

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С НЕПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

УДК 517.958

Ю. В. Гурков, А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

Работа посвящена реализации одного численного метода решения двумерных задач Стефана, в которых свободная граница не является линией уровня. В основу расчетов положен метод линий, позволяющий свести многомерную задачу к последовательности одномерных задач со свободной границей, которые, в свою очередь, посредством применения преобразования Риккати сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом положение свободной границы на каждой линии находится как корень некоторого скалярного уравнения. Основы метода разработаны в [1, 2].

В данной работе этот метод используется для решения двумерных двухфазных задач со свободными границами с различными краевыми условиями как на боковых границах рассматриваемой прямоугольной области, так и на свободной границе. Также описано применение метода в случае задач с несколькими свободными границами.

**1. Постановка задачи.** Предполагая, что свободная граница, разделяющая твердую и жидкую фазы в области  $D = [0,1] \times [0,1]$ , определяется уравнением  $y = s(x, t)$  ( $s(x, t)$  дважды непрерывно дифференцируема по пространственной переменной и непрерывно дифференцируема по времени), будем искать функции  $u(x, y, t)$ ,  $U(x, y, t)$  и  $s(x, t)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

уравнениям теплопроводности в жидкой и твердой фазах соответственно

$$\begin{aligned} u_t &= k_l \Delta u & \text{при} & \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < s(x, t), \quad t > 0, \\ U_t &= k_s \Delta U & \text{при} & \quad 0 < x < 1, \quad s(x, t) < y < 1, \quad t > 0, \end{aligned}$$

условию на свободной границе

$$u = U = -\sigma/\rho(x, t) - qv \quad \text{при} \quad y = s(x, t),$$

условию Стефана

$$\lambda v = k_l \partial u / \partial \mathbf{n} - k_s \partial U / \partial \mathbf{n} \quad \text{при} \quad y = s(x, t),$$

где  $\sigma$ ,  $q$ ,  $\lambda$ ,  $k_l$ ,  $k_s$  — фиксированные положительные постоянные;  $\mathbf{n} = (-s_x(x, t), 1) / \sqrt{s_x^2 + 1}$  — вектор нормали к свободной границе;  $v = (\partial s / \partial t) / \sqrt{s_x^2 + 1}$  — нормальная скорость свободной границы;  $\rho(x, t)$  — радиус кривизны свободной границы.

В первом слагаемом условия на свободной границе учитывается влияние кривизны свободной границы на температуру фазового перехода (условие Гиббса — Томсона), второе слагаемое представляет собой так называемое кинетическое условие, введение которого оправдано тем, что в переохлажденной задаче Стефана с постоянной температурой таяния возможно резкое возрастание градиентов за конечное время (градиентная катастрофа), свободная граница при этом движется с неограниченной скоростью. Кинетическое условие учитывает пропорциональность температуры фазового перехода и скорости движения

свободной границы, что позволяет избежать вышеописанных эффектов. Задачам с такими условиями посвящено множество работ, в частности [3-5].

На нижней ( $y = 0$ ) и верхней ( $y = 1$ ) границе рассматриваемой области задаются условия первого рода для функций  $u$  и  $U$  соответственно. На боковых границах в нашей работе предполагается равенство нулю нормальных производных функций  $u$  и  $U$  или ставятся условия первого рода. Постановку задачи завершает задание начальных распределений для  $u$  и  $U$  и начального положения свободной границы  $y = s(x, 0)$ .

