ПМТФ, № 5, 1971

УДК 532.507

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ВЗАИМНО РАСТВОРИМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ В ТРУБЕ

В. И. Марон

(Москва)

Рассмотрена задача о перемешивании взаимно растворимых жидкостей в турбулентном потоке в трубе [1-11]. Для описания распределения средней по сечению трубы концентрации в области смеси принята модель, основанная на одномерном уравнении типа уравнения теплопроводности с эффективным коэффициентом, который, как показывают опыты, отличен от коэффициентов молекулярного и турбулентного переноса. Безразмерная величина этого коэффициента зависит от ряда параметров, таких как число Рейнольдса, вычисленное для одной из жидкостей, шероховатость, отношение плотностей и вязкостей жидкостей, а также от концентрации, градиентов концентрации и т. д. Эти зависимости могут быть установлены либо с помощью опытов, либо на основе теоретического рассмотрения явления перемешивания. В данной работе теоретическим путем выведена модель дисперсии с эффективным коэффициентом диффузии, зависящим от чисел Рейнольдса и Шмидта, а также от шероховатости.

1. Рассмотрим совместное турбулентное движение двух взаимнорастворимых жидкостей в круглой трубе, когда одна из них движется вслед другой или порция одной жидкости распространяется в основном потоке другой жидкости. Во время такого движения из-за конвективного переноса вещества со скоростью, изменяющейся по диаметру трубы, и турбулентной диффузии происходит перемешивание жидкостей и образование области смеси, разделяющей однородные компоненты. В развитом турбулентном потоке расслоение жидкостей в поле сил тяжести будет незначительным из-за интенсивного перемешивания, поэтому течение примем осесимметричным.

Осесимметричное распределение концентрации в турбулентном потоке в круглой трубе описывается уравнением диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial c}{\partial t}+U\Phi(r)\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD\frac{\partial c}{\partial r}\right)$$

$$c=c(t,x,r),\quad t>0,\quad 0<r<a,\quad -\infty<b<x<d<+\infty \qquad (1.1)$$

Здесь c — осредненная концентрация, U — средняя скорость потока, $U\Phi(r)$ — профиль осредненной скорости, $D(r)$ — коэффициент переноса, a — радиус трубы, x и r — пространственные переменные. Ось x цилиндрической системы координат совпадает с осью трубы и направлена в сторону движения потока.

В правой части этого уравнения отсутствует слагаемое, учитывающее продольную диффузию. Тейлор показал, что при нахождении профиля концентрации в первом приближении можно не учитывать продольную диффузию. В дальнейшем, после того как будет построена одномерная модель, нетрудно учесть поправку к величине виртуального коэффициента за счет осевой диффузии. Эта поправка оказывается весьма незначительной [2].

Начальные и краевые условия задачи, когда поток вещества на внутренней поверхности трубы равен нулю, имеют следующий вид:

$$c(0,x,r)=c_0(x),\quad \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \qquad (1.2)$$

К этим условиям следует добавить соответствующие предельные условия при $x = b$ и $x = d$.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = D_0 / a^2 t, \qquad \xi = x / a, \qquad \eta = r / a \tag{1.3}$$

С помощью этих переменных уравнение диффузии и предельные условия задачи запишем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + Y \frac{\partial c}{\partial \xi} + Y [\Phi(\eta) - 1] \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta D_* \frac{\partial c}{\partial \eta} \right)$$

$$c = c(\tau, \xi, \eta), \qquad Y = aU / D_0, \qquad D_* = D / D_0$$

$$c|_{\tau=0} = c_0(\xi), \qquad \frac{\partial c}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \frac{\partial c}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=1} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь D_0 — типичное значение коэффициента переноса.

