beta - a}\right)$$

где $g$ — начальное ускорение пластинки.

Максимальная величина давления волны в слое составляет при тех же условиях

$$\frac{\beta - \gamma}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} P_0$$

Поступила 31 III 1961