ПМТФ, № 2, 1989

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Л. В. ОВСЯННИКОВА

С. И. Похожаев

(Москва)

В 1958 г. Л. В. Овсянников поставил передо мной проблему исследования первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = u^2$. Эта проблема возникла при изучении околозвуковых течений газа [1]. Первые результаты были получены в 1960—1961 гг. [2—4]. В 1979 г. предложен [5] и позднее развит [6] метод расслоения для исследования в целом нелинейных краевых задач.

В настоящей работе этим методом исследуется задача, поставленная Л. В. Овсянниковым. Ранее эта задача приводилась нами в качестве одного из приложений метода расслоения. Полученные этим методом результаты перекрывают ранее найденные другими методами. Отдельно приводится результат о единственности решения специальной краевой задачи для уравнения $\Delta u = u^2$. Эта теорема следует как из результатов Кииди в изложении Е. Данцера [7], так и работы Б. Гидаса, В. Ни и Л. Ниренберга [8].

1. Вывод уравнения. Исследование пространственных околозвуковых течений идеального политропного газа приводит, как показал Л. В. Овсянников [1], к изучению уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u - 1)^2$$

(u — приведенная проекция скорости потока на ось z). Оно имеет точные решения:

$$u(x, y, z) = 1 + u_0(x, y) + u_1(x, y)z + (1/12)u_2(x, y)z^2.$$

Здесь функции $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ находятся из уравнений

$$\Delta u_0 - \frac{1}{3}u_2u_0 = 2u_1^2; \tag{1.1}$$

$$\Delta u_1 - u_2u_1 = 0; \tag{1.2}$$

$$\Delta u_2 - u_2^2 = 0. \tag{1.3}$$

Таким образом, определяющим является уравнение (1.3).

В случае околозвуковых течений, примыкающих к звуковой плоскости $z = 0$, на которой $u \equiv 1$, имеем $u_0(x, y) \equiv u_1(x, y) \equiv 0$, тогда система (1.1)—(1.3) сводится к одному уравнению (1.3). Отметим, что положительному решению этого уравнения соответствует сверхзвуковое течение, а отрицательному — дозвуковое.

Уравнение $\Delta u = u^2$ возникает также при изучении и некоторых других физических процессов. Оно представляет определенный интерес и с точки зрения теории нелинейных уравнений как уравнение с ведущим четным нелинейным оператором.

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область из $\mathbf{R}^n$ при $n \leqslant 5$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$\Delta\Phi + \Phi^2 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \Phi = h(x) \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{с} \quad h \in W_2^{1/2}(\partial\Omega). \tag{2.1}$$

Заметим, что рассматриваемое уравнение эквивалентно в силу замены $\Phi \to \Phi_1 = -\Phi$ уравнению $\Delta\Phi_1 = \Phi_1^2$.

Пусть H — гармоническая функция из $W_2^1(\Omega)$ такая, что $\Delta H = 0$ в Ω, $H = h(x)$ на $\partial\Omega$. Тогда исходная краевая задача эквивалентна ($\Phi = u + H$) следующей:

$$\Delta u + (u + H(x))^2 = 0 \text{ в } \Omega, \ u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Этой задаче соответствует функционал

$$f(u) = \int_\Omega |Du|^2 dx + \int_\Omega \left[-\frac{2}{3}(u + H)^3 + \frac{2}{3} H^3 \right] dx$$

в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ с нормой $\|u\| = \left(\int_\Omega |Du|^2 dx \right)^{1/2}$. Тогда u — критическая точка из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ функционала f, т. е. $f'(u) = 0$ является решением краевой задачи (2.2), и наоборот.

