

О РАЗРУШЕНИИ ВСЛЕДСТВИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ю. Н. Работнов

(Новосибирск)

1. К постановке задачи. При испытании образцов на ползучесть при постоянной нагрузке, как известно, скорость ползучести сначала убывает (первая фаза), потом сохраняет в течение некоторого времени почти постоянное значение (вторая фаза), наконец снова начинает возрастать (третья фаза). Третья фаза ползучести предшествует разрушению. В зависимости от величины действующего напряжения время до разрушения меняется, кривая зависимости времени разрушения от напряжения называется кривой длительной прочности. Характер разрушения также зависит от величины нагрузки, при больших напряжениях и малых временах до разрушения образец получает значительную пластическую деформацию, на нем образуется шейка, разрушение носит вязкий характер. При малых напряжениях и больших длительностях образец разрушается хрупко, деформация в момент разрыва весьма мала и шейка не появляется. Будем говорить в этом случае, что ползучесть сопровождается охрупчиванием материала.

В настоящее время расчет изделий на длительную прочность производится следующим образом. В результате расчета определяются напряжения и деформации как функции времени. Предъявляется требование, чтобы в течение заданного времени, во-первых, некоторая суммарная деформация (например, увеличение диаметра турбинного диска) не превысила определенного заранее установленного предела и, во-вторых, чтобы ни в одной точке не началось образование трещин. С достаточной для практических целей степенью точности можно считать, что начало разрушения определяется величиной наибольшего нормального напряжения в некоторой опасной точке; так как, вообще говоря, это напряжение меняется со временем, для определения момента разрушения по кривой длительной прочности для образца необходимо воспользоваться некоторым принципом суммирования повреждаемости [1].

Такой подход применим лишь тогда, когда время до разрушения велико и охрупчивание значительно, при этом деформации к моменту разрушения малы и напряженное состояние может быть рассчитано. Но все существующие теории ползучести не описывают третьего участка кривой ползучести, предшествующего разрушению, поэтому обычно напряженное состояние в момент начала разрушения известно лишь приближенно. Простейшая теория старения, нашедшая широкое применение в инженерных расчетах, обладает по крайней мере тем преимуществом, что в ней используются первичные кривые ползучести целиком, со всеми их индивидуальными особенностями, включая и третий участок, именно поэтому применение ее при расчетах дает удовлетворительные результаты. С другой стороны, появление первой трещины еще не означает разрушения изделия в целом, поэтому фактическая долговечность должна быть большей, чем получающаяся по расчету в соответствии с изложенной схемой.

Теория длительного разрушения образца, находящегося в условиях простого растяжения, была рассмотрена рядом авторов. Не касаясь бо-

лее ранних работ, упомянем лишь о работах [2-5]. Общая точка зрения может быть изложена следующим образом. Предположим, что скорость ползучести $\dot{\epsilon}_n$ есть функция от напряжения, температуры и некоторого набора параметров, определяющих состояние материала

$$\dot{\epsilon}_n = v(\sigma, T, q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (1.1)$$

Эти параметры в свою очередь связаны дифференциальными соотношениями с величинами ϵ_n , σ , t , T

$$dq_i = a_i d\epsilon_n + b_i d\sigma + c_i dT + d_i dt \quad (1.2)$$

Под ϵ_n понимается деформация ползучести, полная деформация $\epsilon = \epsilon_n + \epsilon_0(\sigma)$, где $\epsilon_0(\sigma)$ — мгновенная деформация, состоящая в свою очередь из упругой и пластической части. Поэтому зависимость $\epsilon_0(\sigma)$ однозначна только при монотонном изменении σ .

Уравнение (1.1) охватывает большинство из существующих теорий одномерной ползучести. Если $dq_1 = d\epsilon_n$, получим теорию упрочнения в ее обычной формулировке, учет зависимости dq от $d\sigma$ позволяет принять во внимание и то упрочнение, которое создается в результате мгновенной пластической деформации. Процессы разупрочнения или старения можно описать, учитывая зависимость приращений параметра состояния от dt . Вообще говоря, коэффициенты a_i , b_i , c_i и d_i могут быть функциями ϵ_n , σ , T , t , q_i .