Слагаемые в левой и правой частях уравнения (1.4) умножим на 2η и проинтегрируем по η в пределах от 0 до 1. Имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + Y \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + 2Y \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 [\Phi(\eta) - 1](c - \theta) \eta \, d\eta = 0 \tag{1.5}$$

$$\theta = 2 \int_0^1 c \eta \, d\eta, \qquad \theta = \theta(\tau, \xi)$$

Здесь θ — средняя по сечению трубы концентрация примеси, зависящая только от переменных τ и ξ. Комбинируя слагаемые уравнений (1.4) и (1.5), получаем следующее уравнение для функции $\Psi = c - \theta$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta D_* \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) = 2Y \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^1 [\Phi(\eta) - 1] \Psi \eta \, d\eta -$$

$$- Y [\Phi(\eta) - 1] \frac{\partial c}{\partial \xi} - Y \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) рассматриваем как неоднородное уравнение со свободным членом в правой части и решим его методом последовательных приближений.

2. Тейлор в качестве первого приближения при определении профиля концентрации принял осредненную концентрацию c равной средней концентрации θ. Основанием для такого приближения служит то, что для моментов времени, много больших диффузионной постоянной a^2 / D_0, из-за радиальной диффузии неоднородности концентрации в поперечном сечении трубы почти выровняются и в потоке будут существовать лишь незначительные отклонения концентрации от среднего в сечении трубы значения. Эти отклонения обусловлены неоднородным из-за разности ме жду осредненной и средней скоростями конвективным переносом примеси.

Используем это приближение для нахождения последующих решений. С этой целью подставляем $c = \theta$ в правую часть уравнения (1.6). В результате подстановки получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta D_* \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) = - Y [\Phi(\eta) - 1] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \tag{2.1}$$

Ищем решение этого уравнения, удовлетворяющее предельным условиям

$$\Psi|_{\tau=0} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=1} = 0 \tag{2.2}$$

При решении задачи (2.1), (2.2) в отличие от решения Тейлора сохраним в левой части уравнения (2.1) локальную производную функции по времени. Искомое решение имеет вид

$$\Psi(\tau, \xi, z) = -Y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n X_n(z)}{\alpha_n^2 \| X_n \|^2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha_n^2(\tau - s)] \frac{\partial \theta}{\partial \xi} ds \right] \qquad (2.3)$$

$$a_n = \int_0^{1/4} X_n(z) [\Phi(z) - 1] \, dz, \qquad z = \frac{1}{4} \eta^2$$

Здесь X_n и α_n — собственные функции и собственные значения следующей задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d}{dz} \left[z D_* \frac{dX}{dz} \right] + \alpha^2 X = 0, \qquad X'(0) = X'\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \qquad (2.4)$$

Коэффициент переноса D_* принимаем зависящим только от радиальной координаты. С помощью решения (2.3) можно приближенно найти профиль концентрации через неизвестную функцию $\theta(\tau, \xi)$. Для определения средней в сечении трубы концентрации θ решение (2.3) подставляем в подынтегральное выражение в третьем слагаемом уравнения (1.5).

В результате получаем уравнение для определения концентрации $\theta(\tau, \xi)$. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + Y \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 4Y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\alpha_n^2 \| X_n \|^2} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \exp[-\alpha_n^2 (\tau - s)] \frac{\partial^2 \theta(s, \xi)}{\partial \xi^2} ds \right] \qquad (2.5)$$

Нетрудно показать, что решения этого уравнения при $\tau \to \infty$ асимптотически близки к решению уравнения диффузии следующего вида:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + Y \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 4Y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{\alpha_n^2 \| X_n \|^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \qquad (2.6)$$

3. Вычислим величину a_n, которая входит в выражение для коэффициента диффузии. С этой целью в подынтегральное выражение (2.3) подставляем функцию X_n, определяемую из уравнения (2.4). Имеем

$$a_n = -\frac{1}{2\alpha_n^2} \int_0^1 \frac{d}{d\eta} \left[\eta D_* \frac{dX_n}{d\eta} \right] [\Phi(\eta) - 1] \, d\eta \qquad (3.1)$$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_n = \frac{1}{2\alpha_n^2} \int_0^1 \eta D_* X_n'(\eta) \Phi'(\eta) \, d\eta \qquad (3.2)$$

Коэффициент D_* равен сумме молекулярного и турбулентного коэффициентов диффузии

$$D_* = D / D_0 + D_t / D_0 \qquad (3.3)$$

В турбулентном потоке перенос вещества, тепла и импульса происходит с почти равной интенсивностью, поэтому по известной аналогии Рейнольдса коэффициенты, характеризующие интенсивность переноса этих субстанций, примем одинаковыми.

