

УДК 539.3

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНО-СЛОИСТОГО СТЕРЖНЯ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В. В. Алехин, Л. В. Баев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается задача синтеза из конечного набора упругих однородных изотропных материалов поперечно-слоистого прямолинейного стержня минимального веса, сжатого осевой силой, при заданном ограничении на критическую нагрузку потери устойчивости. Для описания изгиба стержня используется классическая теория балок, основанная на гипотезе плоских нормальных сечений. Получены необходимые условия оптимальности, построен вычислительный алгоритм и приведен пример расчета оптимального стержня.

1. Постановка задачи. Пусть имеется набор W , состоящий из k однородных изотропных материалов. Из данного набора требуется синтезировать поперечно-слоистый стержень минимального веса при ограничении на критическую нагрузку потери устойчивости.

Рассмотрим стержень длины L и постоянного сечения S , находящийся под действием осевой сжимающей силы P . На концах стержня могут быть заданы различные краевые условия: шарнирное опирание, жесткое защемление и др. Выберем прямоугольную систему координат (x, y, z) , совместив начало координат с левым концом стержня и направив ось x вдоль его оси по линии действия силы P (см. рисунок). Выпучивание стержня происходит в плоскости (x, z) .

Пусть σ, ρ_* — величины, имеющие размерность напряжения и плотности. Введем безразмерные переменные (в дальнейшем звездочка у безразмерных величин опущена):

$$x^* = x/L, \quad w^* = w/L, \quad E^* = E/\sigma, \quad P^* = PL^2/\sigma I, \quad \rho^* = \rho/\rho_*, \quad (1.1)$$

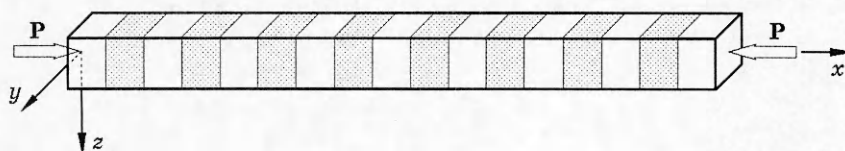
где $w(x)$ — прогиб стержня; $E(x), \rho(x)$ — модуль Юнга и плотность материала слоев; I — момент инерции поперечного сечения S стержня; P — модуль силы P .

В переменных (1.1) уравнение устойчивости стержня имеет вид [1]

$$(Ew'')'' + Pw'' = 0 \quad (1.2)$$

(штрих обозначает производную по координате x). Для определенности возьмем граничные условия

$$w'(0) = (Ew'')'(0) = w(1) = Ew''(1) = 0, \quad (1.3)$$



которым отвечает собственная функция прогиба $w(x)$ для шарнирно опертого стержня удвоенной длины в случае симметричной формы потери устойчивости.

На внутренних границах $x_i \in (0, 1)$ слоев стержня, где терпят разрыв модули Юнга материалов, необходимо задавать условия сопряжения: непрерывность прогиба w , поворота w' , изгибающего момента $M = -Ew''$ и перерезывающей силы $Q = -(Ew''')$.

Введем кусочно-постоянную функцию

$$\alpha(x) = \{\alpha_j; x \in [x_j, x_{j+1}), j = 1, \dots, n\}, \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 1, \quad (1.4)$$

характеризующую структуру поперечно-слоистого стержня: количество, размеры и материалы составляющих его слоев. Значения α_j принадлежат дискретному конечному множеству

$$U = \{1, 2, \dots, k\}, \quad (1.5)$$

соответствующему заданному набору материалов W . Теперь все характеристики материалов из множества W будут функциями распределения $\alpha(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Если $\alpha_j = i$, то это означает, что j -й слой $[x_j, x_{j+1})$ стержня состоит из i -го материала множества W . Функция $\alpha(x)$ принимается в качестве управления в рассматриваемой задаче.

Задача оптимального проектирования стержня заключается в следующем. Среди кусочно-постоянных функций $\alpha(x)$ (1.4) с областью значений U (1.5) требуется найти управление $\alpha(x)$, доставляющее минимум функционалу веса

$$F(\alpha) = \int_0^1 \rho(\alpha) dx \quad (1.6)$$

при заданном ограничении на критическую силу потери устойчивости

$$P_0 - P \leq 0, \quad (1.7)$$

где P_0 — заданная величина.