**2. Аппроксимация задачи.** Для сведения нашей задачи к серии одномерных задач со свободными границами на временном слое  $t_n$  аппроксимируем вторые производные по  $x$  функций  $u$ ,  $U$  и  $s$  центральными разностями:

$$u_{xx}(x_i, y, t_n) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad i\Delta x = i/N_x, \quad i = 1, \dots, N_x - 1,$$

$$s_{xx}(x_i, t_n) = \frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{\Delta x^2}, \quad i\Delta x = i/N_x, \quad i = 1, \dots, N_x - 1,$$

при этом для аппроксимации производной по времени используется разность «назад»:

$$u_t(x_i, y, t_n) = \frac{u_i - u_{i,n-1}}{\Delta t}, \quad s_t(x_i, t_n) = \frac{s_i - s_{i,n-1}}{\Delta t}.$$

Для аппроксимации условий на свободной границе положим

$$\frac{du}{dx}(x_i, s_i, t_n) = \frac{u_{i+1}(s_{i+1}) - u_{i-1}(s_{i-1})}{2\Delta x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (2.2)$$

В случае задания значений функций  $u$  и  $U$  на боковых границах для аппроксимации условий на свободной границе применяются односторонние производные:

$$\frac{du}{dx}(x_0, s_0, t_n) = \frac{4u_1(s_1) - u_2(s_2) - 3u_0(s_0)}{2\Delta x},$$

$$\frac{du}{dx}(x_N, s_N, t_n) = \frac{-4u_{N-1}(s_{N-1}) + u_{N-2}(s_{N-2}) + 3u_N(s_N)}{2\Delta x}; \quad (2.1')$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}(x_0, t_n) = \frac{4s_1 - s_2 - 3s_0}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial s}{\partial x}(x_N, t_n) = \frac{-4s_{N-1} + s_{N-2} + 3s_N}{2\Delta x}. \quad (2.2')$$

Используя тождество

$$\frac{d}{dx} u(x, s(x, t)) = u_x + u_y s_x(x, t)$$

для аппроксимации производной  $u_x$  на свободной границе, находим выражение

$$u_x(x_i, y, t_n) = \frac{u_{i+1}(s_{i+1}) - u_{i-1}(s_{i-1})}{2\Delta x} - u_y \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta x}.$$

В случае условий Дирихле на боковых границах для  $i = 0$  и  $i = N$  соответствующие выражения легко получаются с применением формул (2.1') и (2.2'). Все вышеизложенное переносится без всяких изменений и на функции  $U_i$ .

Таким образом, для функций  $u_i(y)$  и  $U_i(y)$  имеем систему линейных дифференциаль-

ных уравнений:

$$L_i(u_i) \equiv u_i'' - \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_l \Delta t} \right] u_i = F_i(u_{i,n-1}, u_{i-1}, u_{i+1}) \quad \text{на } (0, s_i),$$

$$L_i(U_i) \equiv U_i'' - \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_s \Delta t} \right] U_i = F_i(U_{i,n-1}, U_{i-1}, U_{i+1}) \quad \text{на } (s_i, 1),$$

где

$$F_i(u_{i,n-1}, u_{i-1}, u_{i+1}) = -\frac{(u_{i+1} + u_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{u_{i,n-1}}{k_l \Delta t},$$

$$F_i(U_{i,n-1}, U_{i-1}, U_{i+1}) = -\frac{(U_{i+1} + U_{i-1})}{\Delta x^2} - \frac{U_{i,n-1}}{k_s \Delta t}$$

с условиями на свободной границе  $y = s_i$ :

$$u = U = -\frac{\sigma(s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1})}{\Delta x^2(1 + s_i'^2)^{3/2}} - q \frac{s_i - s_{i,n-1}}{\Delta t(1 + s_i'^2)^{1/2}},$$

$$\frac{-\lambda(s_i - s_{i,n-1})}{\Delta t} = (k_s - k_l) \frac{du}{dx}(x_i, s_i, t_n) s_i' - (1 + s_i'^2)(k_l u_i'(s_i) - k_s U_i'(s_i)).$$

Здесь  $du/dx$  и  $s_i'$  задаются формулами (2.1) и (2.2). Обозначим эту систему одномерных задач со свободными границами через  $A$ .