2. Вязкое разрушение. Простейшее предположение относительно зависимости (1.1) состоит в том, что скорость ползучести при заданном напряжении постоянна и параметры q_i в уравнение не входят. Имея в виду случай постоянной температуры, положим

$$\dot{\epsilon}_n = v(\sigma)$$

Отсюда следует

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0'(\sigma) \dot{\sigma} + v(\sigma) \quad (2.1)$$

Будем считать, что уравнение (2.1) справедливо и в области больших деформаций, при этом за меру деформации примем логарифмическую деформацию $\epsilon = \log(x/x_0)$. Здесь x — длина образца, x_0 — начальная длина. Обозначим условное, т. е. отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения, напряжение через σ_0 , тогда вследствие несжимаемости материала

$$\epsilon = \log(\sigma/\sigma_0)$$

Внося это выражение в (2.1), разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$t = \int_{\sigma_0}^{\sigma^*} [1 - \sigma \epsilon_0'(\sigma)] \frac{d\sigma}{\sigma v(\sigma)} \quad (2.2)$$

Здесь σ^* — напряжение, при котором происходит отрыв. Обычно полагают $\sigma^* = \infty$. Мгновенная пластическая деформация (или деформация первого периода ползучести) была учтена Одквистом [5], который принял

$$v(\sigma) = a\sigma^n, \quad \epsilon_0(\sigma) = b\sigma^m$$

В этом случае

$$t = t^* \left[1 - \frac{mn}{n-m} \epsilon_0(\sigma_0) \right] \quad (2.3)$$

t^* — время хрупкого разрушения по Хоффу [2], определенное без учета начальной деформации.

Следует заметить, что подынтегральное выражение в правой части (2.2) меняет знак при $\sigma \epsilon_0'(\sigma) = 1$. Рассматривая в (2.2) верхний предел пере-

менным, получим из этого уравнения зависимость между σ и t , график этой зависимости будет выглядеть так, как показано на фиг. 1. В действительности, конечно, движение по оси времени в обратном направлении невозможно, полученный результат нужно истолковывать в том смысле, что в момент времени t^* скорость растяжения сразу становится бесконечно большой и происходит мгновенный разрыв. С другой стороны, степенное выражение для функции $\varepsilon_0(\sigma)$, весьма удобное в области малых деформаций, может быть неподходящим для описания зависимости логарифмической деформации от истинного напряжения. Если функция $\varepsilon_0(\sigma)$ такова, что $\sigma \varepsilon_0'(\sigma) < 1$, то график функции $\sigma(t)$ приближается слева к вертикальной асимптоте, как показано на фиг. 2. Заметим, что именно такое положение будет в том случае, если логарифмическая деформация есть степенная функция условного напряжения

$$\varepsilon_0 = b\sigma_0^m = b\sigma^m e^{-m\varepsilon}.$$

Дифференцируя обе части по σ , найдем

$$\sigma \frac{d\varepsilon_0}{d\sigma} = \frac{m\varepsilon_0}{1 + m\varepsilon_0} < 1$$

3. Хрупкое разрушение. Другой крайний случай хрупкого разрушения рассматривается независимо от процесса ползучести. Вводится некоторый структурный параметр ω , принимаемый за меру охрупчивания. Принимается, что в исходном состоянии материала $\omega = 0$, разрушение [3] наступает тогда, когда $\omega = 1$. Величина ω может быть интерпретирована как относительная площадь поперечного сечения, занятая трещинами [4], однако такая интерпретация связана с достаточно грубой схемой и не обязательна. Так или иначе, предполагается, что скорость изменения параметра $\dot{\omega}$ зависит от напряжения и величины ω

$$\dot{\omega} = \varphi(\omega, \sigma) \quad (3.1)$$

Такое предположение позволяет считать ω за один из структурных параметров, определенных соотношениями (1.2). Простейшая гипотеза состоит в том, что $\dot{\omega}$ есть степенная функция отношения $\sigma/1 - \omega$, это отношение может быть истолковано как среднее напряжение на площади поперечного сечения, свободной от трещин. Итак, положим, как это сделано в работе [3],

$$\dot{\omega} = c \left(\frac{\sigma}{1 - \omega} \right)^k \quad (3.2)$$

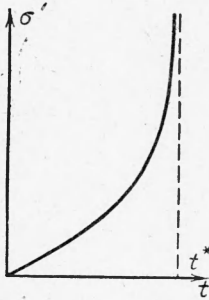
В работе [4] в левой части этого уравнения фигурирует величина $\omega^\beta \dot{\omega}$, при этом показатель β учитывает форму трещины. Для окончательного результата это не существенно, меняется лишь некоторая константа, которая все равно подлежит определению из опыта. Разделяя в (3.2) переменные и интегрируя по ω от $\omega = 0$ до $\omega = 1$ и по t от $t = 0$ до $t = t^{**}$, найдем время хрупкого разрушения

$$t^{**} = \frac{1}{(1+k)c\sigma_0^k} \quad (3.3)$$

Как известно, кривая длительной прочности, перестроенная в логарифмических координатах, обычно состоит из двух прямолинейных участ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ков, соответствующих (2.3) (при пренебрежении мгновенной деформацией) и (3.3). Эти участки соединяются некоторой переходной кривой, которая принадлежит области смешанных разрушений.