На основании этой аналогии, используя формулу Буссинеска, запишем коэффициент радиальной турбулентной диффузии в виде

$$D_t = -\frac{au_*^2\eta}{U}[\Phi'(\eta)]^{-1} \tag{3.4}$$

С учетом формул (3.1), (3.4) запишем выражение для a_n в следующем виде:

$$a_n = \frac{1}{2\alpha_n^2}\left[\frac{D}{D_0}\int_0^1 \eta X_n'(\eta)\,\Phi'(\eta)\,d\eta - \frac{u_*^2 a}{UD_0}X_n(1)\right]$$

4. В формулу для вычисления величины a_n и в другие выведенные выше формулы входит неизвестное решение задачи Штурма — Лиувилля $X_n(\eta)$. Трудность решения задачи (2.4) обусловлена тем, что радиальный коэффициент турбулентной диффузии зависит от переменной z. Эксперименты Лауфера и Нуннера [12], а также исследования, проведенные в работах [13,14], позволяют оценить характер этой зависимости. Наиболее существенным образом коэффициент радиальной диффузии изменяется вблизи внутренней поверхности трубы, в области, которая тем у́же, чем больше числа Рейнольдса, в то время как в ядре турбулентного потока, занимающего подавляющую часть сечения трубы, коэффициент турбулентной диффузии почти постоянный. Такой характер зависимости D_* от z дает основание при решении задачи (2.4) в первом приближении принять коэффициент радиальной турбулентной диффузии во всем сечении трубы постоянным и равным среднему по сечению трубы значению. Среднее по сечению трубы значение коэффициента диффузии естественно принять за типичное значение этого коэффициента, т. е. считать D_* равным единице. При постоянной величине D_* легко находятся собственные функции и собственные значения задачи Штурма — Лиувилля (2.4). Имеем

$$X_n(z) = J_0(2\alpha_n z^{1/2}), \quad J_1(\alpha_n) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $J_\nu(z)$, $\nu = 0,\ 1$ — функции Бесселя первого рода. Квадрат нормы найденных собственных функций равен

$$\|X_n\|^2 = {}^1/_4 J_0^2(\alpha_n)$$

Вычислим эффективный коэффициент диффузии. Имеем

$$\frac{K}{D_0} = 16Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{\alpha_n^2 J_0^2(\alpha_n)} = 4Y^2\frac{u_*^4 a^2}{U^2 D_0^2}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^6}\left[1+\frac{DU}{u_*^2 aJ_0(\alpha_n)}\int_0^1 \eta J_1(\alpha_n\eta)\,\Phi'(\eta)\,d\eta\right]^2 \tag{4.2}$$

В этом выражении второе слагаемое в квадратных скобках обусловлено молекулярной диффузией. Величина первого собственного значения $\alpha_1 = 3.83$, величины последующих корней суть 7.02, 10, 17 и т. д. Собственные значения возрастают настолько быстро, что при вычислении ряда (4.2) можно ограничиться первым слагаемым. Имеем

$$\frac{K}{D_0} \approx 4Y^2\frac{u_*^4 a^2}{U^2 D_0^2 \alpha_1^6}\left[1+\frac{DU}{u_*^2 aJ_0(\alpha_1)}\int_0^1 \eta J_1(\alpha_1\eta)\,\Phi'(\eta)\,d\eta\right]^2 \tag{4.3}$$

Для вычисления интеграла в квадратных скобках необходимо выбрать профиль осредненной скорости турбулентного потока. Воспользуемся, например, универсальным законом распределения скоростей, для которого функция $\Phi(\eta)$ имеет вид

$$\Phi(\eta) = U_0 / U + (2.5u_* / U) \times \ln(1-\eta)$$

Здесь U_0 — скорость потока на оси трубы.

