

ДИНАМИКА ОДНОНАПРАВЛЕННОГО СТЕКЛОПЛАСТИКА

А. М. Михайлов

(Новосибирск)

Формулируется задача о движении однонаправленного стеклопластика в предположении, что волокна работают только на растяжение — сжатие, связующее — только на сдвиг. Учитывается инерция связующего и волокон в направлении, параллельном волокнам. Полученная система уравнений в частных производных преобразованием Лапласа по времени сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих только смещения волокон. В качестве иллюстрации решена задача о действии волны нормального напряжения на полупространство. Решение получено в виде бесконечного ряда с явным законом получения слагаемых. Приведены графики для распределения нормальных и касательных напряжений в различные моменты времени. Инерция связующего приводит к появлению касательных напряжений на границе волокно — связующее, чем может быть объяснена склонность к расслоению в конструкциях из стеклопластика.

1. При изучении равновесия пластин из однонаправленного стеклопластика часто используется допущение, сформулированное в [1], о том, что нормальные напряжения существуют только в армирующих волокнах, а касательные напряжения — только в связующем на площадках, параллельных волокнам.

Такая идеализация характера работы компонентов оправдывается тем, что модули Юнга у них отличаются на 1—2 порядка, а продольные деформации примерно одинаковы вследствие сцепления волокна и связующего. Хотя в действительности напряженное состояние компонентов стеклопластика более сложное, рассматриваемый подход правильно выражает идею целесообразной работы армированного материала: высокопрочные волокна ориентируются вдоль линий действия растягивающих нагрузок, а связующее способствует более равномерному распределению этих нагрузок между волокнами.

Математическая формулировка статических задач в излагаемой постановке приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно смещений армирующих волокон, в то время как теория упругости привела бы к более сложной задаче в уравнениях в частных производных с условиями сопряжения на каждой поверхности волокно — связующее.

Ниже такой подход обобщается на случай динамики. При этом сохраняются сформулированные предположения о характере работы компонентов и учитываются силы инерции как в связующем, так и в волокнах. Это приводит к системе уравнений в частных производных относительно смещений. После преобразования Лапласа по времени и исключения смещений связующего получается система дифференциальных уравнений для преобразованных смещений волокон, почти такая же, как в статическом случае.

Основной качественный эффект, выявляемый предлагаемой постановкой задачи, заключается в том, что инерция связующего вызывает увеличение касательных напряжений на границах раздела компонентов.

Пусть рассматриваемая пластина состоит из M волокон с модулем Юнга E и плотностью ρ_1 , занумерованных целыми числами j от $R + 1$ до $R + M$. Волокна чередуются со слоями связующего (модуль сдвига G , плотность

ρ_2) ширины H . Ширину волокон в плоскости пластины обозначим через h . Таким образом, коэффициент армирования $\psi = h / (h + H)$, скорость продольных волн в волокнах $c_1 = (E / \rho_1)^{1/2}$, скорость сдвиговых волн в связующем $c_2 = (G / \rho_2)^{1/2}$. Ось y направим параллельно, а ось x перпендикулярно волокнам.

Смещение связующего вдоль оси y обозначим через $v_j(\xi, y, t)$. Это обозначение указывает на то, что рассматриваемая точка связующего лежит между j -м и $(j + 1)$ -м волокнами на расстоянии ξ от j -го волокна ($0 \leq \xi \leq H$); y — координата вдоль волокна, t — время. Смещение волокна обозначим через $u_j(y, t)$. Примем, что касательные напряжения в связующем $\tau_j(\xi, y, t)$ и нормальные напряжения в волокне $\sigma_j(y, t)$ пропорциональны соответствующим деформациям

$$(1.1) \quad \tau_j(\xi, y, t) = G \frac{\partial v_j(\xi, y, t)}{\partial \xi}, \quad \sigma_j(y, t) = E \frac{\partial u_j(y, t)}{\partial y}$$

Тогда уравнение движения связующего превратится в волновое уравнение

$$(1.2) \quad c_2^2 \partial^2 v_j / \partial \xi^2 - \partial^2 v_j / \partial t^2 = 0$$

Условия сцепления связующего и волокон дают граничные условия для (1.2)

$$(1.3) \quad v_j(0, y, t) = u_j(y, t), \quad v_j(H, y, t) = u_{j+1}(y, t)$$

Запишем уравнения движения волокон, предполагая, что крайние волокна ($j = R + 1, j = R + M$) свободны от внешних нагрузок

$$h \delta \sigma_j / \partial y + [(1 - \delta_{j, R+M}) \tau_j(0, y, t) - (1 - \delta_{j, R+1}) \tau_{j-1}(H, y, t)] = \\ = \rho_1 h \partial^2 u_j / \partial t^2$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. После подстановки $\sigma_j, \tau_j, \tau_{j-1}$ из (1.1) получим