4. Смешанное разрушение. Гипотеза Л. М. Качанова состоит в том, что процесс охрупчивания совершенно не влияет на ползучесть и уравнение (2.1) сохраняет силу все время, вплоть до момента разрушения. Вследствие ползучести поперечное сечение образца уменьшается, а следовательно, увеличивается напряжение. Этим ускоряется процесс хрупкого разрушения, описываемый по-прежнему уравнением (3.2). Пренебрегая мгновенной деформацией (учет мгновенной деформации произведен в работе [5]), перепишем (2.1) в следующем виде:

$$\varepsilon = a\sigma_0^n e^{n\varepsilon}$$

Отсюда, после интегрирования

$$e^\varepsilon = (1 - t/t_*)^{\frac{1}{n}}$$

Полагая в (3.2) $\sigma = \sigma_0 e^\varepsilon$, внося найденное значение e^ε и интегрируя, Л. М. Качанов получает время t до разрушения

$$\frac{t}{t_*} = 1 - \left(1 - \frac{n-k}{n} \frac{t^{**}}{t_*}\right)^{\frac{n}{n-k}} \quad (4.1)$$

Гипотеза, при помощи которой получена формула (4.1), может быть пояснена следующим образом. Если понимать охрупчивание как развитие внутренних трещин, то эти трещины возникают лишь в немногих сечениях и под ω нужно понимать относительную площадь трещин в каком-то одном, быть может, сечении, где должно произойти разрушение. Естественно, что в этом сечении среднее напряжение есть $\sigma/(1-\omega)$, оно определяет скорость дальнейшего роста трещин именно в этом сечении. В то же время общая площадь трещин во всем образце невелика, поэтому среднее напряжение по объему образца, которое определяет скорость ползучести, вычисляется без учета растрескивания. Если встать на эту точку зрения, то третий период ползучести может быть отнесен только за счет изменения площади поперечного сечения. Элементарные подсчеты показывают, что для реальных материалов дело обстоит не так. Заметное увеличение скорости ползучести вследствие ползучести образца может произойти только при довольно больших удлинениях, тогда как многие металлы и сплавы обнаруживают резко выраженный третий участок ползучести уже при деформациях порядка 1—2%. Более общее предположение будет состоять в том, что структурный параметр ω является определяющим параметром и для закона ползучести, т. е. что

$$\varepsilon = v(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega) \quad (4.2)$$

При выборе конкретных форм уравнений (4.2) следует заботиться о том, чтобы интегрирование их было достаточно просто, поэтому, следуя упомянутым авторам, выберем их в виде степенных функций, а именно, примем

$$\dot{\varepsilon} = a\sigma^n (1-\omega)^{-q}, \quad \dot{\omega} = c\sigma^k (1-\omega)^{-r} \quad (4.3)$$

Желая учесть влияние температуры, вообще говоря, переменной, можно принять в первом приближении

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{U_a}{kT}\right), \quad c = c_0 \exp\left(-\frac{U_c}{kT}\right)$$

Энергии активации ползучести U_a и трещинообразования U_c следует считать различными, поэтому отождествление энергии активации ползучести и разрушения, встречающееся в литературе, нужно рассматривать как первое приближение.

Чисто хрупким разрушением будем называть такое, которое не сопровождается заметным изменением площади поперечного сечения. При постоянном номинальном напряжении из второго уравнения (4.3) следует:

$$(1 - \omega)^{r+1} = 1 - \frac{t}{t^{**}} \quad \left(t^{**} = \frac{1}{c(1+r)\sigma_0^k} \right) \quad (4.4)$$

Здесь t^{**} — время хрупкого разрушения (формула (3.3) получается отсюда при $r = k$). Теперь можно внести (4.4) в первое из уравнений (4.3) и проинтегрировать его. В результате получаем

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{n} \frac{t^{**}}{t^*} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{t^{**}} \right)^{1/\lambda} \right] \quad \left(\lambda = \frac{r+1}{r-q+1} \right) \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) — это уравнение кривой ползучести, примерный вид ее изображен на фиг. 3. Разрыв происходит при конечном значении деформации

$$\varepsilon^* = \frac{\lambda}{n} \frac{t^{**}}{t^*}, \quad \text{если } \lambda > 0$$