2. Необходимые условия оптимальности. Для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (1.2)–(1.7) требуется построить выражения для вариаций целевого функционала (1.6) и ограничения (1.7) через вариацию управления $\alpha(x)$.

Условия сопряжения на внутренних границах слоев стержня позволяют ввести на отрезке $[0, 1]$ непрерывные фазовые переменные

$$\mathbf{Y}(x) = (w, w', M, Q)^T \quad (2.1)$$

(T — транспонирование вектора или матрицы).

Теперь исходную задачу (1.2), (1.3) можно представить в виде краевой задачи относительно неизвестных $\mathbf{Y}(x)$:

$$\mathbf{Y}'(x) = A(\alpha, x)\mathbf{Y}(x); \quad (2.2)$$

$$y_2(0) = y_4(0) = y_1(1) = y_3(1) = 0, \quad (2.3)$$

где ненулевые элементы a_{ij} матрицы $A(\alpha, x)$ имеют вид

$$a_{12} = a_{34} = 1, \quad a_{23} = -1/E, \quad a_{43} = -P/E.$$

Пусть $\alpha(x)$ — оптимальное управление из допустимого множества (1.5), минимизирующее функционал (1.6) и удовлетворяющее ограничению (1.7). Рассмотрим возмущенное управление $\alpha^*(x)$ [2]:

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D, \quad g(x) \in \bar{U}, \\ \alpha(x), & x \notin D, \quad \text{mes}(D) < \varepsilon \end{cases} \quad (2.4)$$

($D \subset [0, 1]$ — множество малой меры, $\varepsilon > 0$ — малая величина). Тогда вариация целевого функционала (1.6) примет вид

$$\delta F(\alpha) = \int_D \{\rho(\alpha^*) - \rho(\alpha)\} dx. \quad (2.5)$$

Чтобы получить вариацию ограничения (1.7), выразим значение критической нагрузки P через фазовые переменные $\mathbf{Y}(x)$ и управление $\alpha(x)$. Из системы (2.2) с учетом граничных условий (2.3) получаем

$$P(\alpha, \mathbf{Y}) = \int_0^1 \frac{y_3^2}{E(\alpha)} dx \Big/ \int_0^1 y_2^2 dx. \quad (2.6)$$

Запишем ограничение (1.7) с учетом выражения (2.6) в виде

$$F_1(\alpha, \mathbf{Y}) = P_0 - P(\alpha, \mathbf{Y}) \leq 0. \quad (2.7)$$

Используя стандартную технику [2], можно получить главную часть приращения функционала $F_1(\alpha, \mathbf{Y})$ (2.7)

$$\delta F_1(\alpha, \mathbf{Y}) = -\delta P(\alpha, \mathbf{Y}) = \int_D y_3^2 \left\{ \frac{1}{E(\alpha^*)} - \frac{1}{E(\alpha)} \right\} dx \Big/ \int_0^1 y_2^2 dx. \quad (2.8)$$

Составим теперь расширенный функционал

$$J(\alpha) = F(\alpha) + \lambda \{F_1(\alpha, \mathbf{Y}) + \xi^2\} \quad (2.9)$$

(λ и ξ — множитель Лагранжа и штрафная переменная). Вариацию функционала (2.9) с использованием выражений (2.5), (2.8) представим в виде

$$\delta J(\alpha) = \int_D \{H(\alpha, x, \mathbf{Y}) - H(\alpha^*, x, \mathbf{Y})\} dx + 2\lambda\xi \cdot \delta\xi; \quad (2.10)$$

$$H(\alpha, x, \mathbf{Y}) = -\rho(\alpha) - \lambda \frac{y_3^2(x)}{E(\alpha)} \Big/ \int_0^1 y_2^2 dx. \quad (2.11)$$

Так как управление $\alpha(x)$ является оптимальным (минимизирующим), для любых допустимых управлений $\alpha^*(x)$ (2.4) должно выполняться условие $\delta J(\alpha) \geq 0$. Тогда из выражения (2.10) в силу произвольности вариации $\delta\xi$ получаем условия дополняющей нежесткости и согласования знаков [3]

$$\lambda(P_0 - P(\alpha, \mathbf{Y})) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad (2.12)$$

и в силу того что множество малой меры D может быть почти всюду плотно расположено на отрезке $[0, 1]$, почти для всех $x \in [0, 1]$ должно выполняться условие максимума для функции Гамильтона $H(\alpha, x, \mathbf{Y})$ по аргументу α [2]

$$H(\alpha, x, \mathbf{Y}) = \max_{\alpha^*(x) \in U} H(\alpha^*, x, \mathbf{Y}). \quad (2.13)$$

Таким образом, получаем, что оптимальное управление $\alpha(x)$ и соответствующая ему оптимальная траектория $\mathbf{Y}(x)$ должны удовлетворять краевой задаче (2.2), (2.3), соотношениям (1.5), (2.7), (2.12) и условию оптимальности (2.13).