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{G}{Eh} \frac{\partial}{\partial \xi} [(1 - \delta_{j, R+M}) v_j|_{\xi=0} - (1 - \delta_{j, R+1}) v_{j-1}|_{\xi=H}] = \\ = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad c_1^2 = \frac{E}{\rho_1}$$

Система уравнений (1.2) — (1.4) вместе с соответствующими начальными и граничными условиями определяет движение стеклопластика.

Подвергнем уравнения (1.2) — (1.4) преобразованию Лапласа по времени, считая для простоты начальные условия нулевыми ([2] гл. VI). Преобразованные величины будем помечать индексом L , параметр преобразования обозначим p . После такого преобразования (1.2) превратится в обыкновенное дифференциальное уравнение, решив которое при граничных условиях (1.3) (преобразованных по Лапласу), получаем

$$(1.5) \quad v_j^L(\xi, y, p) = \text{sh}^{-1} \lambda [u_j^L \text{sh}(\lambda - \lambda \xi / H) + u_{j+1}^L \text{sh}(\lambda \xi / H)] \\ \lambda = pH / c_2$$

Используя (1.4), (1.5), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.6) \quad \omega^2 d^2 u_{R+1}^L / dy^2 + \beta^2 [-(\alpha - \text{ch} \lambda) u_{R+1}^L + u_{R+2}^L] = 0 \\ \omega^2 d^2 u_j^L / dy^2 + \beta^2 (u_{j-1}^L - \alpha u_j^L + u_{j+1}^L) = 0, \quad j \neq R + 1, R + M \\ \omega^2 d^2 u_{R+M}^L / dy^2 + \beta^2 [u_{R+M-1}^L - (\alpha - \text{ch} \lambda) u_{R+M}^L] = 0 \\ \beta = (G / E)^{1/2}, \quad \omega = (Hh \text{sh} \lambda / \lambda)^{1/2}, \quad \alpha = p^2 \omega^2 / \beta^2 c_1^2 + 2 \text{ch} \lambda$$

В (1.6) входят смещения волокон и не входят смещения связующего. При ненулевых начальных условиях в (1.6) появилась бы известная правая часть. После нахождения u_j касательные напряжения в связующем определяются по формулам (1.5), (1.4).

Рассмотрим предельные случаи. Пусть при $t \rightarrow \infty$ смещения стремятся к некоторому пределу. Тогда по известной теореме операционного исчисления ([²], п. 83)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_j = \lim_{p \rightarrow 0} p u_j^L$$

Умножая (1.5), (1.6) на p и переходя к пределу при $p \rightarrow 0$, получим систему уравнений, описывающую равновесие. Она будет отличаться от (1.6) отсутствием значков L при смещениях u_j и тем, что $\lambda = 0$, $\omega = (Hh)^{1/2}$, $\alpha = 2$. Из (1.5) после рассматриваемого предельного перехода получаем, что при равновесии смещения связующего являются линейными функциями от ξ .

К такому же результату можно прийти, устремляя к бесконечности скорости передачи взаимодействия c_1 и c_2 . При таком переходе к пределу коэффициенты системы (1.6) стремятся к тем же значениям, что и при $p \rightarrow 0$. Следовательно, фундаментальная система решений (1.6) будет такая же, как в статике. Поэтому зависимость u_j от p появится при определении из граничных условий констант, входящих в общее решение системы. Это означает, что стеклопластик мгновенно реагирует на изменение граничных условий, принимая равновесную конфигурацию, соответствующую граничным условиям в данный момент времени. Если, в частности, граничные смещения или деформации постоянны при $t > 0$, то их преобразования Лапласа $\sim p^{-1}$ и после обращения оригиналы u_j окажутся не зависящими от t ([²], п. 79, формула (8) при $\tau = 0$).

Рассмотрим другой предельный переход. Устремим величины h и H к нулю, а число волокон M — к бесконечности так, что коэффициент армирования $\psi = h / (h + H)$ и величины $x = j(h + H)$ остаются постоянными. Тогда $\alpha \rightarrow 2$ и во внутренних уравнениях (1.6) выражение $u_{j-1}^L - \alpha u_j^L + u_{j+1}^L$ становится пропорциональным разностному аналогу второй производной по x от u^L .

