

б) Уравнение Чаплыгина с соответствующим функционалом. Известно [4], что если отбросить тривиальные преобразования, состоящие в умножении решения на множитель и в прибавлении к решению любого решения уравнения Чаплыгина, то группа  $G_a$  будто либо одно-, либо трехпараметрической. Соответствующий функционал, как можно показать, также дает либо одно-, либо трехпараметрическую группу. Таким образом, по исключении тривиальных преобразований для уравнений Чаплыгина получим  $G_a = G_i$ .

в) Функционал

$$\int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

с очевидным линейным уравнением Эйлера  $y'' = 0$ . Экстремальными этого функционала являются прямые. Проективные преобразования

$$x^* = \frac{ax + by + c}{a_0x + b_0y + c_0}, \quad y^* = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}$$

переводят прямые в прямые, и, следовательно, уравнение  $y'' = 0$  переходит в  $y^{*''} = 0$ . Эти проективные преобразования принадлежат группе  $G_a$ , между тем как группа  $G_i$  для функционала состоит из группы движений в плоскости  $x, y$ .

3) Наконец, возможен третий случай, когда в результате преобразования от  $x, y, \psi$  к  $x^*, y^*, \psi^*$  квадратичная форма  $\omega = f(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y) dx dy$  переходит в форму

$$\omega^* = \lambda f(x^*, y^*, \psi^*, \psi_{x^*}, \psi_{y^*}) dx^* dy^* + \mu \operatorname{div} B(x^*, y^*, \psi^*) dx^* dy^*$$

где  $\lambda, \mu$  — групповые множители,  $B(\dots)$  — некоторая функция. Очевидно, что такие преобразования входят в множество  $G_a$ , ибо уравнение Эйлера не меняется при добавлении членов типа дивергенции, но не входит в множество  $G_i$ .

Поступила 28 II 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Суровихин К. П. Применение вариационных методов в плоских вихревых течениях газа. Вестн. Моск. ун-та, 1963, № 4.
2. Noether E. Invariante Variationsprobleme «Nachrichten von der Kön. Ges. des Wiss. zu Göttingen», 1918, В. 2 (русск. перев.: Сб. Вариационные принципы механики под ред. Л. С. Полака). Физматгиз, 1959.
3. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, 1962.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Изд. СО АН СССР, 1962.

### ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГАЗОВОЙ ЗАВЕСЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

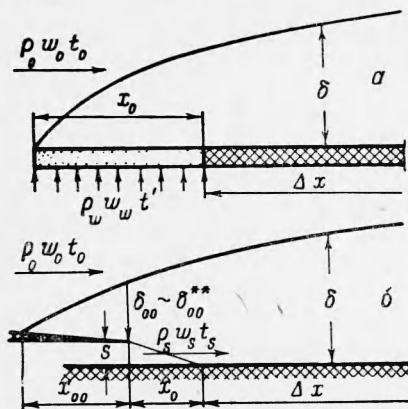
Э. П. Волчков, В. Я. Левченко

(Новосибирск)

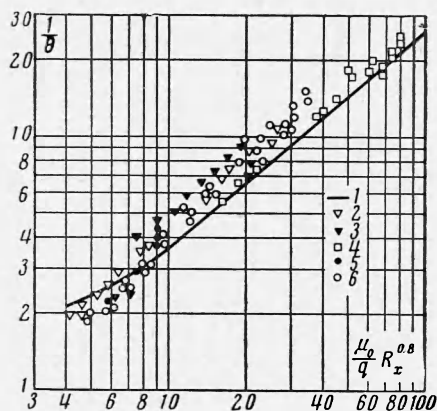
Одним из эффективных гидродинамических методов защиты элементов машин (стенки камер сгорания, сопла двигателей и т. п.) от воздействия высокотемпературных потоков газа является газовая завеса. Газовая завеса может быть организована, например, подачей охлаждающего газа через пористый участок, через одну или ряд щелей на начальном участке охлаждаемого объекта. Исследованию эффективности газовой завесы посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [1-11]. Ниже приводится решение, позволяющее вести расчет различных случаев завесы одним способом. В основу рассуждений заложена физическая модель, предложенная в работе [4]: в случае вдува охладителя через пористую вставку (фиг. 1, а) или щель (фиг. 1, б) в сечении  $\Delta x = 0$  (начиная с которого падает эффективность  $\theta$ ) существует развившийся пограничный слой с соответствующими значениями толщины потери энергии  $\delta_{e0}^{**}$  и толщины потери импульса  $\delta_0^{**}$ . На основе полученного решения удовлетворительно обобщаются экспериментальные данные различных авторов. Из анализа теоретических формул и экспериментальных данных видно, что способ подачи охладителя не оказывает существенного влияния на эффективность завесы.