Подставим производную этой функции в подынтегральное выражение и выполним интегрирование численным методом. Получаем

$$\int_0^1 \eta J_1(3.83\eta)\,\Phi'(\eta)\,d\eta \approx -1.65u_* / U \tag{4.4}$$

Учитывая этот результат, а также то, что $J_0(3.83) \approx -0.401$, перепишем выражение (4.3) следующим образом:

$$\frac{K}{D_0} \approx 4Y^2 \frac{u_*^4 a^2}{(3.83)^6 U^2 D_0^2}\left(1 + 4.12\frac{D}{u_* a}\right)^2 \tag{4.5}$$

Для вычисления эффективного коэффициента диффузии по формуле (4.5) необходимо найти величину коэффициента D_0. Для определения величины D_0 воспользуемся профилем коэффициента радиальной турбулентной диффузии из работы Тейлора. В этом случае

$$D_0 = 0.052\, u_* a + D$$

Подставим значение D_0 в формулу (4.5) получим выражение для безразмерной величины эффективного коэффициента диффузии

$$\frac{K}{2aU} = 5.2\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\left[1 - \frac{30.4}{\mathrm{Sc\,Re}}\left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2}\right]^2, \quad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{D} \tag{4.6}$$

Здесь λ — гидравлическое сопротивление. Эта формула отличается от известной формулы Тейлора дополнительным слагаемым, учитывающим зависимость эффективного коэффициента от числа Шмидта.

Метод, которым была выведена формула (4.6), в отличие от метода, использованного в работе Тейлора, не связан с выбором того или иного закона распределения осредненной скорости. Последнее обстоятельство позволяет обобщить найденную зависимость на область больших чисел Рейнольдса, для которых распределение скоростей и гидравлическое сопротивление существенным образом зависят от шероховатости. С этой целью, подобно тому как это сделано в работе [15], представим коэффициент радиальной турбулентной диффузии в виде суммы коэффициента турбулентной диффузии в гладкой трубе и коэффициента турбулентной диффузии, зависящего от шероховатости. Последний коэффициент имеет вид

$$D_S = 0.39u_* a\left[\varepsilon - \frac{7.8}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2}\right](0.03 + 0.97\eta) \qquad \varepsilon = \frac{\Delta}{a} \tag{4.7}$$

Здесь ε — относительная шероховатость.

Средняя в сечении трубы величина этого коэффициента равна

$$D_{0S} \approx 0.265u_* a\left[\varepsilon - \frac{7.8}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2}\right] \tag{4.8}$$

Учитывая это равенство, запишем коэффициент D_0 для потока в шероховатой трубе следующим образом:

$$D_0 = \left[0.052 + 0.265\left(\varepsilon - \frac{7.8}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2}\right)\right]u_* a \tag{4.9}$$

Это выражение подставим в формулу (4.5), в результате чего получим равенство для эффективного коэффициента диффузии, обобщающее формулу Тейлора на случай течения в шероховатых трубах

$$K_* = \frac{K}{2aU} = 5.2 \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left[1 + 5.1 \left(\varepsilon - \frac{7.8}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\lambda}{8}\right)^{-1/2}\right)\right]^{-3} \tag{4.10}$$

Величина гидравлического сопротивления при различных числах Рейнольдса и параметрах относительной шероховатости представлена в виде таблиц в работе [15]. Многочисленные формулы для гидравлического сопротивления различных труб приведены в книге [16].

5. Учитывая выведенное выше выражение для эффективного коэффициента турбулентной диффузии (4.5), а также быстрый рост величин собственных значений α_n, запишем уравнение (2.5) в виде (молекулярный перенос не учитываем)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + Y \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \varkappa^2 \int_0^\tau \exp\left[-\alpha_1^2(\tau - s)\right] \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} ds$$

$$\varkappa^2 = \frac{4u_*^4 a^2}{\alpha_1^4 U^2 D_0^2} Y^2 \tag{5.1}$$

В системе координат, движущейся со средней скоростью потока, уравнение (5.1) имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \varkappa^2 \int_0^\tau \exp\left[-\alpha_1^2(\tau - s)\right] \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} ds, \quad z = \xi - Y\tau \tag{5.2}$$

Здесь z — расстояние в подвижной системе координат.

