ПМТФ, № 6, 1964

НЕОДНОРОДНЫЙ, ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ГАЗА НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНЕ

С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев

(*Новосибирск*)

Проблема расчета пограничного слоя на поверхности, выделяющей или поглощающей массу, может быть сведена к задаче обтекания полупроницаемой поверхности. Полуэмпирические теории турбулентного пограничного слоя, давая некоторые полезные результаты, не могут решить эту задачу в достаточно полном виде [1-4].

В работах [5, 6] дана общая постановка этой проблемы в рамках теории предельных относительных законов трения и теплообмена в турбулентном пограничном слое. В дальнейшем Сполдинг с сотрудниками применил некоторые выводы этой теории для обобщенного анализа новых экспериментальных результатов американских и английских исследователей и получил ряд интересных результатов [7, 8].

Ниже сжато излагаются результаты приложения теории относительных законов трения и теплообмена к течению бинарного турбулентного пограничного слоя на полупроницаемой пластине в области конечных значений числа Рейнольдса R.

1. Основные уравнения. Уравнения движения, диффузии и распространения тепла в плоском пограничном слое без внутренних источников тепла и учета эффектов термо-, баро- и динодиффузии имеют вид [9]

$$-\frac{dP}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial W_x}{\partial y}\right)=\rho W_x\frac{\partial W_x}{\partial x}+\rho W_y\frac{\partial W_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho W_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho W_x}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial \rho'}{\partial y}\right)=W_x\frac{\partial \rho'}{\partial x}+w_y\frac{\partial \rho'}{\partial y} \tag{1.1}$$

$$q^*=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+(c_{p_1}-c_{p_0})(T-T_0)\,j_1'$$

$$\mu\left(\frac{\partial W_x}{\partial y}\right)^2+W_x\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial q^*}{\partial y}=\rho W_x\frac{\partial i}{\partial x}+\rho W_y{}'\frac{\partial i}{\partial y}, \qquad j'=-\rho D\frac{\partial \rho'}{\partial y}$$

При $D=a=\nu$, т. е. для многоатомных газов точно, а для других газов приближенно, уравнение распространения тепла в (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial i^*}{\partial x}\right)=\rho W_x\frac{\partial i^*}{\partial y}+\rho W_y\frac{\partial i^*}{\partial y} \tag{1.2}$$

Когда выполняются условия $\{\partial p/\partial x=0,\ D=a=\nu\}$ и подобны граничные условия, из системы (1.1), следует подобие полей энтальпий торможения i^*, весовой концентрации ρ' и скоростей ω, так что

$$\frac{i^*-i_w^*}{i_0^*-i_w^*}=\frac{\rho'-\rho'_w}{\rho_0'-\rho_w'}=\omega \tag{1.3}$$

Когда концентрация газа, подаваемого через стенку, в основном потоке равна нулю, то $\rho_0'=0$.

Если рассматривать тепловой поток от стенки, обусловленной механизмом теплопроводности, то

$$q_w=-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w \tag{1.4}$$

Соответствующее число Стентона определится как

$$S = \frac{q_w}{c_{p_0}\rho_0 W_0 (T_w^* - T_w)} \qquad (1.5)$$

Из условий (1.3) следует, что в этом случае как показано в [4]

$$S = \frac{1}{2} c_f \qquad \left(c_f = \frac{2\tau}{\rho_0 w_0^2}\right) \qquad (1.6)$$

Таким образом, хотя подобия полей температур и скоростей в неоднородном пограничном слое при $c_{p_1} \neq c_{p_0}$ и не существует, однако аналогия Рейнольдса для коэффициентов теплоотдачи и трения все же выполняется.

Величина коэффициента трения на полупроницаемой пластине определяется уравнением [5, 6]

$$\int_{\omega_1}^{1} \left[\left(\Psi + \frac{b\omega}{1+2\xi}\right)\frac{\rho_0}{\rho}\right]^{-1/2} d\omega = Z \qquad (1.7)$$

Если число Рейнольдса $R \to \infty$, то $\omega_1 \to 0$ и $Z \to 1$. Как будет показано ниже, в этом случае профиль скоростей на проницаемой пластине становится полностью заполненным ($R \to \infty$; $\omega \to 1.0$), т. е. ведет себя так же, как и на непроницаемой пластине. Следовательно, при $R \to \infty$ сумма $1 + 2\xi$ во всем интервале значений ξ, кроме точки $\xi = 1.0$, стремится к 1.

