

10. Пиоро И.А., Антоненко В.А., Пиоро Л.С. Эффективные теплообменники с двухфазными термосифонами. — Киев: Наук. думка, 1991.
11. Высокоскоростное формование волокон / Под ред. А. Зябицкого, Х. Каваи. — М.: Химия, 1988.
12. Каменев Е.И., Мясников Г.Д., Платонов М.П. Применение пластических масс. Справочник. — Л.: Химия, 1985.

г. Днепропетровск

Поступила 8/VII 1993 г.

УДК 539.3

Г.В. Иванов, О.Н. Иванова

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

В [1] изложен алгоритм решения методом самоуравновешенных невязок задач о плоских формах равновесных состояний тонких упругих стержней. Ниже излагается алгоритм решения этим методом задач о пространственных формах равновесных состояний.

1. Основные уравнения. Для определения положения точек стержня наряду с неподвижной системой координат x_i с базисными векторами e_i ($i = 1, 2, 3$) (рис. 1) удобно использовать длину дуги s оси стержня ($s \in [0, l]$) и координаты x'_1, x'_2 с началом на оси стержня и базисными векторами e'_1, e'_2 , направленными вдоль главных осей инерции поперечных сечений стержня. Ориентация e'_i , $i = 1, 2, 3$ ($e'_3 = e'_1 \times e'_2$) задается углами Эйлера ϑ, ψ, φ (рис. 2).

Уравнения равновесия можно записать в виде [2, 3]

$$(1.1) \quad \frac{dF}{ds} + f = 0, \quad \frac{dM}{ds} + e'_3 \times F = 0,$$

где F, M — векторы сил моментов в поперечных сечениях стержня; f — вектор поверхностной нагрузки;

$$e'_3 = \sin \vartheta (\sin \psi \cdot e_1 - \cos \psi \cdot e_2) + \cos \vartheta \cdot e_3.$$

Ниже рассматривается класс задач, в которых вектор F не зависит от ϑ, ψ, φ и полностью определяется первым из уравнений (1.1) и граничными условиями. В дальнейшем функция $F = F(s)$ считается известной.

Полагаем [2, 3], что

$$(1.2) \quad M = M_k e'_k, \quad M_1 = Ap, \quad M_2 = Bq, \quad M_3 = C\tau.$$

Здесь A, B, C — жесткости при изгибе и кручении стержня; p, q — кривизны; τ — кручение оси стержня:

$$(1.3) \quad p = \frac{d\psi}{ds} \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \frac{d\vartheta}{ds} \cos \varphi,$$

$$q = \frac{d\psi}{ds} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi - \frac{d\vartheta}{ds} \sin \varphi,$$

$$\tau = \frac{d\psi}{ds} \cos \vartheta + \frac{d\varphi}{ds}.$$

Ограничимся рассмотрением класса задач с граничными условиями

© Г.В. Иванов, О.Н. Иванова, 1994

$$(1.4) \quad \vartheta = \psi = \varphi = x_1 = x_2 = x_3 = 0 \text{ при } s = 0;$$

$$(1.5) \quad \vartheta = \vartheta_0, \psi = \psi_0, \varphi = \varphi_0 \text{ при } s = l$$

или

$$(1.6) \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

При сделанных предположениях решение задачи сводится к интегрированию второго из уравнений (1.1) и уравнений (1.2), (1.3) при условиях (1.4), (1.5) или (1.6).

Координаты x_k оси стержня определяются после вычисления функций ϑ, ψ, φ по формуле

$$x_k = \int_0^s \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_k ds.$$

2. Вариационная формулировка задачи. Обозначим через $\delta\gamma$ вариацию вектора поворотов

$$\delta\gamma = \mathbf{e}_3 \delta\psi + \mathbf{e}'_3 \delta\varphi + n \delta\vartheta, \quad n = \cos\psi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\psi \cdot \mathbf{e}_2.$$

Нетрудно показать, что вариацию $\delta\gamma$ можно записать в виде

$$\delta\gamma = \mathbf{e}'_k \cdot \delta\gamma_k, \quad \delta\gamma_1 = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \delta\psi + \cos\varphi \cdot \delta\vartheta,$$

$$\delta\gamma_2 = \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \delta\psi - \sin\varphi \cdot \delta\vartheta,$$

$$\delta\gamma_3 = \cos\vartheta \cdot \delta\psi + \delta\varphi,$$

а производные $\frac{d\mathbf{e}'_k}{ds}$ связаны с p, q, τ уравнениями

$$\frac{d\mathbf{e}'_k}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_k, \quad \boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}'_1 + q\mathbf{e}'_2 + \tau\mathbf{e}'_3.$$