**3. Алгоритм численного решения.** Систему одномерных задач со свободными границами нахождения функций  $u_i(y)$ ,  $U_i(y)$  и константы  $s_i$  на временном слое  $t = t_n$  будем решать итерационным методом, аналогичным методу последовательной верхней релаксации с итерациями

$$L_i(\tilde{u}_i) = F_i(u_{i,n-1}, u_{i-1}^{k+1}, u_{i+1}^k), \quad u_i^{k+1} = u_i^k + \omega(\tilde{u}_i - u_i^k) \quad \text{для } y \in (0, s_i^{k+1}); \quad (3.1)$$

$$L_i(\tilde{U}_i) = F_i(U_{i,n-1}, U_{i-1}^{k+1}, U_{i+1}^k), \quad U_i^{k+1} = U_i^k + \omega(\tilde{U}_i - U_i^k) \quad \text{для } y \in (s_i^{k+1}, 1), \quad (3.2)$$

где  $\omega \in [1, 2)$  — итерационный параметр;  $i \in [0, N]$  в случае задания условий Неймана на боковых границах рассматриваемой области и  $i \in [1, N - 1]$  для условий Дирихле. Положение свободной границы на  $i$ -й линии  $s_i^{k+1}$ , где  $i$  меняется от нуля до  $N$ , как для условий Неймана на боковых границах, так и для условий Дирихле находится как корень скалярного уравнения, которое выписано ниже и для решения которого применяется метод линейной интерполяции между узлами сетки по  $y$ . Итак, система задач со свободными границами  $A$  для нахождения функций  $u_i(y)$ ,  $U_i(y)$  и чисел  $s_i$  на слое  $t = t_n$  распадается на последовательность задач (3.1), (3.2); обозначим ее  $\{A^{k+1}\}$  и будем решать для фиксированного  $k$ , последовательно переходя от  $i$  к  $i + 1$ .

Каждую задачу  $A^{k+1}$  (т. е. (3.1), (3.2)), согласно [1], будем решать с использованием преобразования Риккати. Пусть

$$u_i'(y) = v_i(y), \quad u_i(y) = R_l(y)v_i(y) + w_{l,i}(y),$$

аналогично

$$U_i'(y) = V_i(y), \quad U_i(y) = R_s(y)V_i(y) + w_{s,i}(y).$$

Опуская индексы  $i, k$ , запишем задачи Коши для нахождения функций  $R_l(y)$ ,  $w_{l,i}(y)$ :

$$R_l' = 1 - R_l^2 \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_l \Delta t} \right], \quad R_l(0) = 0; \quad (3.3)$$

$$w'_l = -R_l \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_l \Delta t} \right] w_l + R_l F, \quad w_l(0) = u(x_i, 0, t_n). \quad (3.4)$$

Аналогично записываются задачи для определения  $R_s(y)$ ,  $w_{s,i}(y)$ .

Для численного решения этих задач применяется явный метод Рунге — Кутты первого порядка на фиксированной сетке с равноотстоящими узлами.

Положение свободной границы  $s_i^{k+1}$  на линии  $x = x_i$  для  $i \in [1, N-1]$  может быть найдено как корень скалярного уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(y) \equiv & \left[ \left[ \frac{s_{i+1}^k - s_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} \right]^2 + 1 \right] \left[ k_l \frac{I(y) - w_l(y)}{R_l(y)} - k_s \frac{I(y) - w_s(y)}{R_s(y)} \right] - \\ & - \left[ \frac{s_{i+1}^k - s_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} \right] (k_l - k_s) \frac{u_{i+1}^k(s_{i+1}^k) - u_{i-1}^{k+1}(s_{i-1}^{k+1})}{2\Delta x} - \lambda \frac{y - s_{i,n-1}}{\Delta t} = 0, \end{aligned}$$

где  $I(y) = u(y) = U(y) = -\sigma(s_{i+1}^k - 2y + s_{i-1}^{k+1}) / [\Delta x^2(1+s'^2)^{3/2}] - q(y - s_{i,n-1}) / [\Delta t(1+s'^2)^{1/2}]$ , а, согласно (2.2),  $s' = (s_{i+1}^k - s_{i-1}^{k+1}) / 2\Delta x$ . Для  $i = 0$  это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(y) \equiv & \left[ \left[ \frac{4s_1^k - s_2^k - 3y}{2\Delta x} \right]^2 + 1 \right] \left[ k_l u_y(0, y, t_n) - k_s U_y(0, y, t_n) \right] - \\ & - \left[ \frac{4s_1^k - s_2^k - 3y}{2\Delta x} \right] (k_l - k_s) \frac{4u_1^k(s_1^k) - u_2^k(s_2^k) - 3u_0^{k+1}(y)}{2\Delta x} - \lambda \frac{y - s_{i,n-1}}{\Delta t} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получим и уравнение для  $i = N$ .