3. Расщепление методом сферического расслоения. Следуя методу сферического расслоения [5], представим искомое решение $u(x) \not\equiv 0$ краевой задачи (2.2), т. е. критическую точку $u \neq 0$ функционала f, в виде $u = tv$, где $t \in \mathbf{R}$ и $v \in S = \left\{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \mid \|w\| = 1 \right\}$. Тогда

$$f(tv) = t^2 + \int_\Omega \left[-\frac{2}{3}(tv + H)^3 + \frac{2}{3} H^3 \right] dx$$

$$\left(v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ с } \int_\Omega |Dv|^2 dx = 1 \right).$$

Уравнение $f'(u) = 0$ с $u \neq 0$ эквивалентно в силу метода расслоения [5] системе

$$f_t \equiv 2t - 2\int_\Omega (tv + H)^2 v dx = 0; \tag{3.1}$$

$$f_v \equiv -2(tv + H)^2 t = -\lambda \Delta v. \tag{3.2}$$

Здесь λ — множитель Лагранжа вариационной задачи для условно-критической точки $v \in S$ функционала $f(tv)$.

Из скалярного уравнения (3.1) относительно t находим

$$t_i(v) = \left\{ 1 - 2\int_\Omega Hv^2 dx + \nu_i \left[\left(1 - 2\int_\Omega Hv^2 dx \right)^2 - 4\int_\Omega H^2 v dx \int_\Omega v^3 dx \right]^{1/2} \right\} \left(2\int_\Omega v^3 dx \right)^{-1}$$

$$\text{с } \nu_i = \begin{cases} -1 & \text{при } i = 1, \\ 1 & \text{при } i = 2 \end{cases}$$

и функционалы $F_i(v) = f(t_i(v)v)$ $(i = 1, 2)$ при $\int_\Omega v^3 dx \neq 0$.

Тогда уравнение (3.2) эквивалентно условию существования критических точек функционалов F_1 и F_2 на единичной сфере S в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Анализ показывает, что функционал F_1 определен при всех $w \in B_1 = \{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \mid \|w\| \leqslant 1 \}$, а F_2 — при $w \in B_1 \left\backslash \left\{ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \mid \int_\Omega w^3 dx = 0 \right\} \right.$

4. Существование вещественных решений. Ясно, что не для любых правых частей h из указанного класса краевая задача (2.1) имеет вещественное решение. Относительно вещественной граничной функции $h \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ предположим, что отвечающая ей гармоническая функция H

удовлетворяет условиям

$$\sup_{w\in B_1}\int_\Omega Hw^2dx < 1/2; \tag{4.1}$$

$$\inf_{w\in B_1}\left\{\left(1-2\int_\Omega Hw^2dx\right)^2-4\int_\Omega H^2wdx\int_\Omega w^3dx\right\}>0. \tag{4.2}$$

При сделанных предположениях имеем

$$\sup_{w\in B_1} F_2(w)=\sup_{v\in S} F_2(v)=+\infty,$$

$$\inf_{w\in B_1} F_2(w)>-\infty,\quad \inf_{w\in B_1} F_1(w)>-\infty.$$

Отметим, что при $H(x)=0$ почти всюду в Ω одним из решений задачи (2.1) является тривиальное решение. Поэтому ниже предполагается, что

$$\|h\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\neq 0. \tag{4.3}$$

В этом случае $\inf\limits_{w\in B_1} F_1(w)<0$. Для функционалов F_1 и F_2 в единичном шаре B_1 пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ существуют соответствующие точки минимума w_1 и w_2. Для функционала F_1 в точке $w_1\in B_1$ имеем $F_1(w_1)=\min\limits_{w\in B_1} F_1(w)<0$. Из представления для $t_1(w)$ и $F_1(w)$ получаем, что $w_1\neq 0$ и $t_1(w)\neq 0$.

Далее устанавливаем, что в точке w_1 функционалы t_1 и F_1 дифференцируемы. Тогда структура функционала F_1, определенного методом сферического расслоения ($F_1(w)=f(t_1(w)w)$, где $t_1(w)$ удовлетворяет уравнению $t-\int_\Omega(tw+H)^2wdx=0$), показывает, что точка минимума $w_1\in B_1$ принадлежит S, следовательно, является условно-критической точкой функционала F_1 на единичной сфере S.

Из метода расслоения [5] следует, что $u_1=t_1(w_1)w_1$ — вещественная критическая точка функционала F_1, т. е. вещественное нетривиальное решение задачи (2.1) при указанных выше условиях (4.1)—(4.3) на вещественную функцию h из соответствующего класса.