Если разрушение происходит при достаточно больших деформациях, необходимо принять $\sigma = \sigma_0 e^\varepsilon$, тогда система (4.3) примет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{nt^*} e^{n\varepsilon} (1 - \omega)^{-q}, \quad \dot{\omega} = \frac{1}{(1+r)t^{**}} e^{k\varepsilon} (1 - \omega)^{-r} \quad (4.6)$$

Разделим одно уравнение на другое. В результате получим

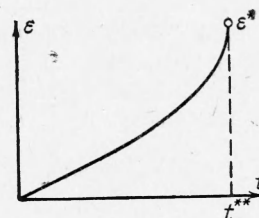
$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{1+r}{n} \frac{t^{**}}{t^*} e^{(n-k)\varepsilon} (1 - \omega)^{r-q} \quad (4.7)$$

Отсюда, с учетом начальных условий, получается следующее соотношение между степенью охрупчивания и деформацией:

$$e^\varepsilon = [1 - \nu + \nu (1 - \omega)^{r-q+1}]^{-\frac{1}{n-k}} \quad (4.8)$$

Здесь

$$\nu = \frac{1+r}{n} \frac{n-k}{r-q+1} \frac{t^{**}}{t^*}$$



Фиг. 3

Теперь следует рассматривать две возможности. Если $\nu < 1$, то $\omega = 1$ при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon^{**}$, причем

$$\varepsilon^{**} = -\frac{1}{n-k} \log(1 - \nu) = -\frac{1}{n-k} \log \left(1 - \frac{a}{c} \sigma_0^{n-k} \right) \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) может быть использовано для определения констант, если испытания на длительную прочность сопровождаются измерением деформации к моменту разрыва.

Если $\nu > 1$, полное охрупчивание произойти не успеваает, разрыв оказывается вязким, $\omega = \omega^*$ при $\varepsilon = \infty$, где

$$\omega^* = 1 - \left(\frac{\nu-1}{\nu} \right)^{\frac{1}{r-q+1}} \quad (4.10)$$

Внесем теперь найденное для e^ε выражение (4.8) во второе из уравнений (4.6) и проинтегрируем его. В результате получается следующая зависимость для времени до разрушения t

$$\frac{t}{t^{**}} = \lambda \int_{\zeta^*}^1 (1 - \nu + \nu \zeta)^\nu \zeta^{\lambda-1} d\zeta \quad (4.11)$$

Здесь

$$\mu = \frac{k}{n-k}, \quad \zeta^* = 0, \quad \text{если } \nu < 1, \quad \zeta^* = \frac{\nu-1}{\nu}, \quad \text{если } \nu > 1$$

В том и другом случае интеграл (4.11) выражается через гипергеометрические функции, а именно

$$t = t^{**} F(-\mu, 1; 1 + \lambda; \nu) \quad \text{при } \nu < 1 \quad (4.12)$$

$$t = t^* F\left(1 - \nu, 1; \mu + 2; \frac{1}{\nu}\right) \quad \text{при } \nu > 1 \quad (4.13)$$

Для малых ν приближенно получаем

$$t = t^{**} \left[1 - \frac{k}{n} \frac{\lambda}{1 + \lambda} \frac{t^{**}}{t^*} \right] \quad (4.14)$$

5. Кратковременная ползучесть. Кратковременной ползучестью будем называть такие процессы, которые приводят к накоплению значительной деформации и разрушению за весьма короткое время — порядка десятков и сотен секунд. В последние годы интерес к изучению кратковременной ползучести сильно возрос и на эту тему появился ряд исследований. В работе [6], относящейся к алюминиевым сплавам, было установлено, что удлинение при разрыве в некотором диапазоне длительностей порядка десятков и сотен секунд остается постоянным и составляет около 6%. Это дает основание заключить, что в (4.3) следует положить $n = k$. Далее, в работе [6] делаются предположения, эквивалентные допущению о том, что $q = r = n$. Условие $k = r$ было принято также в работах [3, 4], смысл его был разъяснен в п. 4. Условие $n = q$ означает, что трещины предполагаются распределенными по всему объему достаточно плотно и ползучесть зависит от того же эффективного напряжения, что и растрескивание. Здесь положим $n = k$, но не будем делать никаких предположений относительно q, r . Из (4.7) следует, что при $n = k$

$$(1 - \omega)^{r-q+1} = 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \quad \left(\varepsilon^* = \frac{\lambda}{n} \frac{t^{**}}{t^*} = \frac{a}{c} \frac{1}{r+1-q} \right)$$

Внося найденное значение $1 - \omega$ в первое из уравнений (4.3), найдем

$$\int_1^{\varepsilon} e^{-n\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^{\frac{q}{r+1-q}} d\varepsilon = \frac{t}{nt^*} \quad (5.1)$$