Отсюда следует

$$(2.1) \quad \frac{d}{ds} \delta\gamma = \mathbf{e}'_1 \delta p + \mathbf{e}'_2 \delta q + \mathbf{e}'_3 \delta \tau.$$

Умножая второе из уравнений (1.1) на $\delta\gamma$, интегрируя по s с учетом (2.1) и используя равенства

$$(\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{F}) \delta\gamma = \mathbf{F}(\delta\gamma \times \mathbf{e}'_3) = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{e}'_3 = \delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_3),$$

находим, что решению задачи соответствует экстремум функционала

$$(2.2) \quad \Phi = \frac{1}{2} \int_0^l (Ap^2 + Bq^2 + C\tau^2 - 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}'_3) ds$$

в классе функций ϑ, ψ, φ , удовлетворяющих условиям (1.4) и, если граничные условия при $s = l$ формулируются в виде условий (1.5), то и этим условиям.

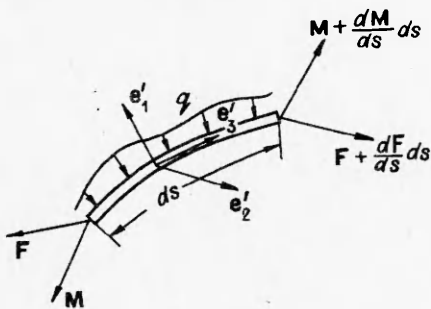


Рис. 1

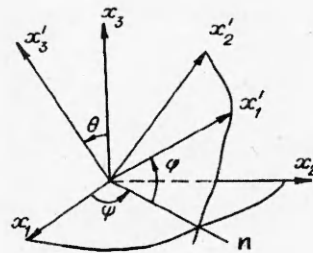


Рис. 2

Ниже излагается алгоритм построения последовательности приближений с монотонно уменьшающимися величинами функционала (2.2) на основе поочередного варьирования только одной из функций ϑ, ψ, φ .

3. Аппроксимация функционала энергии квадратичными функциями. Пусть $\bar{\vartheta}(s), \bar{\psi}(s), \bar{\varphi}(s)$ — какие-либо функции, равные нулю при $s = 0$ и удовлетворяющие условиям (1.5), если они заданы. В излагаемом алгоритме строятся равные нулю при $s = 0$, а в случае (1.5) и при $s = l$ функции $\dot{\vartheta}(s), \dot{\psi}(s), \dot{\varphi}(s)$, при которых

$$(3.1) \quad \Phi(\bar{\vartheta} + \dot{\vartheta}, \bar{\psi} + \dot{\psi}, \bar{\varphi} + \dot{\varphi}) \leq \Phi(\bar{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}),$$

причем равенство в (3.1) выполняется, когда $\dot{\vartheta}(s), \dot{\psi}(s), \dot{\varphi}(s)$ тождественно равны нулю, что возможно лишь тогда, когда $\bar{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$ удовлетворяют условиям экстремума функционала Φ .

Построение функций $\dot{\vartheta}(s), \dot{\psi}(s), \dot{\varphi}(s)$ состоит из трех этапов. На каждом из них последовательно определяется одна из этих функций.

На первом этапе находится функция $\dot{\vartheta}(s)$, удовлетворяющая неравенству

$$(3.2) \quad \Phi(\bar{\vartheta} + \dot{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}) \leq \Phi(\bar{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}).$$

При этом функционал $\Phi(\bar{\vartheta} + \dot{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi})$ аппроксимируется квадратичным относительно $\dot{\vartheta}$ функционалом Φ_{ϑ} :

$$(3.3) \quad \Phi_{\vartheta} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(\bar{p} + \dot{p})^2 + B(\bar{q} + \dot{q})^2 + C(\bar{\tau} + \dot{\tau})^2 + \bar{T} \dot{\vartheta}^2 + 2(\bar{Q} \dot{\vartheta} - \bar{T})] ds,$$

