массоотдачи (в случае каталитических стенок трубы), а также коэффициенты, связанные с переходом от средних по сечению величин, характеризующих поток, к величинам, определяемым по среднемассовым значениям температуры и состава.

Вопрос об определении коэффициентов, связанных с осреднением, для нереагирующих газов рассмотрен в [26]. Однако для химически реагирующих газов данных такого рода нет. Отсюда следует необходимость четкой формулировки одномерной постановки задачи для течения в канале газов с конечными скоростями химических реакций. Определение необходимых для этой цели коэффициентов, связанных с осреднением, возможно только на основании решения задачи в двумерной постановке с учетом переменности физических свойств газа.

Поступила в редакцию
18/IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Диссоциирующие газы как теплоносители и рабочие тела энергетических установок. Минск, «Наука и техника», 1970.
2. Б. С. Петухов. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1965.
3. Г. А. Тирский. ПМТФ, 1971, 1.
4. R. Rothenberg, I. M. Smith. AIChE J., 1966, **12**, 2.
5. Б. С. Петухов, В. Д. Виленский и др. ТВТ, 1973, **11**, 2.
6. R. Rothenberg, J. M. Smith. Canad. J. of Chem. Eng., 1966, **44**, 2.
7. И. С. Олоничев. ИФЖ, 1969, **16**, 1.
8. W. Shotte. Ind. Eng. Chem., 1958, **50**, 4, 683.
9. M. J. Callagan, D. M. Mason. Chem. Eng. Sci., 1964, **19**, 763.
10. Я. Б. Зельдович. ЖТФ, 1949, **19**, 10.
11. Л. А. Вулис. ФГВ, 1972, **8**, 1.
12. Y. C. Wu, A. F. Meills, V. E. Denny. Int. J. Heat Mass. Trans., 1971, **14**.
13. И. Б. Вихорев, Ю. В. Лапин. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, 1.
14. Б. С. Петухов, В. Н. Попов, ТВТ, 1963, **1**, 1.
15. Б. С. Петухов, В. Н. Попов. ТВТ, 1964, **2**, 4.
16. В. Н. Попов, Б. Е. Харин. ТВТ, 1968, **6**, 4.
17. J. P. Irving, J. M. Smith. AIChE J., 1961, **7**, 1.
18. R. R. Furgason, J. M. Smith. AIChE J., 1962, **8**, 5.
19. W. F. Krieve, D. M. Mason. AIChE J., 1961, **7**, 2.
20. M. J. Callagan, D. M. Mason. AIChE J., 1964, **10**, 1.
21. В. Н. Майданик. Канд. дисс., МЭИ, 1972.
22. Б. Е. Тверковкин и др. Изв. АН БССР, сер. ФЭН, 1971, 4.
23. Б. Е. Тверковкин и др. Изв. АН БССР, сер. ФЭН, 1971, 3.
24. Б. В. Нестеренко, Б. В. Тверковкин. Изв. АН БССР, сер. ФЭН, 1966, 2.
25. В. С. Белянин. Канд. дисс., ИВТАН, 1973.
26. И. П. Гинзбург. Прикладная гидрогазодинамика. Л., Изд-во ЛГУ, 1958.

УДК 532.547.4

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ В ОЦЕНКЕ МЕТОДОМ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В. А. Шваб
(Томск)

В работе методом размерного анализа рассматривается вопрос о влиянии тонко диспергированных примесей на диффузионные процессы, возникающие в пристеночных градиентных областях турбулентного потока. Имеющиеся в литературе сведения весьма ограничены. Наибольший интерес представляют исследования Чена, развитые в работах Хинце [1] и Соу [2]. Установленные результаты, несомненно, интересны качественной характеристикой диффузионных процессов в изотропной турбулентности, но не могут быть распространены на градиентные турбулентные потоки в связи с теми ограничениями, на основании которых они получены. В работе Абрамовича [3] использовано уравнение количества движения для оценки связи между пульсационными скоростями несущей среды без примесей и скоростями гетерогенной среды применительно к расчету турбулентной струи. В содержании этой работы отсутствует анализ энергетических возможностей турбулентности гетерогенного потока, а определение порядка пульсационных скоростей строится на корректировании пульсационных скоростей гомогенного потока.