Если $n\varepsilon^* \ll 1$, приближенный результат можно получить, разлагая в ряд $e^{-n\varepsilon}$ и ограничиваясь двумя членами разложения. Приближенное уравнение кривой ползучести будет следующее

$$\frac{t}{t^*} = \frac{n\varepsilon^*}{\lambda} \left\{ 1 - (1 - n\varepsilon) \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^\lambda - \varepsilon^* \frac{n}{1 + \lambda} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \right)^{1+\lambda} \right] \right\} \quad (5.2)$$

Отсюда, при $\varepsilon = \varepsilon^*$ находим время до разрушения

$$t' = t^* \frac{\varepsilon^* n}{\lambda} \left[1 - \frac{n\varepsilon^*}{1 + \lambda} \right] \quad (5.3)$$

Эта формула может быть переписана в следующем виде:

$$t' = t^{**} \left[1 - \frac{t^{**}}{t^*} \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right] \quad (5.4)$$

Преимущество формулы (5.3) состоит в том, что она содержит величины, в принципе доступные для непосредственного нахождения. Действительно, величина t^* определяется законом ползучести, т. е. зависимостью скорости от напряжения на начальных участках кривых ползучести.

Величина ε^* , представляющая собой удлинение при разрыве, в известной мере условна, так как к моменту разрыва формируется шейка, но некоторая оценка этой величины все же возможна. С другой стороны, для определения i^{**} необходимо знать константу охрупчивания c . Очевидно, (5.4) совпадает с (4.14) при $k = n$.

Кратковременная ползучесть представляет особенно благоприятную область для применения изложенной теории, при относительно высоких температурах упрочнение почти не проявляется и первый участок на кривых ползучести фактически отсутствует. Поэтому результаты расчета кривых ползучести при помощи уравнения, практически совпадающего с (5.2) (вместо степенной взята зависимость экспоненциальная), в работе [6] дают весьма удовлетворительное согласие с экспериментом.

6. Сложное напряженное состояние. Прямые опытные данные показывают, что в условиях сложного напряженного состояния разрушение происходит вследствие образования трещин в плоскостях действия наибольших растягивающих напряжений и время до разрушения определяется величиной этих напряжений [7]. Некоторые отклонения от этого правила [8] не будем принимать во внимание. Поэтому можно сформулировать следующую гипотезу. Если в начальный момент было

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, \quad \sigma_1 > 0$$

то в плоскостях, перпендикулярных к направлению σ_1 , возникают трещины и степень охрупчивания для этих плоскостей определяется величиной ω в соответствии со вторым уравнением (4.3)

$$\dot{\omega} = c \sigma_1^k (1 - \omega)^{-r} \quad (6.1)$$

Процесс ползучести будет определяться эффективными напряжениями

$$s_1 = \sigma_1 (1 - \omega)^{-\frac{q}{n}}, \quad s_2 = \sigma_2, \quad s_3 = \sigma_3 \quad (6.2)$$

так что

$$\varepsilon_i = \frac{\partial f(s_k)}{\partial s_i} \quad (6.3)$$

Потенциал ползучести $f(s_k)$ сохраняет ту же форму, что и при отсутствии охрупчивания. В частности, если принять теорию ползучести типа Сен-Венана, получим

$$\dot{\varepsilon}_1 = -\dot{\varepsilon}_3 = v(s_1 - s_3), \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0 \quad (6.4)$$

По существу следовало бы рассматривать охрупчивание происходящим одновременно на плоскостях всевозможных направлений, связывая степень охрупчивания с действующим нормальным напряжением соотношением типа (6.1). Но зависимость скорости охрупчивания от величины напряжения оказывается чрезвычайно сильной, поэтому фактически с охрупчиванием следует считаться лишь для тех направлений, для которых нормальное напряжение мало отличается от σ_1 .