3. Вычислительный алгоритм. Метод решения задачи оптимального проектирования заключается в построении последовательности управлений $\{\alpha(x)\}_j$ ($j = 1, 2, \dots$), минимизирующей целевой функционал (1.6). Для этого равномерной сеткой $\{x_i\}$ разобьем

отрезок $[0, 1]$ на множество отрезков D_i ($i = 1, \dots, n$), моделирующих множества малой меры. Зададим начальное управление $\alpha(x)$ из допустимой области (1.5), (2.7). Функция $\alpha(x)$ является кусочно-постоянной с участками постоянства $D_i = [x_i, x_{i+1})$, на которых она принимает значения из множества U (1.5). Следующее приближение $\alpha^*(x)$ на некотором множестве $D \subset \{D_i\}$ ищется в виде (2.4)

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x \in D, \quad \alpha_j \in U, \\ \alpha(x), & x \notin D \end{cases} \quad (3.1)$$

и определяется из линейризованной задачи оптимизации: найти на данном множестве D такое допустимое возмущение α_j управления $\alpha(x)$, которое обеспечивает минимум вариации $\delta F(\alpha)$ (2.5) при условии (3.1) и линейризованном ограничении (2.7)

$$F_1(\alpha^*, \mathbf{Y} + \delta \mathbf{Y}) \approx F_1(\alpha, \mathbf{Y}) + \delta F_1(\alpha, \mathbf{Y}) \leq 0,$$

которое с учетом (2.8) можно записать в виде

$$\int_D \frac{y_3^2}{E(\alpha^*)} dx \leq (P(\alpha, \mathbf{Y}) - P_0) \int_0^1 y_2^2 dx + \int_D \frac{y_3^2}{E(\alpha)} dx.$$

В качестве множества D могут браться как сами элементарные отрезки D_i , так и объединение нескольких отрезков из множества $\{D_i\}$, взятых в различных частях стержня. Варьирование управления $\alpha(x)$ сразу на нескольких элементарных отрезках может помочь избежать тупиковой ситуации [2], когда конструкция, не являясь оптимальной, тем не менее не может быть улучшена за счет локального варьирования управления только на одном из элементарных отрезков.

Построив таким образом новое управление $\alpha^*(x)$, принимаем его за начальное и строим следующее приближение. Процесс считается оконченным на данной сетке, если управление $\alpha(x)$ не изменяется ни на одном из множеств $D \subset \{D_i\}$. Полученное решение представляет собой локальный минимум в рассматриваемой задаче.

ПРИМЕР. Множество W состоит из пяти материалов, безразмерные плотности и модули Юнга которых приведены в таблице.

Материал	ρ	E
Сферопластик	0,65	270
Дюралюминий	2,85	7 100
Титановый сплав	4,6	12 000
Сталь	7,8	21 000
Медь	8,93	11 200

Стержень находится под действием осевой сжимающей нагрузки P , на которую наложено ограничение $P \geq P_0 = 18 000$. На концах стержня заданы граничные условия (1.3). Стержень разбивается по длине на 50 равных частей, моделирующих множества $\{D_i\}$.

Расчеты проводились с различными начальными приближениями, которые выбирались на основании численных расчетов и некоторых представлений. В результате получен трехслойный стержень весом $F^* = 2,814$ с критической нагрузкой $P = 18 219$ и слоями из титанового сплава, дюралюминия и сферопластика, расположенными на отрезках $[0; 0,08]$, $[0,08; 0,92]$, $[0,92; 1]$ соответственно. Самым легким однородным стержнем, удовлетворяющим ограничению (2.7), является стержень из титанового сплава весом $F_* = 4,6$. Относительный выигрыш по весу для оптимального стержня по сравнению с однородным стержнем составил $(1 - F^*/F_*) \cdot 100\% = 38,8\%$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01527).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978.
2. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 4/VI 1997 г.