Таким образом, при $R \to \infty$ имеем предельный закон трения вида

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{(\Psi + b\omega)\,\rho_0/\rho}} = 1.0 \qquad (1.8)$$

Критический параметр вдува b_*, при котором происходит оттеснение пограничного слоя вдуваемым газом, определится уравнением

$$b_* = \left(\frac{1}{Z}\int_{\omega_1}^{1}\left(\frac{1+2\xi}{\omega\rho_0/\rho}\right)^{1/2} d\omega\right)^2 \qquad (\Psi = 0) \qquad (1.9)$$

Предельное критическое значение фактора проницаемости равно

$$b_{*l} = \left(\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}}\right)^2 \qquad (R \to \infty) \qquad (1.10)$$

2. Предельные законы трения и теплообмена. Из закона Клапейрона и соотношений (1.3) следует, что в рассматриваемых условиях для бинарной смеси

$$\frac{\rho_0}{\rho} = [1 + \rho_w' (R_{10} - 1)(1 - \omega)]\,\frac{T}{T_0} \qquad \text{при } \rho_0' = 0 \qquad (2.1)$$

Здесь $R_{10} = R_1 / R_0$ — отношение газовых постоянных компонент смеси. Известно, что в работах [4, 6]

$$\rho_w' = \frac{b_1}{1 + b_1} \qquad \left(b_1 = \frac{b}{\psi}\right) \qquad (2.2)$$

Отсюда на пластине, обтекаемой бинарной смесью газов,

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0}\left[1 + \frac{b_1}{1+b_1}(R_{10} - 1)(1 - \omega)\right] \qquad (2.3)$$

В свою очередь

$$\frac{T}{T_0} = \frac{c_{p_0} i}{c_p i_0} = \frac{c_{p_0}}{c_p}\left[\frac{i_w}{i_0} - \left(\frac{i_w}{i_0} - \psi^*\right)\omega - (\psi^* - 1)\,\omega^2\right] \qquad (2.4)$$

где теплоемкость смеси

$$c_p = c_{p_0}\left[1 + \frac{b_1}{1+b_1}\left(\frac{c_{p_1}}{c_{p_0}} - 1\right)(1-\omega)\right] \tag{2.5}$$

В смеси газов одинаковой атомности $c_{p_1}/c_{p_0} = R_{10}$ и

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{i_w}{i_0} - \left(\frac{i_w}{i_0} - \psi^*\right)\omega - (\psi^* - 1)\,\omega^2 \tag{2.6}$$

Из этих формул видно, что в ряде случаев дозвукового течения пограничного слоя имеет место соотношение

$$\rho_0/\rho = \psi_1 - (\psi_1 - 1)\,\omega \tag{2.7}$$

Для однородного, неизотермического пограничного слоя

$$\psi_1 = \psi = T_w/T_0 \tag{2.8}$$

Для неоднородного, изотермического пограничного слоя

$$\psi_1 = 1 + \frac{b_1}{1+b_1}(R_{10} - 1) \tag{2.9}$$

Для пограничного слоя из смеси газов одинаковой атомности

$$\psi_1 = \psi\left[1 + \frac{b_1}{1+b_1}(R_{10} - 1)\right] \tag{2.10}$$

Подставляя значение относительной плотности из (2.7) в (1.8) и (1.10), при $R \to \infty$ и $M < 1.0$ находим:

для $\psi_1 < 1$

$$b_* = \frac{1}{1-\psi_1}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\psi_1}}{1-\sqrt{1-\psi_1}}\right)^2 \tag{2.11}$$

$$\Psi = \frac{4}{b_1(1-\psi_1)}\left(\ln\frac{\sqrt{(1-\psi_1)(1+b_1)} + \sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\psi_1'} + \sqrt{b_1\psi_1}}\right)^2$$

для $\psi_1 > 1$

$$b_* = \frac{1}{\psi_1 - 1}\left(\arccos\frac{2-\psi_1}{\psi_1}\right)^2 \tag{2.12}$$

$$\Psi = \frac{4}{b_1(\psi_1 - 1)}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_1}{(\psi_1-1)(1+b_1)}\right)^{1/2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_1\psi_1'}{\psi_1 - 1}\right)^{1/2}\right]^2$$

В меру подобия полей энтальпий и скоростей, в соответствии с (1.6)

$$\Psi_s = \Psi, \qquad b_{T^*} = b_*\frac{c_{p_1}}{c_{p_0}} \qquad \left(b_T = \frac{c_{p_1} j_1}{c_{p_0} s_0}\right) \tag{2.13}$$

Здесь b_T — тепловой фактор проницаемости стенки.