Рассмотрим теперь функционал F_2 при условиях (4.1), (4.2), для которого существует точка $w_2\in B_1$ конечного минимума в единичном шаре B_1. В этой точке $w_2\neq 0$ имеем, что функционал t_2 дифференцируем и $t_2(w_2)\neq 0$. Тогда структура функционала F_2 показывает, что эта точка минимума принадлежит единичной сфере S.

Из метода расслоения [5] тогда вытекает, что $u_2=t_2(w_2)w_2$ является вещественным решением краевой задачи (2.1) при условиях (4.1), (4.2).

Суммируя полученные результаты и учитывая тривиальное решение задачи (2.1) (при $h=0$), получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть вещественная функция h краевой задачи* (2.1) *принадлежит пространству $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ и удовлетворяет условиям* (4.1), (4.2). *Тогда краевая задача* (2.1) *имеет разные вещественные решения u_1 и u_2.*

Тот факт, что $u_1(x)\not\equiv u_2(x)$, вытекает из неравенства $t_1(w_1)w_1(x)\not\equiv t_2(w_2)w_2(x)$.

5. Отсутствие вещественного решения. Метод сферического расслоения в приложении к задаче (2.2) устанавливает эквивалентность этой вариационной задачи

$$f'(u)=0 \tag{5.1}$$

в классе нетривиальных решений из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и системы

$$\langle f'(tv),\ v\rangle=0; \tag{5.2}$$

$$tf'(tv)=\lambda\Delta v \tag{5.3}$$

с $f'(tv) \equiv -2t\Delta v - 2(tv + H)^2$ в классе решений (t, v) из $(\mathbf{R}\setminus\{0\}) \times S$, где $S = \left\{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \mid \int\limits_\Omega |Dv|^2\, dx = 1\right\}$.

В силу уравнения (5.2) система (5.2), (5.3), в свою очередь, эквивалентна на указанном классе решений системе

$$\langle f'(tv),\ v\rangle = 0,\ f'(tv) = 0. \tag{5.4}$$

Отсутствие решения (t, v) из $(\mathbf{R}\setminus\{0\}) \times S$ этой системы влечет отсутствие решения $u \neq 0$ исходной вариационной задачи (5.1).

Пусть теперь ψ — пока произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда из (5.4) следует

$$\langle f'(tv),\ v\rangle = 0, \langle f'(tv),\ \psi\rangle = 0. \tag{5.5}$$

Поэтому, если найдется соответствующая функция $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, при которой (5.5) не имеет решения с $t \neq 0$ и $v \in S$, то исходная вариационная задача (5.1) также не имеет решения $u \neq 0$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Система (5.5) для задачи (2.2) принимает вид

$$t - \int\limits_\Omega (tv + H)^2\, vdx = 0, \quad -t\int\limits_\Omega v\Delta\psi dx - \int\limits_\Omega (tv + H)^2\,\psi dx = 0.$$

Здесь ψ — пока произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Первое уравнение этой системы, очевидно, можно получить из второго уравнения, полагая $\psi = v$.

Поэтому рассмотрим второе скалярное уравнение относительно t. Оно не имеет, очевидно, вещественного решения, если найдется функция $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что

$$\left(\int\limits_\Omega (\Delta\psi + 2H\psi)\, vdx\right)^2 < 4\int\limits_\Omega H^2\psi dx \int\limits_\Omega \psi v^2 dx \quad \forall v \in S. \tag{5.6}$$

С другой стороны, при $\psi(x) \geqslant 0$ в Ω имеем

$$\left(\int\limits_\Omega (\Delta\psi + 2H\psi)\, vdx\right)^2 = \left(\int\limits_\Omega \frac{\Delta\psi + 2H\psi}{\sqrt{\psi}}\sqrt{\psi}\, vdx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \frac{(\Delta\psi + 2H\psi)^2}{\psi}\, dx \int\limits_\Omega \psi v^2 dx.$$

Неравенство (5.6) будет выполнено, если существует функция $\psi \geqslant 0$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_\Omega \frac{(\Delta\psi + 2H\psi)^2}{\psi}\, dx < 4\int\limits_\Omega H^2\psi dx.$$

Итак, получаем следующий признак отсутствия вещественного решения $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1).