Эффективность газовой завесы определяется адиабатической температурой стенки. Ниже дается вывод формулы для ее расчета.

1. Пусть пластина обтекается потоком горячего газа. На начальном участке пластины организована подача холодного газа, таким образом, что температура стенки при  $x < x_0$  постоянна. Адиабатический участок пластины  $x > x_0$  (фиг. 1) защищается от потока горячего газа относительно охлажденным газом пограничного слоя.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Способы организации газовой завесы

Фиг. 2. Подача охладителя через пористый участок; 1 — расчет по формуле (2.5); точки: 2, ..., 6 — опыты [8]

Поток тепла, который необходимо подвести на участке  $x > x_0$ , чтобы температура стенки была равна температуре основного потока, равен [5]

$$q_{w1} = \alpha_x (t_{w0} - t_0) + f(x, x_0) \alpha_{\Delta x} (t_0 - t_{w0}) \quad (1.1)$$

Здесь  $\alpha_x$  и  $\alpha_{\Delta x}$  — коэффициенты теплоотдачи на пластине при  $t_w = \text{const}$ .

Но этот же тепловой поток можно записать, используя температуру теплоизолированной стенки [5]

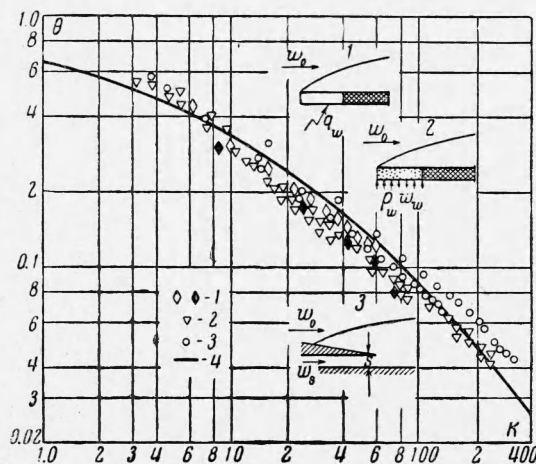
$$q_{w1} = \alpha_1 (t_0 - t_{aw}) \quad (1.2)$$

Коэффициенты теплоотдачи определяются из закона теплообмена [3]

$$S = \frac{A}{R^{**m_1}} P^{-0.75} \quad (1.3)$$

Здесь  $S$  — число Стентона,  $R^{**}$  — число Рейнольдса, построенное по толщине потери энергии.  $P$  — число Прандтля, и для степенного профиля скорости с показателем  $n = 1/7$  имеем [3], что  $A = 0.0128$ ,  $m_1 = 0.25$ .

Фиг. 3. Обобщение опытных данных по эффективности газовой завесы при различных способах ее организации: 1 — опыты [7], 2 — опыты [8], 3 — опыты  $m \leq 0.2$  [10], 4 — расчет по формуле (3.4)



Уравнения (1.1) — (1.3) дают

$$\frac{\theta}{R_1^{**m_1}} = \frac{1}{R_{\Delta x}^{**m_1}} f(x, x_0) - \frac{1}{R_x^{**m_1}} \left( \theta = \frac{t_0 - t_{aw}}{t_0 - t_{w0}} \right) \quad (1.4)$$

Функция  $f(x, x_0)$  имеет вид [3]

$$f(x, x_0) = \left[ \frac{A(m_1 + 1) R_{\Delta x}}{R_0^{**(m_1+1)} + A(m_1 + 1) R_{\Delta x}} \right]^{0.086} \quad (1.5)$$