Интересно отметить, что b_{T^*} значительно стабильнее b_*. Это можно иллюстрировать следующими данными при $R \to \infty$, $\psi = 1$.

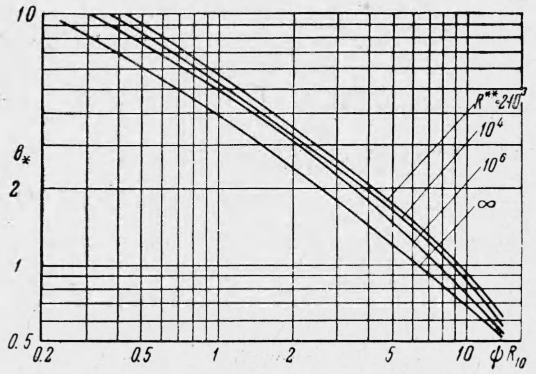
Воздух в воздух	$b_* = 4.00$	$b_{T^*} = 4.00$
Гелий в воздух	$b_* = 0.89$	$b_{T^*} = 4.60$
Водород в воздух	$b_* = 0.52$	$b_{T^*} = 7.30$

3. Параметры пограничного слоя в точке оттеснения от пластины. Профиль скоростей в вязком подслое на проницаемой пластине [6] может быть записан формулой

$$\omega = \frac{\Psi}{b}\left[\exp\frac{j_1 y}{\mu} - 1\right] \tag{3.1}$$

Здесь j_1 — массовая скорость вдуваемого газа на выходе с поверхности пластины. При $j_1 = 0$ из (3.1) следует обычное линейное распределение.

В точке оттеснения пограничного слоя $\Psi = 0$ и $j_1 = b_* \sqrt{{}^1/_2 c_{f0}}$. Таким образом, при конечном b_* в рассматриваемой точке $\omega = 0$. Это означает, что вместо вязкого подслоя в точке оттеснения турбулентного пограничного слоя от проницаемой пластины возникает слой, заторможенный в продольном направлении ($W_x = 0$), т. е. имеет место нечто вроде «острого дутья» в струевых процессах.



Фиг. 1

Рассмотрим теперь турбулентное ядро пограничного слоя толщиной δ в том же приближении, что и течение с градиентом давления [6], т. е. полагая длину пути l/δ смешения консервативной и равной

$$l^\circ = 0.4\xi \sqrt{\tau_0} \tag{3.2}$$

Уравнению (1.10) соответствует закон распределения касательных напряжений $\tau / \tau_w = \tau^\circ$ (здесь τ_w — касательное напряжение на стенке)

$$\tau^\circ = \tau_0{}^\circ (1 + b_1 \omega) \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что при больших числах Рейнольдса в сечении оттеснения распределение скоростей имеет вид

$$\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}} = 2.5 \sqrt{{}^1/_2 b_* c_{f_0}} \ln \frac{\xi}{\xi_{1*}} \tag{3.4}$$

Так как $\omega = 1$ при $\xi = 1$, то

$$\xi_{1*} = \exp\left[-0.4 \left(\frac{b_*{}^*}{b_*} \frac{2}{c_{f_0}}\right)^{1/2}\right] \tag{3.5}$$

где b_*^* определяется по (1.10). Отсюда, при $\xi > \xi_{1*}$

$$\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\omega\rho_0/\rho}} = \sqrt{b_*{}^*} + 2.5 \sqrt{{}^1/_2 c_{f_0} b_*} \ln \xi \tag{3.6}$$

При $R \to \infty$ коэффициент трения $c_{f0} \to 0$ и $\omega \to 1.0$.