В нашей работе корень уравнения  $\Phi(y) = 0$  находился линейной интерполяцией между двумя соседними узлами сетки по  $y$ , причем в качестве искомого значения  $s_i^{k+1}$  принимался ближайший к корню  $y$  узел. В случае существования нескольких корней уравнения  $\Phi(y) = 0$  выбирался, как правило, ближайший к положению свободной границы на предыдущей итерации.

Следующий этап — нахождение функций  $v(y)$  и  $V(y)$  как решений задач Коши:

$$\begin{aligned} v'(y) = v(y) R_l(y) \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_l \Delta t} \right] + \frac{w_l(y) - u_{i,n-1}(y)}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}(y) - u_{i-1}(y) + 2w_i(y)}{\Delta x^2}, \\ 0 < y < s_i, \quad v(s_i) = \frac{I(s_i) - w_l(s_i)}{R_l(s_i)}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} V'(y) = V(y) R_s(y) \left[ \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{1}{k_s \Delta t} \right] + \frac{w_s(y) - u_{i,n-1}(y)}{\Delta t} - \frac{u_{i+1}(y) - u_{i-1}(y) + 2w_s(y)}{\Delta x^2}, \\ s_i < y < 1, \quad V(s_i) = \frac{I(s_i) - w_s(s_i)}{R_s(s_i)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Задачи Коши (3.5), (3.6) решаются численно точно так же, как и задачи (3.3), (3.4), при этом значение  $u_{i+1}(y)$  берется с предыдущего итерационного слоя.

Решение задачи  $A^{k+1}$  завершается восстановлением  $u_i^{k+1}(y)$ ,  $U_i^{k+1}(y)$  по формулам

$$u_i^{k+1}(y) = R_l(y)v_i(y) + w_{l,i}(y), \quad U_i^{k+1}(y) = R_s(y)V_i(y) + w_{s,i}(y).$$

**4. Анализ сходимости.** Проводилось численное изучение сходимости итерационного процесса. За критерий оценки было принято значение равномерной нормы разности между значениями функции температуры, отвечающими двум последовательным итерациям. При этом были получены следующие результаты. В зависимости от начально-краевых

условий вышеописанная норма уменьшалась в 3–10 раз за одну итерацию при первоначальном значении порядка  $10^{-2}$ . В задаче 2 (п. 6) порядок невязки составил  $10^{-3}$ . Изменение  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  в разумных пределах существенного влияния на сходимость не оказывало, но следует отметить, что лучшие результаты были получены при соотношении  $\Delta y = \Delta x/10$ . Выбор параметра  $\omega$  осуществлялся в связи с минимизацией вышеназванного критерия в каждой конкретной задаче. Было отмечено положительное влияние поверхностного натяжения ( $\sigma > 0$ ) и кинетического переохлаждения ( $q > 0$ ) на устойчивость формы свободной границы в переохлажденной задаче (задача 5, п. 6).

**5. Многофронтные задачи.** Данный метод можно применить для расчета многофронтных задач. Проиллюстрируем это на примере задачи с двумя свободными границами.