Локальная турбулентность гетерогенной среды

В соответствии с общим представлением [1, 4] турбулентность рассматривается как суперпозиция пульсационных движений различных масштабов. Основное значение в турбулентном потоке имеют крупномасштабные пульсационные движения, генерируемые осредненным турбулентным движением. Главный масштаб турбулентных пульсаций эквивалентен размерам генерируемых вихрей в турбулентном потоке, а порядок величины пульсационной скорости соответствует локальному изменению осредненной скорости. Деление вихрей в градиентном потоке является причиной появления пульсационных движений меньших масштабов, причем диссипация энергии турбулентного движения завершается в области мелкомасштабного движения под влиянием вязких сил. Особенностью турбулентности в градиентных потоках является отсутствие изотропности в пульсационном движении. Так, например, пульсационная составляющая в направлении осредненного движения оказывается наибольшей. Однако подобный характер генерации турбулентности в любой локально выделенной области потока на достаточном удалении от стенки определяет аналогичное соотношение между составляющими скорости пульсационного движения. Это обстоятельство является основанием для построения общего представления о градиентной турбулентности в результате исследования в локально выделенной области. Причем, за определяющие масштабы турбулентности может быть выбрано пульсационное движение, например, в направлении одной из составляющих скорости этого движения. В общепринятом представлении мелкомасштабная турбулентность обладает признаками, близкими к изотропности, и ее свойства характеризуются как локальные свойства турбулентности.

Турбулентность градиентного потока гетерогенной среды с частицами примесей другого фазового состояния при условии, что их размеры меньше главного масштаба турбулентности, обладает особенностью, заключающейся в том, что пульсационное движение частиц примесей осуществляется в основном за счет энергии несущей среды.

Будем полагать, что время пульсационного движения имеет порядок отношения линейного масштаба к масштабу пульсационной скорости

$$t_1 \sim l_1/u_1, \tag{1}$$

$$\vartheta_1 \sim \lambda_1/w_1, \tag{2}$$

где t_1, l_1, u_1 и ϑ_1, λ_1, w_1 — соответственно время, линейный масштаб и масштаб среднего значения амплитуды скорости главного пульсационного движения для несущей среды и частиц примесей; $u_1 \sim \Delta U$, (ΔU —

локальное изменение осредненной скорости). Плотность гетерогенной среды:

$$\rho_\varepsilon=\varepsilon_f\rho_f+\varepsilon_p\rho_p,$$

причем

$$\varepsilon_f+\varepsilon_p=1,$$

где ρ_f, ε_f и ρ_p, ε_p — соответственно истинные плотности и объемные концентрации несущей среды и примесей.

Порядок удельной энергии турбулентности главного масштаба, приходящейся на единицу плотности гетерогенной смеси при однородном составе частиц примесей по их размерам

$$E_1\sim\frac{1}{\rho_\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon_f\rho_f u_1^2}{t_1}+\frac{\varepsilon_p\rho_p w_1^2}{\vartheta_1}\right).$$

В связи с тем, что частицы примесей движутся за счет их сопротивления при пульсационном движении несущей среды, время движения последней и частиц будет одного порядка. Учитывая (1) и (2), имеем

$$t_1\sim\vartheta_1\sim\frac{l_1}{u_1}\sim\frac{\lambda_1}{w_1}$$

и, следовательно,

$$E_1\sim\frac{u_1\rho_f\varepsilon_f}{l_1\rho_\varepsilon}\Psi, \tag{3}$$

где

$$\Psi_1=1+\frac{w_1^2\rho_p\varepsilon_p}{u_1^2\rho_f\varepsilon_f}. \tag{4}$$

В частном случае, для гомогенной среды ($\varepsilon_p=0$), в согласии с [4], имеем $E_0\sim u_0^3/l_0$. Для тонко диспергированных примесей, когда размеры частиц очень малы ($\delta\to 0$), отставание частиц по скорости исчезающе мало ($w_1=u_1$) и $E_1\sim u_1^3/l_1$, что соответствует энергии турбулентности гомогенной среды, но с плотностью ρ_ε. Интересно сопоставить энергию главного масштаба гетерогенной среды с той же энергией для гомогенного потока:

$$\frac{\rho_\varepsilon E_1}{\rho_f E_0}\sim\frac{u_1^3 l_0}{u_0^3 l_1}\varepsilon_f\Psi_1.$$