В качестве примера рассмотрим задачу об определении времени до разрушения вращающегося диска постоянной толщины с центральным отверстием. Для простоты положим, как в п. 5, $n = k = q = r$ и примем функцию v степенной с показателем n . Уравнения (6.1) и (6.4) примут вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = -\dot{\varepsilon}_3 = a \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega} - \sigma_3 \right)^n, \quad \dot{\varepsilon}_2 = 0, \quad \dot{\omega} = c \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega} \right)^n$$

Для диска $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$, поэтому $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_3 = 0$. Выберем единицу измерения для напряжений так, что $c = 1$. Тогда уравнение охрупчивания запишется следующим образом:

$$\dot{\omega} = \left(\frac{\sigma_\theta}{1 - \omega} \right)^n \quad (6.5)$$

Введем безразмерный радиус диска ζ таким образом, что на контуре отверстия $\zeta = \alpha$, на периферии $\zeta = 1$. Обозначим через R наружный радиус диска, через U — радиальное перемещение и примем

$$u = \frac{U}{aR}$$

Теперь из (6.4) следует:

$$\frac{\dot{u}}{\zeta} = \left(\frac{\sigma_\theta}{1-\omega} \right)^n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (6.6)$$

Второе уравнение (6.6) показывает, что u есть функция времени, из первого следует, что $\omega = u/\zeta$, так как при $t = 0$, $u = 0$, $\omega = 0$. Теперь можно записать

$$\sigma_\theta = \left(1 - \frac{u}{\zeta} \right) \left(\frac{\dot{u}}{\zeta} \right)^{1/n} \quad (6.7)$$

Уравнение равновесия элемента диска

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \sigma_r) = \sigma_\theta - m\zeta^2 \quad (m = \rho V^2 c)$$

Здесь ρ — плотность материала, V — окружная скорость диска. Внесем в уравнение равновесия выражение (6.7) для σ_θ и проинтегрируем. Получим

$$\sigma_r = \dot{u}^{1/n} \left[\frac{n}{n-1} \zeta^{-1/n} + nu\zeta^{-1-1/n} \right] - \frac{m\zeta^2}{3} + \frac{C}{\zeta}$$

Используем теперь граничные условия $\sigma_r(1) = \sigma_r(\alpha) = 0$. Исключая постоянную, придем для $u(t)$ к дифференциальному уравнению

$$\dot{u} = \left(\frac{mk(\alpha)}{1-u\rho(\alpha)} \right)^n \quad (6.8)$$

Здесь

$$k(\alpha) = \frac{1}{3} \frac{n-1}{n} \frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^{1-1/n}}, \quad \rho(\alpha) = (n-1) \frac{\alpha^{-1/n-1}}{1-\alpha^{1-1/n}}$$

Проинтегрируем (6.8) при начальном условии $u(0) = 0$. Результат будет следующий:

$$u = \frac{1}{\rho} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)^{1/(n+1)} \right\} \quad (6.9)$$

При этом принято

$$\frac{1}{\tau(\alpha)} = \rho(\alpha) [mk(\alpha)]^n (1+n)$$

В некоторый момент времени t_* на контуре отверстия становится $\omega = 1$, следовательно, $u = \alpha$. Из (6.9) получаем

$$t_* = \tau [1 - (1 - \alpha\rho)^{1+n}] \quad (6.10)$$

Легко убедиться непосредственно, что $\alpha\rho < 1$, если $\alpha < 1$. Однако найденное решение пригодно не для всех значений α , так как не всегда выполняется условие $s_\theta > s_r > 0$. Как известно, в случае ползучести без охрупчивания решение с одной областью, соответствующей условию $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$, возможно [9] при $\alpha \geq 0.25$ для любого n . Исследование пределов применимости найденного здесь решения сводится к проверке выполнения неравенства

$$\frac{\sigma_\theta}{1-\omega} > \sigma_r \quad (6.11)$$

для любого момента времени.

Учитывая (6.8), формулы для напряжений можно написать следующим образом: (6.12)

$$\sigma_\theta = \frac{mk}{1-u\rho} \left(i - \frac{u}{\xi} \right) \xi^{-1/n}, \quad \sigma_r = \frac{mn}{n-1} \frac{1}{\xi} \left(i - \xi^{1-\frac{1}{n}} \right) \left(k(\xi) - k \frac{1-u\rho(\xi)}{1-u\rho} \right).$$

Здесь $k = k(\alpha)$, $\rho = \rho(\alpha)$. На фиг. 4 представлены эпюры σ_θ и σ_r при $n = 3$ и $\alpha = 0.3$ для значений $u = 0, 0.1, 0.2, 0.3$. Как видно, условие $\sigma_\theta > \sigma_r$ выполняется для любого момента, тем более выполняется (6.14). При $t > t_*$ картина становится следующей. В диске образуются три области.