В точке оттеснения пограничного турбулентного слоя $\omega_1 = 0$, поэтому

$$Z = \sqrt{b_*' / b_*{}^*} \tag{3.7}$$

При конечных числах Рейнольдса величина b_* определяется уравнением (1.9). Как было выяснено выше, в точке оттеснения $\omega_1 = 0$ при всех числах Рейнольдса R. Связь между ξ и ω в первом приближении устанавливается формулой (3.6), если положить в ней $b_* = b_*^*$.

Первое приближение величины Z, в соответствии с (3.7), может быть определено как отношение интегралов (1.10), (1.9). Тогда

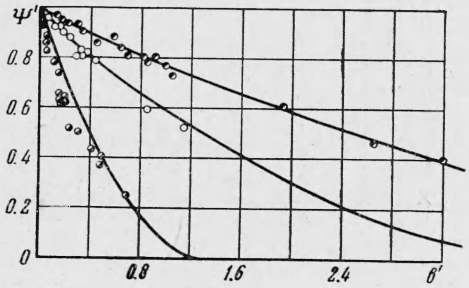
$$b_* \approx \left(\int\limits_0^1 \left(\frac{1+2\xi}{\omega\rho_0/\rho}\right)^{1/2} d\omega\right)^4 \Big/ \left(\int\limits_0^1 \frac{d\omega}{(\omega\rho_0/\rho)^2}\right)^2 \tag{3.8}$$

На фиг. 1 даны графики функции $b_*(\psi R_{10};\ R^{**})$, вычисленные по (3.8).

4. Закон трения и теплообмена для бинарного пограничного слоя газа в области конечных чисел Рейнольдса. Результаты экспериментов удовлетворительно описываются формулой [6]

$$\Psi^\circ = (1 - b^\circ)^2 \qquad (\Psi^\circ = \Psi / \Psi_T) \qquad (4.1)$$

Здесь Ψ_T — относительный закон трения для однородного неизотермического пограничного слоя при $b = 0$. Формула для Ψ_T дана в гл. 3 работы [6].



Фиг. 2

Экспериментаторы обычно обрабатывают свои данные в координатах

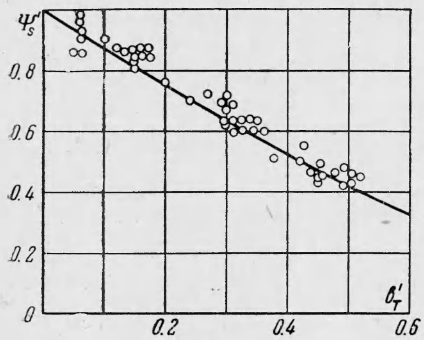
$$\Psi' = \frac{S'}{S_0'}, \qquad b' = \frac{2}{c_{f_0}'} \qquad (4.2)$$

Здесь число Стентона S_0' и коэффициент трения c_{f0}' определяются не по числу Рейнольдса R^{**}, а по числу Рейнольдса R_x. При $b = \mathrm{const}$ и развития турбулентного пограничного слоя с передней кромки пластины из уравнения импульсов следует, что

$$\Psi' = \frac{\Psi}{(\Psi + b)^{m_1}}, \qquad b' = \frac{b}{(\Psi + b)^{m_1}} \qquad (4.3)$$

где m_1 — показатель степени в законе трения

$$c_{f_0}' = \frac{B_1}{R_x^{m_1}} \qquad (4.4)$$

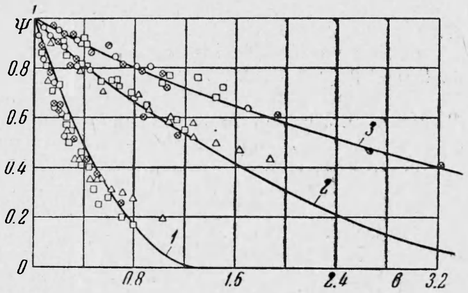


Фиг. 3

На фиг. 2 дано сопоставление расчетов по (4.1) с экспериментальными данными для изотермического обтекания проницаемого конуса с величиной R_{10}, меняющейся почти в 30 раз. Величина b_* определена по формуле (3.8). Наблюдается согласование теории с экспериментом в столь сложных условиях.

Интересно отметить, что если подставить в предельную формулу (1.8) значение ρ_0 / ρ, определенное из условия подобия парциальных плотностей (что, строго говоря, не точно), то получается хорошее согласование с опытами и точными расчетными данными для области конечных чисел R^{**} (порядка 10^3—10^5) [6].