В частном случае, когда $\rho_\varepsilon E_1=\rho_f E_0$, что соответствует энергетической равноценности пульсационного движения, получим

$$u_0\sim u_1\left(\frac{l_0}{l_1}\varepsilon_f\Psi_1\right)^{1/3}.$$

Очевидно, что для тяжелых частиц ($\rho_p\gg\rho_f$) всегда $u_0>u_1$. Противоположный результат получается для гетерогенной смеси с содержанием более легких частиц ($\rho_f>\rho_p$), например, включение газовых пузырьков в жидкость. В этом случае, при одинаковом энергетическом уровне пульсационного движения, получим

$$u_0<u_1.$$

Энергетический спектр турбулентности формируется в результате распада вихрей в градиентном потоке при непрерывном уменьшении масштаба пульсационного движения. На диссипацию энергии для крупномасштабного пульсационного движения влияние вязкости невелико; главное значение оно имеет в области мелкомасштабного движения, когда $\mathrm{Re}_i=u_i l_i/\nu\sim 1$. Для гетерогенной среды существенное отличие заключается в том, что энергия пульсационного движения непрерывно затрачивается на транспортирование частиц примесей. В связи с этим при переходе энергии турбулентного движения в пульсационное меньшего масштаба реализуется только энергия турбулентного движения несущей среды, которая в пределах меньшего масштаба вновь возбуждает пульсационное движение примесей. Таким образом, энергия пульсационного движения i-го масштаба:

$$E_i \sim \frac{u_{i-1}^3 \rho_f \varepsilon_f}{l_{i-1} \rho_\varepsilon} \sim \frac{u_i^3 \rho_f \varepsilon_f}{l_i \rho_\varepsilon} \left(1 + \frac{w_i^2 \rho_p \varepsilon_p}{u_i^2 \rho_f \varepsilon_f}\right)$$

или для масштаба пульсационного движения

$$u_i \sim u_{i-1} \left(\frac{l_i}{l_{i-1}}\right)^{1/3} \Psi_i^{-1/3}, \qquad (5)$$

где

$$\Psi_i = 1 + \frac{w_i^2 \rho_p \varepsilon_p}{u_i^2 \rho_f \varepsilon_f}. \qquad (6)$$

Из полученной зависимости видно, что для гомогенного потока при $\varepsilon_p = 0$ $u_i \sim u_{i-1} (l_i/l_{i-1})^{1/3}$. Из сопоставления с (5) следует, что для гетерогенной среды имеет место постоянное подавление пульсационного движения несущей среды за счет затрат энергии на перемещение частиц примесей, которое прекращается только в предельных масштабах, когда l_i становится порядка размера частиц. Зависимость (5), учитывая последовательность изменений масштаба пульсационной скорости, может быть представлена через главные пульсационные масштабы

$$u_n \sim u_1 (l_n/l_1)^{1/3} \left(\prod_{i=2}^{n} \Psi_i\right)^{-1/3}, \qquad (7)$$

где

$$i = 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1),\ n.$$

Выясним порядок масштабов, в пределах которых доминирует вязкая диссипация энергии и которые завершают энергетический спектр по частотам. Условием, определяющим существенное влияние вязкости, может служить число $\mathrm{Re}_m = u_m l_m / \nu$, устанавливающее одинаковый порядок в соотношении вязких и инерционных сил. На основании соотношения (7), получим

$$\mathrm{Re}_m \sim \mathrm{Re}_1 \left(\frac{l_m}{l_1}\right)^{4/3} \left(\prod_{i=1}^{m} \Psi_i\right)^{-1/3} \sim 1,$$

где $\mathrm{Re}_1 = u_1 l_1/\nu$. Отсюда определяется предельное значение линейного масштаба в области вязкой диссипации энергии

$$l_m \sim l_1 \left(\prod_{i=2}^{m} \Psi_i\right)^{1/4} \mathrm{Re}_1^{-3/4}. \qquad (8)$$

Оно оказывается более высоким, чем для гомогенной среды ($\varepsilon_p = 0$), для которой $l_{m_0} \sim l_{10} \mathrm{Re}_{10}^{-3/4}$. Порядок предельного масштаба пульсационной скорости устанавливается из (7) после замены отношения l_m/l_1 из (8):

$$u_m \sim u_1 \mathrm{Re}^{-1/4} \left(\prod_{i=2}^{m} \Psi_i\right)^{-1/4}.$$

u_m оказывается меньше значения u_{m_0} для гомогенной среды, так как $u_{m_0} \sim u_1 \mathrm{Re}_1^{-1/4}$. Значения частот высокочастотного конца энергетического спектра находятся из выражения:

$$\omega_m \sim u_m/l_m \sim \omega_1 \mathrm{Re}_1^{1/2} \left(\prod_{i=2}^{m} \Psi_i \right)^{-1/2},$$