Таким образом, приходим к однородной сплошной среде, уравнение для которой в изображениях по Лапласу получается из (1.6)

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial y^2} + \frac{\beta^2}{\psi(1-\psi)} \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} = \frac{p^2}{c_1^2} u^L$$

Этому уравнению соответствует уравнение в оригиналах

$$(1.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\beta^2}{\psi(1-\psi)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

несущественно отличающееся от волнового уравнения. Инерция связующего после такого предельного перехода не играет роли. Следовательно, описание стеклопластика уравнением (1.7) неприемлемо в тех случаях, когда представляет интерес динамическое взаимодействие волокна и связующего.

2. Рассмотрим полупространство $y \geq 0$, $-\infty < j < \infty$. В (1.6) в этом случае остаются только внутренние уравнения; умножая j -е уравнение на $\exp(isj)$ (i — мнимая единица, s — вещественное число) и суммируя по j , приходим к обыкновенному уравнению

$$\omega^2 d^2 u^{LF} / dy^2 + \beta^2 (-\alpha + 2 \cos s) u^{LF} = 0$$

для ряда Фурье

$$u^{LF}(y, p, s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^L(y, p) \exp(isj)$$

Поскольку $u^{LF}(\infty, p, s) = 0$, получаем, что

$$u^{LF}(y, p, s) = c(p, s) \exp\left(-\frac{\beta y}{\omega} \sqrt{\alpha - 2 \cos s}\right)$$

Неизвестная функция $c(p, s)$ должна определяться из граничных условий при $y = 0$. Выражая коэффициенты ряда Фурье через его сумму, находим трансформанту Лапласа смещений

$$u_j^L(y, p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} u^{LF}(y, p, s) \exp(-isj) ds$$

Пусть на полупространство действует внезапно приложенное постоянное нормальное напряжение $Q\psi$ (ψ — коэффициент армирования).

В соответствии с принятой моделью (связующее не воспринимает нормальных нагрузок) граничные условия таковы:

$$\frac{\partial u_j}{\partial y}(0, t) = \frac{Q}{E} \delta_0(t), \quad \delta_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

После преобразования Лапласа имеем

$$\frac{\partial u_j^L}{\partial y}(0, p) = \frac{Q}{pE}, \quad \frac{\partial u^{LF}}{\partial y}(0, p, s) = \frac{2\pi Q}{pE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_1(s - 2\pi k)$$

где δ_1 — дельта-функция Дирака ([3], стр. 47, формула (2))

$$c(p, s) = -\frac{2\pi Q \omega}{\beta \sqrt{\alpha - 2 \cos s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_1(s - 2\pi k)$$

$$u_j^L(y, p) = -\frac{\omega Q}{p\beta E} \frac{\exp(-\beta y \sqrt{\alpha - 2/\omega})}{\sqrt{\alpha - 2}}$$

$$\sigma_j^L(y, p) = E \frac{du_j^L}{dy} = -\frac{Q}{p} \exp\left(-\frac{yr}{c_1}\right)$$

$$r = \sqrt{\varepsilon p \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} + p^2}, \quad \varepsilon = \frac{2Gc_1^2}{Ehc_2}$$

Используя (1.4) и (1.5), найдем касательные напряжения на границе волокна и связующего ($\xi = 0$)

$$\tau_j^L(0, y, p) = -\frac{Qc_1}{\beta^2 c_2 r} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \exp\left(-\frac{yr}{c_1}\right)$$

Поскольку в данной задаче нет зависимости от j , опустим этот индекс в дальнейших выкладках.

Для получения оригиналов разложим τ^L и σ^L в ряды Тейлора по степеням $\mu = \exp(-\lambda)$ в окрестности точки $\mu = 0$. На основании теоремы запаздывания операционного исчисления слагаемые таких рядов соответствуют волнам напряжений, приходящим от все более далеких волокон ([4], стр. 69). В частности, свободный член ($\lambda = \infty$) изображает решение задачи об уединенном волокне, заделанном в полупространство из связующего, или решение изучаемой задачи для тех моментов времени, когда волна сдвига не успела достигнуть соседних волокон ($0 \leq t < H$).

В данном случае дифференцирование по μ при вычислении коэффициентов ряда Тейлора удастся заменить дифференцированием по параметру ε , не содержащему p .