Однако излагаемое в этой статье решение для области конечных чисел R^{**} хотя и несколько сложнее, но логически более безупречно.



Фиг. 4

На фиг. 3 дано сопоставление излагаемой теории с данными по теплообмену для смеси гелий — воздух при квазиизотермическом, дозвуковом течении [11]. Здесь также имеет место удовлетворительное соответствие.

На фиг. 4 дано сопоставление опытов по трению с разными смесями газов в широком диапазоне чисел M [10]. Кривые рассчитаны по формуле (4.1) при подстановке в нее значений b_* по графику фиг. 1. Это соответствует гипотезе о том, что в точке $b = b_*$ коэффициент восстановления $r \to 0$. Это качественно вытекает из формулы Сполдинга для величины r / r_0 как функции b_1 [8].

Как ни парадоксально это положение, но расчет хорошо описывает всю совокупность экспериментальных данных. На фиг. 5 дано аналогичное сопоставление для теплоотдачи [12].

Фиг. 5

Параметр Θ, характеризующий интенсивность охлаждения стенки, однозначно связан с параметром Ψ_S и b_T соотношением

$$\Theta = \frac{\Psi_s}{\Psi_s + b_T} \qquad (4.5)$$

$$\left(\Theta = \frac{T_w - T'}{T_w^* - T'}\right)$$

Ранее было показано, что параметр $b_T{}^*$ является достаточно консервативным к отношению молекулярных весов вдуваемого газа и основного потока. Тогда, с учетом уравнения (4.1), можно ожидать, что при данном числе M будет однозначная зависимость Θ от b_T.

Результаты расчетов такой зависимости для $M = 3.0$ и $R^{**} = 10^4$ (что соответствует $b_{T_*} = 5.42$) представлены на фиг. 5 сплошной линией. Как видно из графика, опытные точки для вдува самых разнообразных газов при изменении μ_1 от 2 до 121 группируются около расчетной кривой.

Поступила 17 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Driest E. R. Turbulent Boundary Layer in Compressible Fluids. J. Aeronaut. Sci., 1951, vol. 18, No. 3.
2. Dorrence W., Dore F. The Effect of Mass Transfer on the Compressible Turbulent Boundary Layer Skin Friction and Heat Transfer. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 6.
3. Лапин Ю. В. Трение и теплообмен в сжимаемом турбулентном пограничном слое на пластине при наличии ввода вещества. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, вып. 8; Лапин Ю. В. Трение и теплообмен в сжимаемом турбулентном слое при наличии химических реакций, обусловленных вводом инородного вещества. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, вып. 10.
4. Мотулевич В. П. Теплообмен и трение пластины в потоке газа при образовании турбулентного пограничного слоя с пористой подачей инородного вещества. Инж.-физ. ж., 1960, т. III, № 8.
5. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой газа на проницаемой пластине. ПМТФ, 1962, № 1.
6. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд-во СО АН СССР, 1962.
7. Spolding D. B., Chi S. W. Mechanical Engineering Department Imperial College of Science and Technology. London, 1963, S. W. 7, April.
8. Spolding D. B., Auslander D. M., T. R. Sundaram. Northern Research and Engineering Corporation. London, 1963.
9. Лиз Л. Конвективный теплообмен при наличии подвода вещества и химических реакций. Сб. пер. статей «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», Изд-во иностр. литер., 1962.
10. Pappas C. C., Okuno A. F. Measurements of Skin Friction of the Compressible Turbulent Boundary Layer on a Cone with Foreigh Gas Injection. J. Aeronaut. Sci., 1960, vol. 27, No. 5, p. 321.
11. Tewfik O. E., Eckert E. R. G., Shirtliffe C. F. Thermal Diffusion Effects on Energy Transfer in a Turbulent Boundary Layer with Helium Injection. Proceedings of the Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Washington, 1962, Stanford Calif. Univ. Press, p. 42—62.
12. Bartle E. R., Leadon B. M. The Effectiveness as a Universal Measure of Mass Transfer Cooling for a Turbulent Boundary Layer. Proceedings of the 1962 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Washington, 1962, Stanford Calif. Univ. Press, p. 27—41.