где $\bar{p}, \bar{q}, \bar{\tau}$ — кривизны и кручение, соответствующие функциям $\bar{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$;

$$\dot{p} = \dot{\vartheta} \frac{d\bar{\psi}}{ds} \cos \bar{\vartheta} \cdot \sin \bar{\varphi} + \frac{d\dot{\vartheta}}{ds} \cos \bar{\varphi};$$

$$\dot{q} = \dot{\vartheta} \frac{d\bar{\psi}}{ds} \cos \bar{\vartheta} \cdot \cos \bar{\varphi} - \frac{d\dot{\vartheta}}{ds} \sin \bar{\varphi};$$

$$\dot{\tau} = -\dot{\vartheta} \frac{d\bar{\psi}}{ds} \sin \bar{\vartheta};$$

$$\bar{T} = \bar{H} \sin \bar{\vartheta} + F_3 \cos \bar{\vartheta}; \quad \bar{Q} = -\bar{H} \cos \bar{\vartheta} + F_3 \sin \bar{\vartheta};$$

$$\bar{H} = F_1 \sin \bar{\psi} - F_2 \cos \bar{\psi};$$

F_k — компоненты вектора F в неподвижной системе координат x_k ($k = 1, 2, 3$). Аппроксимация производится по следующему правилу: p, q, τ заменяются линейными частями разложений в ряд по $\dot{\vartheta}$, а $F \cdot e_3$ — квадратичной частью разложения в ряд по $\dot{\vartheta}$.

При достаточно малых величинах функции $\dot{\vartheta}(s)$ из неравенства

$$(3.4) \quad \Phi_{\vartheta}(\bar{\vartheta} + \dot{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}) \leq \Phi_{\vartheta}(\bar{\vartheta}, \bar{\psi}, \bar{\varphi})$$

вытекает неравенство (3.2). Поэтому задачу уменьшения функционала (2.2) за счет выбора $\dot{\vartheta}(s)$ можно рассматривать как задачу определения функции $\dot{\vartheta}(s)$, удовлетворяющей (3.4) и условию

$$\max_s |\dot{\vartheta}(s)| \leq \alpha_1$$

(α_1 — постоянная величина, которая в процессе определения $\dot{\vartheta}(s)$ может корректироваться так, чтобы из (3.4) следовало (3.2)).

На втором этапе функционал $\Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi} + \dot{\psi}, \bar{\varphi})$ ($\bar{\vartheta}' = \bar{\vartheta} + \dot{\vartheta}$) аппроксимируется квадратичным относительно $\dot{\psi}$ функционалом Φ_{ψ} :

$$(3.5) \quad \Phi_{\psi} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(\bar{p}' + \dot{p}')^2 + B(\bar{q}' + \dot{q}')^2 + C(\bar{\tau}' + \dot{\tau}')^2 +$$

$$+ \dot{\psi}^2 \bar{H} \sin \bar{\vartheta}' - 2(\bar{T}' + \dot{\psi} \bar{N}' \sin \bar{\vartheta}')] ds.$$

Здесь $\bar{p}', \bar{q}', \bar{\tau}'$ — кривизны и кручение, соответствующие функциям $\bar{\vartheta}', \bar{\psi}, \bar{\varphi}$;

$$\dot{p}' = \frac{d\dot{\psi}}{ds} \sin \bar{\vartheta}' \cdot \sin \bar{\varphi}; \quad \dot{q}' = \frac{d\dot{\psi}}{ds} \sin \bar{\vartheta}' \cdot \cos \bar{\varphi}; \quad \dot{\tau}' = \frac{d\dot{\psi}}{ds} \cos \bar{\vartheta}';$$

$$\bar{T}' = \bar{H} \sin \bar{\vartheta}' + F_3 \cos \bar{\vartheta}'; \quad \bar{N}' = F_1 \cos \bar{\psi} + F_2 \sin \bar{\psi}.$$

Аппроксимация производится по тому же правилу, по которому строился функционал (3.3).