Пусть область  $[0,1]^2$  разделяется двумя свободными границами:  $y = s_1(x, t)$ ,  $y = s_2(x, t)$ . Поставим задачу отыскания функций  $u_1(x, y, t)$ ,  $u_2(x, y, t)$ ,  $u_3(x, y, t)$ ,  $s_1(x, t)$ ,  $s_2(x, t)$ , удовлетворяющих следующим условиям: уравнениям теплопроводности

$$\begin{aligned} (u_1)_t &= k_1 \Delta u_1 && \text{в } (0,1) \times (0, s_1), \\ (u_2)_t &= k_2 \Delta u_2 && \text{в } (0,1) \times (s_1, s_2), \\ (u_3)_t &= k_3 \Delta u_3 && \text{в } (0,1) \times (s_2, 1), \end{aligned}$$

условиям на свободных границах

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 &= -\frac{\sigma_1}{\rho_1(x, t)} - q_1 v_1 && \text{на } s_1, \\ u_2 = u_3 &= -\frac{\sigma_2}{\rho_2(x, t)} - q_2 v_2 && \text{на } s_2, \\ -\lambda_1 v_1 &= k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} && \text{на } s_1, \\ -\lambda_1 v_2 &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} - k_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} && \text{на } s_2. \end{aligned}$$

На боковых границах могут быть заданы условия первого или второго рода, а на границах  $y = 0$  и  $y = 1$  — условия первого рода. Завершает постановку задание начальных условий.

Расчет предлагается вести следующим образом. Пусть далее верхний индекс  $k \geq 1$  означает номер итераций, которые делаются на одном временном слое. Положим, что  $u_1^{k-1}$ ,  $u_2^{k-1}$ ,  $u_3^{k-1}$ ,  $s_1^{k-1}$ ,  $s_2^{k-1}$  уже известны. Рассмотрим сначала область  $[0,1] \times [0, s_2^{k-1}]$  и применим к ней итерационную процедуру нахождения нового положения свободной границы и нового распределения температуры, описанную в пп. 2 и 3. Заметим, что итерации, которые делаются в рамках этой процедуры, являются внутренними и не связаны с итерациями по  $k$ . Единственное отличие этой процедуры в том, что ранее она применялась в прямоугольной области, а здесь одна из границ области криволинейная, что, однако, не является препятствием для реализации данного алгоритма, так как он построен на основе метода прямых. Условие на криволинейной границе области также остается условием первого рода, ибо оно представляет собой либо значение функции температуры на этой кривой, взятое с предыдущего итерационного слоя, если температура фазового перехода непостоянна, либо температуру фазового перехода в противном случае.

Итак, получены новое положение свободной границы  $s_1$  и новое распределение температур  $u_1$  и  $u_2$ . Аналогично, рассматривая область  $[0,1] \times [s_1^{k-1}, 1]$ , найдем  $s_2$ ,  $\tilde{u}_2$ ,  $u_3$ . Затем