Действительно, введя обозначение $\gamma = \varepsilon \text{th} (\lambda / 2)$, имеем

$$(2.1) \quad \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} = \left(\text{th} \frac{\lambda}{2} \right)^n \frac{\partial^n}{\partial \gamma^n}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \mu^n} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{k!} C_k^l \gamma^l \frac{\partial^{n-k-l}}{\partial \mu^n} \frac{\partial^k}{\partial \gamma^k}$$

Последнее равенство выражает правило нахождения n -й производной от сложной функции ([5], формулы (0.430)). Используя первое равенство (2.1), вспоминая, что производные должны быть найдены в точке $\mu = 0$, а также что

$$\gamma = \varepsilon (1 - \mu) / (1 + \mu)$$

$$\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_k^l \gamma^l \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \gamma^{k-l} \Big|_{\mu=0} = \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l C_k^l \varepsilon^l \gamma^{k-l} \Big|_{\mu=0} =$$

$$= \varepsilon^k \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - 1 \right)^k \Big|_{\mu=0} = (-2\varepsilon)^k (-1)^{n-k} k(n-1)! C_n^k$$

находим n -й член искомого ряда Тейлора для нормального напряжения

$$(2.2) \quad \frac{(-1)^n \mu^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(2\varepsilon)^k}{(k-1)!} C_n^k \frac{\partial^k \sigma^L}{\partial \varepsilon^k} (\mu = 0)$$

Так как параметр ε не зависит от p , то достаточно найти оригинал для свободного члена, а все остальные оригиналы, соответствующие $n \geq 1$, будут получаться из него путем дифференцирования по ε , сдвига по времени на nH / c_2 в получившемся выражении и подстановки в (2.2). С помощью формулы обращения из [6] получаем нормальное напряжение как функцию времени и координаты

$$(2.3) \quad \frac{\sigma(y, t)}{Q} = \delta_0 \left(t - \frac{y}{c_1} \right) \left[\exp \left(- \frac{\varepsilon y}{2c_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon y}{2c_1} \int_{y/c_1}^t \frac{\exp(-\varepsilon \alpha / 2) I_1 \left(\sqrt{\alpha^2 - y^2 / c_1^2} \right) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - y^2 / c_1^2}} \right] -$$

$$- \frac{\varepsilon y}{2c_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \delta_0 \left(t - \frac{nH}{c_2} - \frac{y}{c_1} \right) \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(2\varepsilon)^{k-1}}{(k-1)!} \times$$

$$\times \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varepsilon^{k-1}} \left[\exp \left(- \frac{\varepsilon}{2} \left(t - \frac{nH}{c_2} \right) \right) I_0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t_n^2 - \frac{y^2}{c_1^2}} \right) \right]$$

где I_0, I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента.

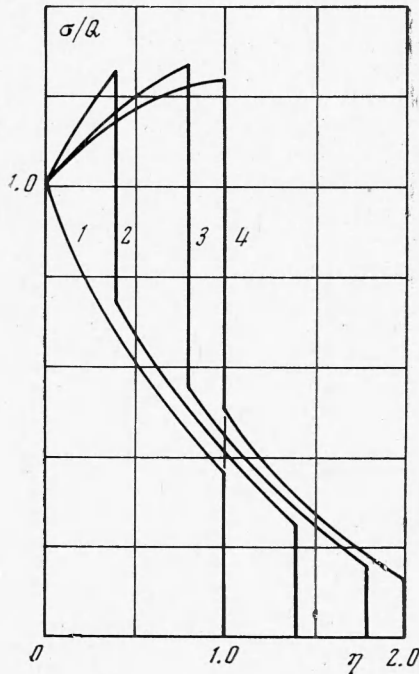
Аналогичные выкладки дают касательное напряжение на границе волокна

$$(2.4) \quad - \frac{\tau(y, t) c_2}{Q \beta^2 c_1} = \exp \left(- \frac{\varepsilon t}{2} \right) I_0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{c_1^2}} \right) \delta_0 \left(t - \frac{y}{c_1} \right) +$$

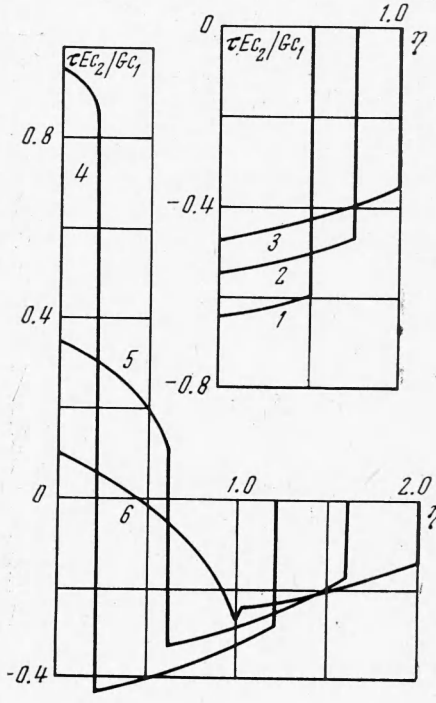
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \varepsilon} \delta_0 \left(t_n - \frac{y}{c_1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{(2\varepsilon)^k}{(k-1)!} C_n^k \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} \times$$

$$\times \left[\varepsilon \exp \left(- \frac{\varepsilon t_n}{2} \right) I_0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{t_n^2 - \frac{y^2}{c_1^2}} \right) \right]$$