Функция $\dot{\psi}(s)$ определяется из условий

$$\Phi_{\dot{\psi}}(\bar{\vartheta}', \bar{\psi} + \dot{\psi}, \bar{\varphi}) \leq \Phi_{\dot{\psi}}(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}, \bar{\varphi}), \quad \max |\dot{\psi}(s)| \leq \alpha_2,$$

где α_2 — постоянная, за счет выбора которой достигается выполнение неравенства

$$\Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi} + \dot{\psi}, \bar{\varphi}) \leq \Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}, \bar{\varphi}).$$

На третьем этапе функционал $\Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi} + \dot{\varphi})$ ($\bar{\psi}' = \bar{\psi} + \dot{\psi}$) аппроксимируется квадратичным относительно $\dot{\varphi}$ функционалом $\Phi_{\dot{\varphi}}$:

$$(3.6) \quad \Phi_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(\bar{p}'' + \dot{p}'')^2 + B(\bar{q}'' + \dot{q}'')^2 + C(\bar{\tau}'' + \dot{\tau}'')^2 - 2\bar{T}''] ds.$$

Здесь $\bar{p}'', \bar{q}'', \bar{\tau}''$ — кривизны и кручение, соответствующие функциям $\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi}$;

$$\dot{p}'' = \left(\frac{d\dot{\psi}'}{ds} \sin \bar{\vartheta}' \cdot \cos \bar{\varphi} - \frac{d\bar{\vartheta}'}{ds} \sin \bar{\varphi} \right) \dot{\varphi};$$

$$\dot{q}'' = - \left(\frac{d\dot{\psi}'}{ds} \sin \bar{\vartheta}' \cdot \sin \bar{\varphi} + \frac{d\bar{\vartheta}'}{ds} \cos \bar{\varphi} \right) \dot{\varphi};$$

$$\dot{\tau}'' = \frac{d\dot{\varphi}}{ds}, \quad \bar{T}'' = \sin \bar{\vartheta}' (F_1 \sin \bar{\psi}' - F_2 \cos \bar{\psi}') + F_3 \cos \bar{\vartheta}'.$$

Аппроксимация производится по тому же правилу, по которому строились функционалы (3.3), (3.5). Функция $\dot{\varphi}(s)$ определяется из условия

$$\Phi_{\dot{\varphi}}(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi} + \dot{\varphi}) \leq \Phi_{\dot{\varphi}}(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi}), \quad \max |\dot{\varphi}(s)| \leq \alpha_3,$$

где α_3 — постоянная, за счет выбора которой достигается выполнение неравенства

$$\Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi} + \dot{\varphi}) \leq \Phi(\bar{\vartheta}', \bar{\psi}', \bar{\varphi}).$$

4. Разностная аппроксимация. Узлами $s_i = (i-1)/h$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$, $h = l/N$) ось стержня разбивается на N элементов. Элементы нумеруются числами $i + 1/2$ ($i = 1, 2, \dots, N$), а величины, соответствующие элементу $i + 1/2$, снабжаются индексом $i + 1/2$. Полагаем

$$\vartheta_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\vartheta_i + \vartheta_{i+1}), \quad \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)_{i+1/2} = \frac{1}{h} (\hat{\vartheta}_{i+1} - \vartheta_i)$$

(ϑ_i — значения ϑ в узлах). Аналогично через ψ_i, φ_i в узлах определяются величины

$$\psi_{i+1/2}, \varphi_{i+1/2}, \quad \left(\frac{d\psi}{ds} \right)_{i+1/2}, \quad \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{i+1/2}.$$

Косинусы и синусы в элементе $i + 1/2$ вычисляются по формулам

$$(\cos \vartheta)_{i+1,2} = \cos \vartheta_{i+1,2}, (\sin \varphi)_{i+1,2} = \sin \varphi_{i+1,2}.$$

Функционал (2.2) заменяется разностным

$$(4.1) \quad \Phi' = \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^N [A p_{i+1,2}^2 + B q_{i+1,2}^2 + C \tau_{i+1,2}^2 - 2F_{i+1,2}(\mathbf{e}'_{i+1,2})],$$

где

$$p_{i+1,2} = \frac{1}{h} [(\dot{\psi}_{i+1} - \dot{\psi}_i) \sin \vartheta_{i+1,2} \cdot \sin \varphi_{i+1,2} + (\dot{\vartheta}_{i+1} - \dot{\vartheta}_i) \cos \varphi_{i+1,2}],$$

и аналогичный смысл имеют величины

$$q_{i+1,2}, \tau_{i+1,2}, F_{i+1,2}, (\mathbf{e}'_{i+1,2}).$$

Функционалы (3.3), (3.5), (3.6) заменяются соответствующими разностными функционалами $\Phi'_\vartheta, \Phi'_\psi, \Phi'_\varphi$.