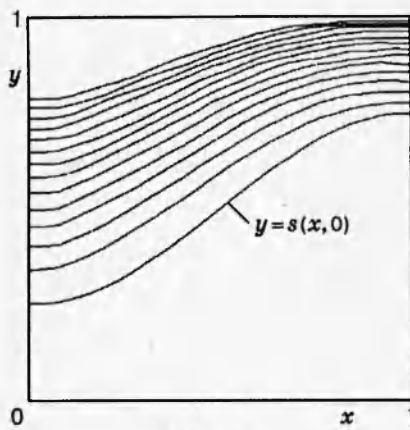


Рис. 1

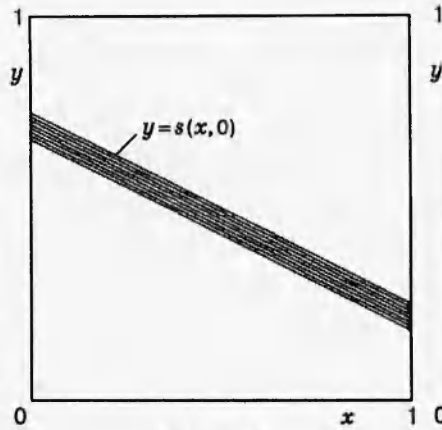


Рис. 2

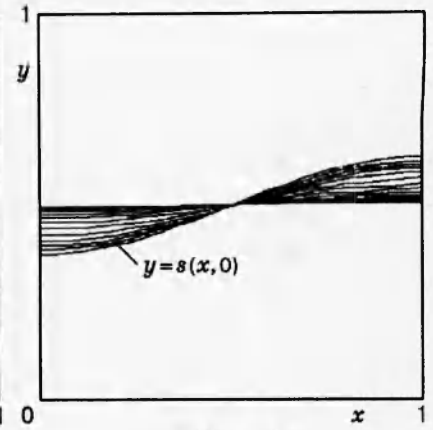


Рис. 3

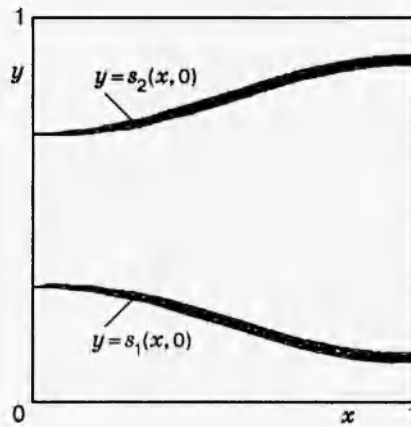


Рис. 4

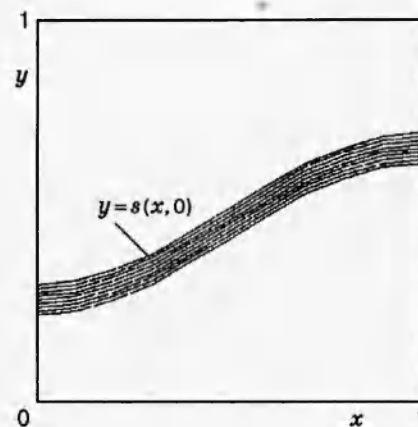


Рис. 5

ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned} u_1^k &= u_1^{k-1} + \omega_1(u_1 - u_1^{k-1}) && \text{на } (0, s_2^k), \\ u_2^k &= u_2^{k-1} + \omega_1((u_2 + \tilde{u}_2)/2 - u_2^{k-1}) && \text{на } (s_1^k, s_2^k), \\ u_3^k &= u_3^{k-1} + \omega_1(u_3 - u_3^{k-1}) && \text{на } (s_2^k, 1), \end{aligned}$$

где  $s_1^k = s_1^{k-1} + \omega_1(s_1 - s_1^{k-1})$ ;  $s_2^k = s_2^{k-1} + \omega_1(s_2 - s_2^{k-1})$ .

Итерационный процесс продолжается до получения удовлетворительного результата, затем делается переход на следующий временной слой.

## 6. Результаты численных расчетов.

1. Однофазная задача с поверхностным натяжением (рис. 1):

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= 1 - y/(0,5 - 0,25 \cos(\pi x)), & U(x, y, 0) &= 0, \\ s(x, 0) &= 0,5 - 0,25 \cos(\pi x), & u(x, 0, t) &= 1, & U(x, 1, t) &= 0, \end{aligned}$$

на боковых границах  $x = 0$  и  $x = 1$  задано условие нулевого потока,

$$Kl = Ks = 1, \quad \sigma = 0,001, \quad q = 0, \quad \lambda = 1, \quad \omega = 1,3, \quad dx = 0,04, \quad dy = 0,004, \quad dt = 0,05.$$

На рис. 1 показано продвижение фронта со временем.

2. «Бегущая волна» (рис. 2):

$$u(x, y, 0) = \exp(16(y + x/2 - 0,75)) - 1, \quad U(x, y, 0) = 0, \quad s(x, 0) = -x/2 + 0,75,$$

$$u(x, 0, t) = \exp(16(x/2 - 0,75 + 20t)) - 1, \quad U(x, 1, t) = 0,$$

$$u(0, y, t) = \exp(16(y - 0,75 + 20t)) - 1, \quad U(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = \exp(16(y - 0,25 + 20t)) - 1, \quad U(1, y, t) = 0,$$

$$Kl = 2, \quad Ks = 2, \quad \sigma = q = 0,001, \quad \lambda = 1, \quad \omega = 1,5, \quad dx = 0,04, \quad dy = 0,004, \quad dt = 0,018.$$

Продвижение фронта со временем представлено на рис. 2.