Пусть существует функция $\psi \geqslant 0$ *из* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *такая, что*

$$\int\limits_\Omega \left[\frac{(\Delta\psi)^2}{\psi} + 4H\Delta\psi\right] dx < 0. \tag{5.7}$$

Тогда краевая задача (2.1) *не имеет вещественного решения в пространстве* $W_2^1(\Omega)$.

Выбирая теперь соответствующие конкретные функции $\psi \geqslant 0$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, получаем конкретные признаки отсутствия вещественного решения краевой задачи (2.1) в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Отметим, что признак (5.7) в отличие от традиционных признаков отсутствия решения для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка является не поточечным, а интегральным.

Поясним это на примере. Рассмотрим краевую задачу (2.1), где Ω есть единичный круг в плоскости $\mathbf{R}^2$ с центром в начале координат и граничная функция h в полярных координатах равна $A\cos\theta$:

$$\Delta\Phi + \Phi^2 = 0 \text{ в } \Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | r^2 = x^2 + y^2 < 1\}, \qquad (5.8)$$
$$\Phi = A\cos\theta \text{ при } r = 1.$$

Здесь A — произвольный вещественный параметр. Выбор примера объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, эта задача приводится без анализа в ряде книг (см., например, [9]). Во-вторых, и это главное, к ней неприменимы традиционные признаки отсутствия вещественного решения, поскольку среднее граничных значений равно нулю: $\int_0^{2\pi} A\cos\theta d\theta = 0$.

Неравенство (5.7) для задачи (5.8) принимает вид

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left[\frac{(\Delta\psi)^2}{\psi} + 4Ar\cos\theta\Delta\psi\right] r dr d\theta < 0. \qquad (5.9)$$

Выберем теперь в качестве функции ψ решение следующей задачи с параметром τ:
$\Delta\psi = -(\tau + r\cos\theta)(1 - r^2)$ при $r < 1$, $\psi = 0$ при $r = 1$. Это решение выписывается явно и при $\tau \geqslant 1/3$ функция $\psi \geqslant 0$.

Подставим функцию ψ, зависящую от $\tau \geqslant 1/3$, в неравенство (5.9). Тогда получим параметрическое неравенство с $\tau \geqslant 1/3$ для A, из него находим оценку для $|A|$ при $\tau = (1 + \sqrt{5/2})/3$: $|A| > 20{,}65$.

Итак, если A удовлетворяет этому неравенству, то краевая задача (5.8) не имеет вещественного решения в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

6. Единственность нетривиального решения. Рассмотрим в круге $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ краевую задачу

$$\Delta u = u^2 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \qquad (6.1)$$

которая имеет тривиальное решение $u_1(x) = 0$ и нетривиальное $u_2(x) < 0$ в Ω.

Л. В. Овсянников поставил в 1959 г. вопрос о единственности этого нетривиального решения, что в силу сказанного в п. 1 соответствует вопросу о единственности режима околозвукового течения газа в указанном классе течений.

Ответ на этот вопрос стал возможным после работ [7, 8].

Теорема Кинди [7]. *Пусть f — вещественная неотрицательная аналитическая функция. Тогда любое решение класса $C^2(\overline{\Omega})$ задачи*

$$-\Delta u = f(u) \text{ в } \Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

является радиально-симметрическим.

Теорема Гидаса — Ни — Ниренберга [9]. *Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ есть функция класса C^1. Тогда любое положительное решение класса $C^2(\overline{\Omega})$ задачи*

$$-\Delta u = f(u) \text{ в } \Omega = \{x \in \mathbf{R}^n | |x| < R\}, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

является радиально-симметрическим.

Таким образом, в силу любой из приведенных теорем нетривиальное решение задачи (6.1) радиально-симметрическое. В самом деле, после замены $u \to u_1 = -u$ к краевой задаче

$$-\Delta u_1 = u_1^2 \text{ в } \Omega, \quad u_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega$$

применима любая из этих теорем.