Квадратичные части $\Delta_\vartheta, \Delta_\psi$ функционалов $\Phi'_\vartheta, \Phi'_\psi$ имеют следующие оценки:

$$\begin{aligned} \Delta_\vartheta &= \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^N [A \dot{p}_{i+1,2}^2 + B \dot{q}_{i+1,2}^2 + C \dot{\tau}_{i+1,2}^2 + \bar{T}_{i+1,2} \dot{\vartheta}_{i+1,2}^2] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^N \left[D_* \left(\frac{d\dot{\vartheta}}{ds} \right)_{i+1,2}^2 - T_* \dot{\vartheta}_{i+1,2}^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\psi &= \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^N [A (\dot{p}'_{i+1,2})^2 + B (\dot{q}'_{i+1,2})^2 + C (\dot{\tau}'_{i+1,2})^2 + \bar{H}'_{i+1,2} \sin \dot{\vartheta}'_{i+1,2} \cdot \dot{\psi}_{i+1,2}^2] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^N \left[D_* \left(\frac{d\dot{\psi}}{ds} \right)_{i+1,2}^2 - T_* \dot{\psi}_{i+1,2}^2 \right], \end{aligned}$$

$$D_* = \min(A, B, C), T_* = \max \sum_{k=1}^3 |(F_k)_{i+1,2}|.$$

Квадратичная относительно $\dot{\varphi}_i$ часть функционала Φ'_φ — положительно определенная форма. Отсюда вытекает, что для минимизации функционалов $\Phi'_\vartheta, \Phi'_\psi, \Phi'_\varphi$ при условии

$$h \leq \frac{D_*}{T_* l}$$

можно использовать метод самоуравновешенных невязок [1] и получить этим методом значения $\dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i, \dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$), при которых

$$\Phi'(\dot{\vartheta}_i + \dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_i, \dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i) \leq \Phi'(\dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i, \dot{\varphi}_i),$$

причем равенство будет лишь в случае, когда $\dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i, \dot{\varphi}_i$ удовлетворяют условиям экстремума функционала Φ' и соответственно равны нулю $\dot{\vartheta}_i, \dot{\psi}_i, \dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$).

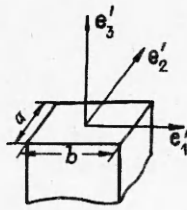
Таким образом, используя метод самоуравновешенных невязок [1], можно построить последовательность приближенных решений с монотонно уменьшающимися значениями функционала Φ' . Последовательность будет сходящейся, так как функционал ограничен снизу:

$$\Phi' \geq -T_* l.$$

5. Примеры вычисления равновесных форм. Рассматривались стержни прямоугольного поперечного сечения (рис. 3). В этом случае

$$A = E a^3 b / 12, B = E a b^3 / 12, C = \gamma E b a^3 / 2(1 + \nu).$$

Р и с. 3



Значения γ принимались равными тем, которые указаны в [4]. Некоторые из них приведены в табл. 1.

Ниже используются безразмерные величины: s, x_k — отношения длины дуги и координат к длине стержня l ; p, q, τ — кривизны и кручение, умноженные на l ; A, B, C — отношение жесткостей к B ; F_k, M_k — компоненты векторов сил и момента, умноженные на l^2/B и l/B соответственно; Φ' — функционал (4.1), умноженный на l/B .

В одном из примеров рассматривались равновесные состояния при изгибе силой $F = Fe_1$ полосы с отношением сторон поперечного сечения $b/a = 8$ (рис. 4). Принималось, что конец $s = 1$ полосы может поворачиваться свободно. На рис. 5 представлена зависимость F от абсолютной

Т а б л и ц а 1

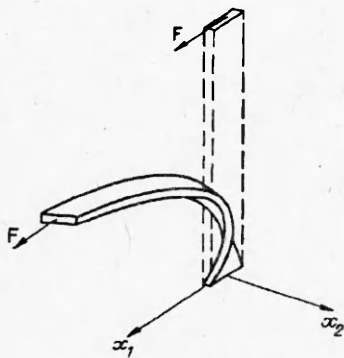
γ	b/a
0,140	1
0,228	2
0,281	4
0,307	8
0,312	10