В области I при $\alpha < \xi < \gamma$ произошло полное радиальное растрескивание, $\omega = 1$ и $\sigma_\theta = 0$, но радиальные напряжения существуют. Из уравнения равновесия

$$\sigma_r = \frac{m}{3} \left(\frac{\alpha^3}{\xi} - \xi^2 \right), \quad \sigma_\theta = 0$$

В области II при $(\gamma < \xi < \beta)$ имеем $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$, поэтому $\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r$; отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} = 0, \quad u = \frac{w}{\xi}$$

Из (6.4) следует:

$$\dot{w} \frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{\sigma_\theta}{1-\omega} - \sigma_r \right)^n$$

В области II величина ω близка к единице, поэтому второй член в скобке мал и им можно пренебречь. Таким образом, приближенно

$$\dot{w} \frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{\sigma_\theta}{1-\omega} \right)^n = \dot{\omega}$$

Отсюда, учитывая, что $w = 0$, $\omega = \alpha / \xi$ при $t = t_*$

$$\omega = \frac{w}{\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi}$$

Напряжение σ_θ выразится теперь следующим образом:

$$\sigma_\theta = \left(1 - \frac{w}{\xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \right) \frac{1}{w^{1/n}} \xi^{-\frac{2}{n}}$$

Поступая так же, как и прежде, внесем это значение σ_θ в уравнение равновесия и проинтегрируем его, учитывая граничные условия

$$\sigma_r(\gamma) = \frac{m}{3} \left(\frac{\alpha^3}{\gamma} - \gamma^2 \right), \quad \sigma_r(\beta) = 0$$

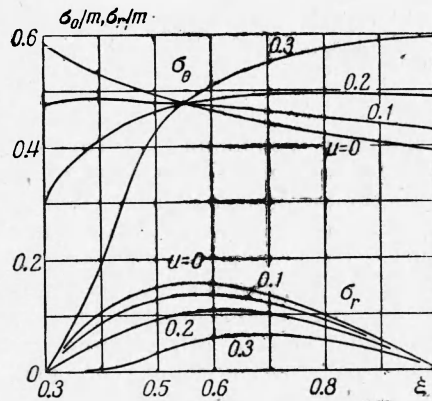
В результате получим для $w(t)$ дифференциальное уравнение

$$\dot{w} = \left(\frac{m\varphi}{1+w\psi} \right)^n \tag{6.13}$$

Здесь

$$\varphi = \frac{1}{3} \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\frac{n}{n-2} (\gamma^{1-2/n} - \beta^{1-2/n}) + \frac{\alpha n}{2} (\gamma^{-2/n} - \beta^{-2/n})}$$

$$\psi = \frac{n}{n+2} \frac{\gamma^{-1-2/n} - \beta^{-1-2/n}}{\frac{n}{n-2} (\gamma^{1-2/n} - \beta^{1-2/n}) + \frac{\alpha n}{2} (\gamma^{-2/n} - \beta^{-2/n})}$$



Фиг. 4

В области III при $\beta < \zeta < 1$ снова $\sigma_r > 0$, поэтому решение сохраняет тот же вид, что и в первой фазе разрушения, только граничное условие $\sigma_r = 0$ выполняется при $\zeta = \beta$. Функция u определяется дифференциальным уравнением (6.8), в котором нужно заменить α через β

$$\dot{u} = \left(\frac{mk(\beta)}{1 - u\rho(\beta)} \right)^n \quad (6.14)$$

Для границ областей можно записать следующие условия. При $\zeta = \gamma$ должно быть $\omega = 1$, следовательно,

$$w = \gamma^2 - \alpha\gamma \quad (6.15)$$

При $\zeta = \beta$ окружная деформация и равная ей величина ω непрерывны, поэтому

$$u = \alpha + \frac{w}{\beta} \quad (6.16)$$

Система уравнений (6.13) — (6.16) определяет четыре неизвестные функции времени, ее можно численно проинтегрировать; момент разрушения можно определить из условия, что $\omega = 1$ во всем диске, следовательно, $\gamma = 1$. При $\beta = 1$ третья зона исчезает и остаются два уравнения (6.13) и (6.15), в которых нужно принять $\beta = 1$.

Приближенная оценка времени до разрушения может быть произведена на следующем образом. Пренебрежем размером второй зоны и положим $\beta = \gamma$. Тогда из (6.15) и (6.16) следует $u = \beta$ и остается только одно уравнение (6.14), из которого продолжительность второй фазы разрушения определится следующим образом:

$$t_{**} = \frac{1}{m^n} \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1 - u\rho(u)}{k(u)} \right)^n du \quad (6.17)$$

Для того же случая, для которого построены эпюры на фиг. 4, т. е. для $n = 3$, $\alpha = 0.3$, подсчитано τ , t_* , t_{**} . Оказалось

$$\tau = \frac{2.32}{m^3}, \quad t_* = \frac{2.22}{m^3}, \quad t_{**} = \frac{0.144}{m^3}$$

Как видно, продолжительность второго этапа разрушения невелика. Это понятно: рост первой зоны приводит к очень быстрому увеличению окружного напряжения в части диска, еще не потерявшем несущей способности, и дальнейшее разрушение идет катастрофически быстро. Поэтому достаточно реальной оценкой долговечности диска нужно считать величину t_{**} , уточненный анализ второй фазы разрушения и более точное определение величины t_{**} вряд ли необходимы.