Остается убедиться в единственности нетривиального решения $u(r)$ класса $C^2(\overline{\Omega})$ краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения $\Delta u(r) = u^2(r)$, $u(1) = 0$. Воспользуемся для этого некоторыми рассуждениями из [10].

Предположим противное. Тогда существуют, по крайней мере, два нетривиальных решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$, $u_1(r) \not\equiv u_2(r)$ из класса C^2. Из общей теории квазилинейных эллиптических уравнений следует аналитичность функций $u_1(r)$ и $u_2(r)$ при $r < 1$. Обозначим $u_1(0) = c_1$ и $u_2(0) = c_2$ и положим для определенности $c_2 \geqslant c_1$. Заметим, что $c_1 < 0$ и $c_2 < 0$.

Тогда u_1 и u_2 — аналитические решения задачи Коши

$$u'' + (1/r)u' = u^2, \quad 0 < r < 1, \quad u(0) = c, \ u'(0) = 0 \tag{6.2}$$

с $c = c_1$ и $c = c_2$ соответственно.
Если $c_1 = c_2$, то в силу единственности решения задачи (6.2) в классе аналитических функций получаем $u_1(r) \equiv u_2(r)$ при $r \leqslant 1$.

В случае $c_2 > c_1$ рассмотрим функцию $v(r) = k^2 u_1(kr)$ с $k = \sqrt{c_2/c_1} < 1$. Тогда эта функция является решением задачи (6.2) с $c = c_2$, и в силу единственности решения ее в классе аналитических функций имеем $u_2(r) = k^2 u_1(kr)$ при $r < 1$. Полагая в этом тождестве предельное $r = 1$, находим $u_2(1) = k^2 u_1(k) < 0$, что противоречит граничному условию для решения u_2.

Таким образом, установлена единственность нетривиального решения краевой задачи (6.1) в круге $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Исследование газовых течений с прямой звуковой линией: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Л., 1948.
2. **Похожаев С. И.** Аналог метода Шмидта для нелинейного уравнения // ДАН СССР.— 1960.— Т. 136, № 3.
3. **Похожаев С. И.** О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // ДАН СССР.— 1960.— Т. 136, № 4.
4. **Похожаев С. И.** О краевой задаче для уравнения $\Delta u = u^2$ // ДАН СССР.— 1961.— Т. 138, № 2.
5. **Похожаев С. И.** Об одном подходе к нелинейным уравнениям // ДАН СССР.— 1979.— Т. 247, № 6.
6. **Похожаев С. И.** Об одном конструктивном методе вариационного исчисления // ДАН СССР.— 1988.— Т. 298, № 6.
7. **Dancer E. N.** On non-radially symmetric bifurcation // J. London Math. Soc.— 1979.— V. 20, N 2.
8. **Cidas B., Ni Wei-Ming, Nirenberg L.** Symmetry and related properties via the maximum principle // Comm. Math. Phys.— 1979.— V. 68, N 3.
9. **Фарлоу С.** Уравнение с частными производными.— М.: Мир, 1985.
10. **Похожаев С. И.** Исследование краевой задачи для уравнения $\Delta u = u^2$: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1961.

Поступила 3/VIII 1988 г.

УДК 517.95

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНОСТЬ И УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. М. Шугрин

(*Новосибирск*)

В большом цикле работ, выполненных Л. В. Овсянниковым, его учениками и последователями, были проанализированы групповые свойства многих уравнений математической физики и показана полезность знания групповых свойств уравнений для их классификации и для нахождения частных решений (см., например, [1—3]). Возможна и обратная постановка задачи — по заданной группе, иногда с дополнительным предположением о законе преобразования искомых величин, отыскать класс дифференциальных уравнений, инвариантных относительно этой группы [4, 5]. Подобная постановка проблемы по сути возникла примерно одновременно с теорией относительности, когда физики и математики стали искать уравнения, описывающие динамику некоторого круга явлений, опираясь на знание законов инвариантности. С этой позиции наиболее фундаментальным объектом оказывается группа, а динамическое уравнение — своего рода «дифференциальным представлением» этой группы