Значения  $R_x^{**}$  и  $R_{\Delta x}^{**}$  находятся из решения уравнения энергии для пластины при  $t_w = \text{const}$ , а  $R_{\Delta x}^{**}$  и  $R_x^{**}$  — из решения уравнения импульсов. В случае  $P \approx 1.0$  имеем

$$R_x^{**} = [R_0^{**(m_1+1)} + A(m_1+1)R_{\Delta x}^{**}]^{1/m_1+1}, \quad R_{\Delta x}^{**} = [A(m_1+1)R_{\Delta x}^{**}]^{1/(m_1+1)} \quad (1.6)$$

$$R_x^{**} = [R_0^{**(m_1+1)} + A(m_1+1)R_{\Delta x}^{**}]^{1/m_1+1}, \quad R_{\Delta x}^{**} = [A(m_1+1)R_{\Delta x}^{**}]^{1/(m_1+1)} \quad (1.7)$$

При  $x \rightarrow \infty$  можно записать

$$\int_{x_0}^x q_{w1} dx = \rho_0 w_0 c_{p0} (t_0 - t_{w0}) \delta_{e0}^{**} \quad (1.8)$$

Отсюда

$$R_1^{**} = \frac{R_0^{**}}{\theta} \quad (1.9)$$

При помощи (1.5), (1.7) и (1.9) из уравнения (1.4) получается формула для определения безразмерной адиабатической температуры стенки («эффективности»)

$$\theta = \left[ \left( \frac{R_x^{**}}{R_{\Delta x}^{**}} \right)^{m_1} f(x, x_0) - 1 \right]^{1/m_1+1} \left( \frac{R_0^{**}}{R_x^{**}} \right)^{m_1/m_1+1} \quad (1.10)$$

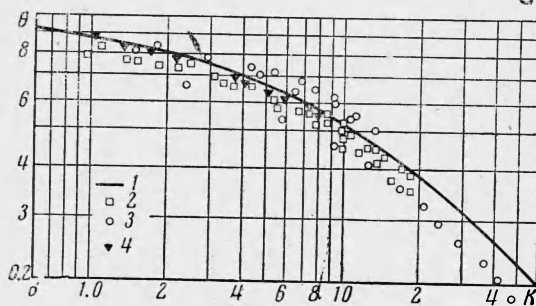
2. Если охлаждающий газ подается через пористый участок в начале пластины (фиг. 1, а), то для сверхкритического вдува уравнение энергии для области  $x < x_0$  запишется в виде [3]

$$\frac{dR_e^{**}}{dR_x} - \frac{c_p \rho_w w_w}{c_{p0} \rho_0 w_0} = 0 \quad (2.1)$$

Отсюда при  $c_p \rho_w w_w / c_{p0} \rho_0 w_0 = \text{const}$  в точке  $x = x_0$  получаем следующее значение

$$R_0^{**} = \frac{\rho_w w_w}{\mu_0} x_0 = \frac{q}{\mu_0} \quad (2.2)$$

где  $q$  — количество вдуваемого газа на единицу ширины поверхности. Если вдув меньше крити-



Фиг. 4. Эффективность щелевого охлаждения при  $m \approx 1$ ; 1 — расчет по формуле (3.5), 2 — опыты [8], 3 — опыты [10], 4 — опыты [11]

ческого, значение  $R_0^{**}$  находится из расчета пористого участка [3]. В этом случае

$$R_0^{**} = \frac{q}{\mu_0} \frac{t_0 - t'}{t_0 - t_{w0}} \quad (2.3)$$

Так как в случае теплообмена на пористой стенке толщина потери импульса равна толщине потери энергии [3], то в сечении  $x = x_0$

$$R_0^{**} = R_0^{**} \quad (2.4)$$

Тогда формула (1.10) при сверхкритическом вдуве через пористый участок примет вид

$$\theta = \frac{t_0 - t_{aw}}{t_0 - t'} = \frac{\{ [1 + 62.5(\mu_0 q^{-1} R_{\Delta x}^{0.8})^{-1.25}]^{0.114} - 1 \}^{0.8}}{[1 + 0.016(\mu_0 q^{-1} R_{\Delta x}^{0.8})^{1.25}]^{0.16}} \quad (2.5)$$

Как видно из фиг. 2, на которой представлено сопоставление расчетов по формуле (2.5) с экспериментальными данными работы [8], теоретическая формула удовлетворительно описывает экспериментальные данные.