Т а б л и ц а 2

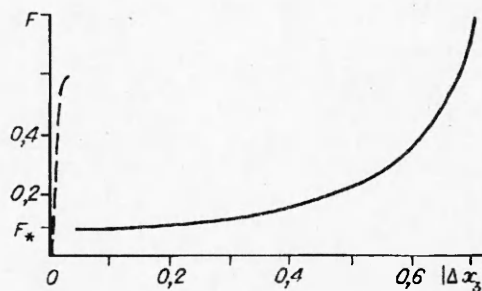
N	Φ'	$x_1(1)$	$x_2(1)$	$x_3(1)$
40	$-1,078 \cdot 10^{-3}$	0,0707	-0,2382	0,9570
80	$-1,078 \cdot 10^{-3}$	0,0711	-0,2390	0,9566
100	$-1,078 \cdot 10^{-3}$	0,0711	-0,2392	0,9566

величины $|\Delta x_3|$ вертикального перемещения конца $s = 1$ полосы ($|\Delta x_3| = 1 - x_3$, x_3 — координата конца $s = 1$ полосы в деформированном состоянии). Штриховая линия отвечает плоским равновесным состояниям, сплошная — трехмерным, $F_* = 0,08$ — критическая нагрузка [5].

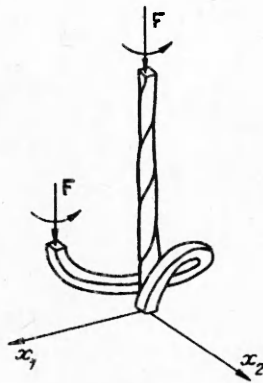
В табл. 2 приведены значения функционала Φ' и координат конца $s = 1$ полосы, соответствующие $F = 0,08$ и разбиениям оси полосы на 40, 80 и 100 элементов. Эти значения практически совпадают. В качестве критерия остановки процесса вычислений принималось условие неизменности трех значащих цифр в величинах функционала энергии и координат конца полосы. Число итераций, требуемых для получения равновесных форм,



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

практически не зависело от числа элементов, на которые разбивалась ось полосы, и было равным примерно 50.

Рассматривались равновесные состояния при сжатии закрученного стержня квадратного поперечного сечения при граничных условиях

$$\vartheta(0) = \psi(0) = \varphi(0) = \vartheta(1) = \psi(1) = 0,$$

$$\varphi(1) = 2\pi, F(1) = -9e_3.$$

Наряду с равновесным состоянием, в котором ось стержня прямолинейна ($\vartheta = \psi = 0, \varphi = 2\pi s$), возможно равновесное состояние, форма которого изображена на рис. 6. При вычислении этого равновесного состояния в качестве начального приближения принимались

$$\vartheta = 10(s - s^2), \psi = 0, \varphi = 2\pi s.$$

В табл. 3 продемонстрированы уменьшение функционала энергии и

Т а б л и ц а 3

Количество итераций	Φ'	$x_1(1)$	$x_2(1)$	$x_3(1)$
0	28,43	0	-0,740	-0,110
30	19,92	$2,7 \cdot 10^{-2}$	-0,479	$6,3 \cdot 10^{-2}$
100	19,75	$1,9 \cdot 10^{-2}$	-0,345	$-1,8 \cdot 10^{-2}$
120	19,75	$1,9 \cdot 10^{-2}$	-0,331	$-2,5 \cdot 10^{-2}$

изменение координат конца стержня в процессе итераций при $N = 40$. В рассматриваемом примере функционал Φ' убывает монотонно без ограничений на величины вариаций искомых функций, вычисляемых методом самоуравновешенных невязок [1].

Работа выполнена при содействии фонда Д. Сороса. Авторы выражают признательность фонду за материальную поддержку их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Иванова О.Н. Вычисление плоских равновесных форм тонких стержней методом самоуравновешенных невязок // ПМТФ. — 1994. — № 2.
2. Попов Е.Л. Нелинейные задачи статики тонких стержней. — Л.; М.: Гостехиздат, 1948.
3. Ляв. А. Математическая теория упругости: Пер. с англ. — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
4. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т. Т. 1 / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967.

г. Новосибирск

Поступила 20/X 1993 г.