При любом времени t в (2.3) и (2.4) содержится конечное число слагаемых, так как при достаточно больших n функции Хэвисайда обращаются в нуль. Физический смысл этого заключается в том, что волокно взаимодействует всегда с конечным числом других волокон, от которых к рассматриваемому моменту времени успевают прийти волна сдвига.



Фиг. 1



Фиг. 2

Формулы (2.3), (2.4) неудобны для расчетов на ЭВМ, так как содержат операции дифференцирования. Используя рекуррентные формулы для функций Бесселя, можно избавиться от дифференцирований. Приведем результат такого преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\eta, T)}{Q} &= \delta_0(T - \eta) [\exp(-\eta) + \eta \times \\ &\times \int_{\eta}^T \frac{\exp(-\alpha) I_1(\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}}] - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times \\ &\times \delta_0(T - n\kappa - \eta) \sum_{k=1}^n q_{k-1}(T - n\kappa, \eta) \\ &- \frac{\tau(\eta, T) c_2}{Q\beta^2 c_1} = q_0(\eta, T) \delta_0(T - \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \times \delta_0(T - n\kappa - \eta) \times \\ &\times \sum_{k=1}^n k \left[q_k(T - n\kappa, \eta) + \frac{2}{k} (n - k + 1) q_{k-1}(T - n\kappa, \eta) \right] \end{aligned}$$

где $\eta = \epsilon y / 2c_1 = \beta^2 c_1 y / c_2 h$ — безразмерная координата, $T = \epsilon t / 2 = t\beta^2 c_1^2 / c_2 h$ — безразмерное время, $\kappa = \epsilon H / 2c_2 = \beta^2 c_1^2 H / c_2^2 h$ — без

размерное время пробега волны сдвига между волокнами

$$\begin{aligned}
 q_0(T, \eta) &= \exp(-T) I_0(\sqrt{T^2 - \eta^2}) \\
 m_0(T, \eta) &= \exp(-T) I_1(\sqrt{T^2 - \eta^2}) \\
 q_k(T, \eta) &= \frac{2(n-k+1)}{k^2} (-Tq_{k-1} + \sqrt{T^2 - \eta^2} m_{k-1}) \\
 m_k(T, \eta) &= \frac{n-k+1}{k^2} (\sqrt{T^2 - \eta^2} q_{k-1} - Tm_{k-1}) + \\
 &+ \frac{(-2)^k}{k} C_n^k \sum_{l=0}^{k-1} \frac{m_l}{(-2)^l C_n^l}
 \end{aligned}$$

На фиг. 1, 2 изображено распределение напряжений по координате в различные моменты времени (расчет проведен при $k = 1$). Если бы инерция связующего не учитывалась, то оказалось бы, что $\tau = 0$, $\sigma = Q\delta_0(c_1 t - y)$. На фиг. 1 кривые 1-4 соответствуют $T = 1.0, 1.4, 1.8, 2.0$, а на фиг. 2 кривые 1-6 — $T = 0.5, 0.75, 1.0, 1.2, 1.6, 2.0$.

Продемонстрированный здесь качественный эффект — появление касательных напряжений на площадках, перпендикулярных фронту плоской волны, — связан с инерцией связующего, а не с тем, что нагрузка при $y = 0$ распределена неравномерно (сосредоточена только на волокнах). Если учесть нормальную жесткость связующего и нагрузить границу полуплоскости равномерно, то вследствие меньшей скорости продольных волн в связующем, чем в волокнах, через время, примерно равное времени пробега волны сдвига между волокнами опять придем к изученной задаче с той только разницей, что граничные условия будут иметь место на линии, сдвинутой внутрь полупространства на величину порядка $c_1 H / c_2$.

Поступила 26 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Outwater J. O. Jr.* The mechanics of plastics reinforcement in tension. *Mod. Plastics*, 1956, vol. 33, No. 7, p. 156.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
4. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.