3. Двухфазная задача с поверхностным натяжением и динамическим переохлаждением (рис. 3):

$$u(x, y, 0) = 1 - y/(0,5 - 0,125 \cos(\pi x)), \quad s(x, 0) = 0,5 - 0,125 \cos(\pi x),$$

$$U(x, y, 0) = -1 + (y - 1)/(-0,5 - 0,125 \cos(\pi x)), \quad u(x, 0, t) = 1 + 20t, \quad U(x, 1, t) = -1 - 20t,$$

на боковых границах  $x = 0$  и  $x = 1$  задан нулевой поток,

$$Kl = Ks = 1, \quad \sigma = 0,001, \quad q = 0,0001, \quad \lambda = 1, \quad \omega = 1,5, \quad dx = 0,04, \quad dy = 0,004, \quad dt = 0,018.$$

На рис. 3 дано положение свободной границы в различные моменты времени.

4. Двухфазная задача с двумя фронтами (рис. 4):

$$s_1(x, 0) = 0,2 + 0,1 \cos(\pi x), \quad s_2(x, 0) = 0,8 - 0,1 \cos(\pi x),$$

$$u_1(x, y, 0) = 1 - y/(0,2 + 0,1 \cos(\pi x)), \quad u_2(x, y, 0) = 0,$$

$$u_3(x, y, 0) = 1 - (y - 1)/(-0,2 - 0,1 \cos(\pi x)), \quad u_1(x, 0, t) = 1, \quad u_3(x, 1, t) = 1,$$

на боковых границах  $x = 0$  и  $x = 1$  задан нулевой поток,

$$k_1 = 0,1, \quad k_2 = 0,2, \quad k_3 = 0,1, \quad \sigma_1 = q_1 = 0,001, \quad \lambda_1 = 0,8, \quad \sigma_2 = q_2 = 0,001,$$

$$\lambda_2 = 0,8, \quad \omega = 1,3, \quad \omega_1 = 1,3, \quad dx = 0,05, \quad dy = 0,005, \quad dt = 0,005.$$

На рис. 4 показано продвижение фронтов.

5. Задача с начальным переохлаждением (рис. 5):

$$u(x, y, 0) = -1 + y/(0,5 - 0,125 \cos(\pi x)), \quad s(x, 0) = 0,5 - 0,125 \cos(\pi x),$$

$$U(x, y, 0) = -1 + (y - 1)/(-0,5 - 0,125 \cos(\pi x)), \quad u(x, 0, t) = -1, \quad U(x, 1, t) = -1,$$

на боковых границах  $x = 0$  и  $x = 1$  задан нулевой поток,

$$Kl = Ks = 1, \quad \sigma = 0,001, \quad q = 0,001, \quad \lambda = 1, \quad \omega = 1,5, \quad dx = 0,04, \quad dy = 0,004, \quad dt = 0,018.$$

На рис. 5 дано положение свободной границы в различные моменты времени.

Авторы выражают признательность А. Ф. Воеводину за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17945).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer G. H. On the numerical solution of free boundary problems for reaction-diffusion systems // Control and Cybernetics. 1985. N 14. P. 115–126.
2. Meyer G. H. On computing free boundaries which are not level sets // Proc. of the 1987 IRSEE Conference, Pitman Research Notes in Mathematics.
3. Уманцев А. Р. Движение плоского фронта при кристаллизации // Кристаллография. 1985. Т. 30, № 1. С. 153–160.
4. Howison S., Weiqing X. Kinetic undercooling regularisation of supercooled Stefan problems // Int. Ser. of Num. Math. Basel: Birkhauser Verlag, 1989. V. 88. P. 227–237.
5. Dewynne J. H., Howison S. D., Ockendon J. R., Weiqing X. Asymptotic behavior of solutions to the Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1989. V. 31. P. 81–96.

*Поступила в редакцию 28/XII 1994 г.,  
в окончательном варианте — 23/V 1995 г.*

---