3. Пусть охлаждающий газ вдувается через одиночную щель (фиг. 1, б). В этом случае в сечении щели

$$\delta_{e0}^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} \left( 1 - \frac{t - t_w}{t_0 - t_w} \right) dy = \frac{\rho_s w_s}{\rho_0 w_0} s \quad (3.1)$$

$$\delta_0^{**} = \int_0^{\infty} \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} \left( 1 - \frac{w}{w_0} \right) dy = \frac{\rho_s w_s}{\rho_0 w_0} \left( 1 - \frac{w_s}{w_0} \right) s$$

С учетом (3.1) формула (1.10) для «эффективности»  $\theta$  принимает вид ( $p_s \approx p_0$ )

$$\theta = \frac{\{[1 + 62.5K^{-1}]^{0.2} [1 + 62.5K^{-1} |1 - m|^{1.25}]^{-0.086} - 1\}^{0.8}}{[1 + 0.016K]^{0.16}} \quad (3.2)$$

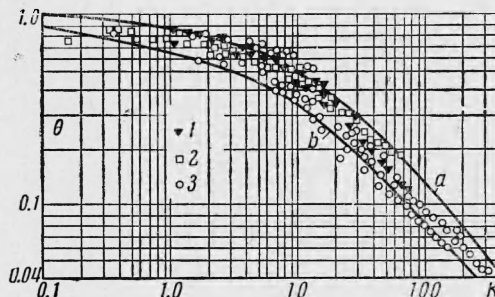
$$\left( \theta = \frac{t_0 - t_{0w}}{t_0 - t_s}, \quad K = \frac{\Delta x}{ms} R_s^{-0.25} = \frac{R_{\Delta x}}{R_{e0}^{**1.25}}, \quad m = \frac{\rho_s w_s}{\rho_0 w_0} \right)$$

Большинство экспериментов по щелевому охлаждению проводилось при наличии развитого пограничного слоя в основном потоке. Предлагаемый метод позволяет учесть его влияние при выводе формулы (1.10); при этом можно получить

$$\frac{\theta'}{\theta} = \left[ \frac{1 + 0.016K}{(1 + \delta_{00}^{**} m^{-1} s^{-1})^{1.25} + 0.016K} \right]^{0.07} \quad (3.3)$$

Здесь  $\theta'$  и  $\theta$  — эффективность завесы при наличии начального пограничного слоя и без него,  $\delta_{00}^{**}$  — толщина потери импульса над щелью. Формула (3.3) находится в соответствии с опытными данными Себана.

В формуле (3.2) нельзя выделить комплекса, который бы позволил обобщить опытные данные. Поэтому рассматриваются три предельных случая, для которых можно получить интерполяционные формулы.

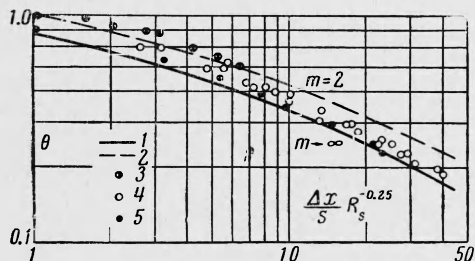


Фиг. 5. Подача охладителя через тангенциальную щель  $0 < m < 1$ ; кривые *a* и *b* — соответственно расчет по формулам (3.5) и (3.4); точки: 1 — опыты [7, 11], 2 — опыты [8], 3 — опыты [10]

(а) При  $m \ll 1$  из формулы (3.2) для  $\theta$  получаем следующее выражение

$$\theta = \{[1 + 62(K + 0.143)^{-1}]^{0.114} - 1\}^{0.8} [1 + 0.016K]^{-0.16} \quad (3.4)$$

На фиг. 3 и 5 дано сопоставление расчета по формуле (3.4) с опытными данными [7, 8, 10]. Как видно, формула (3.4) удовлетворительно описывает эксперимент. На фиг. 3 нанесены данные работ [7, 8]. Несмотря на различие в способе организации газовой завесы, экспериментальные значения эффективности хорошо обобщаются одним и тем же параметром.