Продифференцируем по τ слагаемые в левой и правой частях уравнения (5.2). В результате несложных преобразований получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} + \alpha_1^2 \frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \varkappa^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{5.3}$$

Это так называемое телеграфное уравнение, которое в рассматриваемом случае описывает распределение средней в сечении трубы концентрации. В отличие от уравнения диффузии Тейлора уравнение (5.3) — гиперболического типа.

Из решения этого уравнения получается конечная скорость распространения примеси в обе стороны от нулевого сечения. Эта скорость равна $\varkappa$.

Можно показать, что непрерывная часть решения уравнения (5.3) отличается от решения уравнения Тейлора в начале процесса перемешивания, когда $\tau < 1$. Это отличие тем существеннее, чем меньше τ. Для процесса перемешивания в магистральных трубопроводах, где практический интерес представляет распределение концентрации для $\tau \gg 1$, это различие распределений в начальной стадии процесса не существенно. Поэтому можно пользоваться моделью Тейлора, используя выведенную здесь формулу (4.10) для эффективного коэффициента. Однако при исследовании процесса перемешивания в нефтехимических реакторах трубчатого типа, где время процесса перемешивания τ сравнимо с единицей, целесообразно воспользоваться решением уравнения дисперсии (5.3). Вид решения уравнения (5.3) зависит от формы сигнала на входе в реактор. Однако в каждом конкретном случае отыскание решений не представляет особых трудностей.

Поступила 14 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамерс Х., Вестертерн К. Химические реакторы, расчет и управление ими. М., «Химия», 1967.
2. Taylor G. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1954, vol. 223, No. 1155.

3. F l i n t L. E., E i s e n k l a m P. Dispersion of matter in transitional flow through straight tubes. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1970, vol. 315, No. 1523, pp. 519—533.
4. Ю ф и н В. А. Смешение при последовательной перекачке нефтей и нефтепродуктов по трубопроводам. Нефт. хоз-во, 1957, № 8.
5. Г а л л я м о в А. К., М а р о н В. И. О величине эффективного коэффициента турбулентной диффузии. Нефть и газ, 1968, № 8.
6. Ф р о л о в К. Д. Смешение нефтепродуктов с разной вязкостью в трубах. Транспорт и хранение нефти и нефтепродуктов, 1964, № 12.
7. L e v e n s p i e l O. Longitudinal mixing of fluids flowing in circular pipes. Industr. Engng Chem., 1958, vol. 50, No. 3.
8. Я б л о н с к и й В. С., А с а т у р я н А. Ш., Х и з г и л о в И. Х. О турбулентной диффузии в трубах. Инж.-физ. ж., 1960, № 3.
9. G o l d s c h m i d t V. W., H o u s e h o l d e r M. K. Longitudinal dispersion for turbulent flow in pipes. Industr. Engng Chem. Fundam., 1969, vol. 8, No. 1.
10. A n a n t h a k r i s h n a n V., G i l l W. N., B a r d u h n A. J. Laminar dispersion in capillaries, pt 1. A. I. Ch. E. Journal, 1965, vol. 11, No. 6.
11. T i c h a c e k L. J., B a r k e l e w C. H., B a r o n T. Axial mixing in pipes. A. I. Ch. E. Journal, 1957, vol. 3, No. 4.
12. Х и н ц е И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
13. S c h l i n g e r W. G., S a g e B. H. Material transfer in turbulent Gas streams. Concentric flow. Industr. Engng Chem., 1953, vol. 45, No. 3.
14. L y n n S., C o r c o r a n W. H., S a g e B. H. Material transport in turbulent gas streams: radial diffusion in a circular conduit. A. I. Ch. E. Journal, 1957, vol. 3, No. 1.
15. М и л л и о н щ и к о в М. Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., «Наука», 1969.
16. А л ь т ш у л ь А. Д. Гидравлические сопротивления. М., «Недра», 1970.