7. Растяжение и кручение тонкостенных трубок. При опытах на ползучесть при одновременном действии растяжения и кручения по данным некоторых авторов [10] обнаруживается удовлетворительное подтверждение требуемого теорией соотношения между компонентами тензора напряжений, с одной стороны, и тензора скоростей деформации, с другой. Так, по теории типа Сен-Венана должно быть $\dot{\gamma} / \dot{\epsilon} = 4 \tau / \sigma$ по теории типа Мизеса $\dot{\gamma} / \dot{\epsilon} = 3\tau / \sigma$. С другой стороны, следующая из теории зависимость между инвариантами $\dot{\gamma}_{max}$ и τ_{max} или соответственно между октаэдрической скоростью сдвига и октаэдрическим касательным напряжением, нарушается при эксперименте. Этот результат можно объяснить, в частности, влиянием охрупчивания, как показывает нижеследующий анализ, произведенный на основе теории типа Сен-Венана. По этой теории главные скорости деформации согласно (6.4)

$$\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3 = a \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega} - \sigma_2 \right)^n \quad (7.1)$$

Здесь масштаб напряжений выбран так же, как в п. 6. Уравнение охрупчивания

$$\dot{\omega} = \left(\frac{\sigma_1}{1 - \omega} \right)^n \quad (7.2)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением начальной фазы охрупчивания, когда $\omega \ll 1$. Из (7.2) в первом приближении следует $\omega = \sigma_1^n t$. Разлагая по параметру ω правую часть (7.1) и удерживая только первую степень ω , получим

$$\dot{\varepsilon}_1 = a (\sigma_1 - \sigma_2)^n \left[1 + n \frac{\sigma_1^{n+1}}{\sigma_1 - \sigma_2} t \right]$$

Обычно опыты проводятся при постоянном значении инварианта тензора напряжений, принятого в качестве определяющего данной теории, поэтому будем сравнивать деформации ползучести при опытах с одинаковой величиной наибольшего касательного напряжения. Положим

$$\frac{1}{\tau} = (n + 1) (\sigma_1 - \sigma_2)^n$$

Тогда интегрируя выражения для скорости деформации, получим

$$\varepsilon_1 = a (\sigma_1 - \sigma_2)^n t \left[1 + \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \right)^{n+1} \frac{t}{\tau} \right] \quad (7.3)$$

Как видно, деформация ε_1 , равная половине максимального сдвига, зависит не только от τ_{max} , но также от вида напряженного состояния. Она будет большей при растяжении, когда $\sigma_1/\sigma_1 - \sigma_2 = 1$, чем при кручении, когда то же отношение равно $1/2$. При выводе (7.3) предполагалось, что первая фаза ползучести отсутствует. При относительно высоком уровне напряжений можно ожидать, что охрупчивание появляется уже в первой фазе ползучести, если она существует. Упрочнение ведет к уменьшению скорости ползучести, одновременное охрупчивание к ее увеличению. В течение некоторого времени эти процессы могут взаимно компенсироваться и скорость будет сохранять примерно постоянное значение.

Поступила 4/11/63

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович В. П., Работнов Ю. Н. Прочность турбинных дисков в условиях ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
2. Hoff N. J. The Necking and Rupture of Rods Subjected to Constant Tensile Loads. Journ. Appl. Mech., 1959, vol. 20.
3. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
4. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения. Сб. Вопросы прочности материалов и конструкций, 1959.
5. Odquist F. K. On the Theories of Creep Rupture. Stockholm, 1961 (Institutio-nen för hallfasthetslära Kungl. Tekniska Högskolan, Publ. No 136).
6. Милейко С. Т., Теленков В. И. Кратковременная ползучесть алюминиевых сплавов. ПМТФ, 1962, № 5.
7. Johnson A. E. Complex-Stress Creep of Metals-Metallurgical Reviews, 1960, vol. 5, No 20.
8. Сдобырев В. П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 5.
9. Wahl A. M. Stress Distribution in Rotating Disks and Cylinders. Journ. Appl. Mech., 1958, vol 25, No 2.
10. Наместников В. С. Об одной гипотезе в теории трехосной ползучести. Изв. Сиб. отд. АН СССР, 1960, № 2.