Фиг. 6. Эффективность газовой завесы при  $m > 1$ : 1 и 2 — расчет по формулам (3.6) и (3.2) соответственно, 3 — опыт  $m \approx 2$  [10], 4 — опыт  $2 < m < 10$  [10], 5 — опыт  $m \approx 21$  [10]

(б) Для  $m \approx 1$  формула (3.2) принимает вид

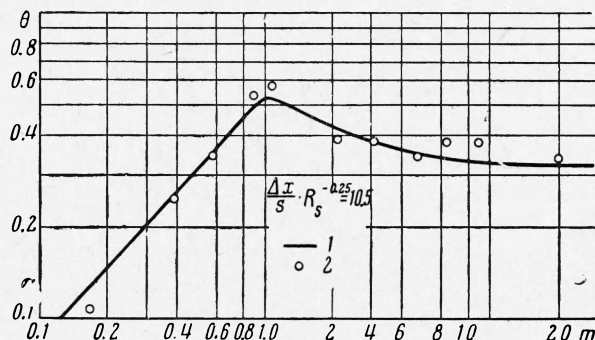
$$\theta = \{[1 + 62.5(K + 2)^{-1}]^{0.2} - 1\}^{0.8} (1 + 0.016K)^{-0.16} \quad (3.5)$$

Из фиг. 4 и 5 видно, что данная формула удовлетворительно описывает экспериментальные данные [6,9-11].

(в) Для  $m \rightarrow \infty$  можно построить интерполяционную формулу

$$\theta = \left\{ \left[ 1 + \frac{62.5}{s^{-1} \Delta x R_s^{-0.25} + 0.143} \right]^{0.114} - 1 \right\}^{0.8} \quad (3.6)$$

На фиг. 6 дано сравнение опытных данных [10] с расчетом по формуле (3.6) и с расчетом по формуле (3.2) при  $m = 2$ .



Фиг. 7. Зависимость эффективности заградительного охлаждения от параметра вдува: 1 — расчет по формуле (3.2), 2 — опыты [10]

Себаном [10] на основе анализа экспериментальных данных было показано, что с увеличением параметра вдува  $m$  эффективность растет, достигает максимума при  $m \approx 1$ , а при дальнейшем увеличении  $m$  падает с асимптотическим приближением к значению эффективности при  $m \approx 0.6$ . Аналитическую зависимость эффективности  $\theta$  от параметра вдува можно найти из формулы (3.2). Сопоставление расчета по формуле (3.2) с опытными данными Себана приведено на фиг. 7. Расчет предсказывает то же поведение  $\theta$  при изменении  $m$ , что подмечено в экспериментах.

Поступила 1 II 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Авдуевский В. С. и др. Теплопередача в авиационной и ракетной технике. Оборонгиз, 1960.
3. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд-во СО АН СССР, 1962.
4. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепловая завеса при турбулентном пограничном слое газа. Теплофизика высоких температур, 1963, т. 1, № 2.
5. Эккерт Э. Р. и Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. Госэнергоиздат, 1961.
6. Гартнетт, Эккерт, Биркебак. Анализ основных характеристик турбулентного пограничного слоя с подачей воздуха через тангенциальные щели. Тр. Америк. об-ва инженеров-механиков (русс. перев), Теплопередача, т. 83, сер. С, № 3, 1961.
7. Reynolds W. C., Kaays W. M., Kline S. I. A Summary of Experiments on Turbulent Heat Transfer From a Nonisothermal Flat Plate. Trans. ASME C, 1960, vol. 82, No. 4.
8. Nishiwaki N., Hirata M., Tsuchida A. Heat Transfer on a Surface Covered by Cold Air Film. Internat. Development in Heat Transfer, part IV, sect. A, 1961.
9. Чин, Скирвин, Хейз, Баркграф. Пленочное охлаждение при многощелевом и решетчатом вдуве. Тр. Америк. об-ва инж.-механиков (русс. перев), Теплопередача, 1961, т. 83, сер. С, № 3.
10. Seban R. A. Heat Transfer and Effectiveness for a Turbulent Boundary Layer With Tangential Fluid Injection. Trans. A. S. M. E., C. 1960, vol. 82, No 4.
11. Hartnett I. P., Birkebak R. C., Eckert E. R. G. Velocity Distributions, Temperature Distributions, Effectiveness and Heat Transfer in Cooling of a Surface With a Pressure Gradient. Internat. Development in Heat Transfer, part IV, sect A, 1961.