где $\omega_1 = u_1/l_1$. Таким образом, ω_m соответствует более низким значениям частот, чем для гомогенного потока, для которого

$$\omega_{m_0} \sim \omega_1 \mathrm{Re}_1^{1/2}.$$

Полученные результаты дают общее представление об изменениях в энергетическом спектре турбулентности в связи с присутствием частиц примесей. Так, при $\rho_p > \rho_f$ основной особенностью является подавляющее влияние примесей на пульсационный режим турбулентного движения несущей среды в связи с затратами энергии, необходимыми на турбулентное движение частиц примесей. Это влияние, в основном динамического характера, сохраняется на всех частотах энергетического спектра, для которых линейный масштаб пульсационного движения больше размера частиц. В области наибольших частот энергетические потери имеют преимущественно диссипативный характер. Интервал частот, охватывающий энергетический спектр турбулентности гетерогенной среды в сравнении с гомогенной средой, сокращается в результате затрат энергии на движение примесей, причем увеличение концентрации примесей усиливает это явление, а при некотором предельном значении последней может привести к так называемому «вымерзанию» турбулентности.

В общей схеме энергетического спектра турбулентности гетерогенной среды необходимо определение связи между масштабными параметрами несущей среды и частиц примесей. В общем случае эта связь определяется из условия нестационарного процесса перемещения частиц при пульсационном движении несущей среды под действием сил аэродинамического сопротивления. Для определения порядка соответствия между пульсационными составляющими задача может быть сформулирована в упрощенной постановке.

Рассмотрим движение частицы при условии $\rho_p \gg \rho_f$ и $\delta < l$, где δ — диаметр, допуская при этом ламинарный характер обтекания. Скорость несущей среды полагаем постоянной величиной и равной масштабу пульсационной скорости, масштаб времени равен $t_0 = l/u$. В этом случае сопротивление частицы подчиняется закону Стокса. Кроме того, при $\rho_p \gg \rho_f$ можно пренебречь влиянием ускорения присоединенных масс и силой, возникающей от вращения частицы. При этих условиях движение сферической частицы подчиняется уравнению

$$\frac{dw(t)}{dt} = a(u - w(t)), \tag{9}$$

где $a = 18\nu\rho_f/\delta^2\rho_p$, $u = \mathrm{const}$. Начальное значение скорости частицы, имеющей произвольное относительное направление движения в начальный момент времени, с достаточной достоверностью можно принять равным нулю: $w = 0$ при $t = 0$.

Интегрирование уравнения (9) приводит к зависимости

$$w = u[1 - \exp(-at)].$$

Среднее значение скорости w в пределах времени t_0:

$$\overline{w} = \frac{u}{t_0} \int_0^{t_0} [1 - \exp(-at)\, dt,$$

откуда

$$\frac{\overline{w}}{u} = 1 - \frac{1}{at_0}[1 - \exp(-at_0)].$$

Путь перемещения частицы за время t_0 будет $\lambda = \overline{w} t_0$ и, следовательно, отношение между параметрами некоторого i-го пульсационного масштаба запишем в виде:

$$\frac{\lambda_i}{l_i} \sim \frac{w_i}{u_i} \sim \left[1 - \frac{1}{at_i}(1 - \exp(-at_i))\right]. \qquad (10)$$

Полученный результат позволяет функцию Ψ_i по (6) представить соотношением

$$\Psi_i \sim \left(1 + \frac{w_i^2}{u_i^2} \frac{\rho_p \varepsilon_p}{\rho_f \varepsilon_f}\right) \sim \left\{1 + \left[1 - \frac{1}{at_i}(1 - \exp(-at_i))\right]^2 \frac{\rho_p \varepsilon_p}{\rho_f \varepsilon_f}\right\},$$

где

$$t_i = l_i / u_i.$$

В случае полидисперсного состава частиц примесей, если известна функция распределения частиц по размерам $f(\delta)$, нормированная условием

$$\int_0^\infty f(\delta)\, d(\delta) = 1,$$

значение функции Ψ_{i*} может быть представлено следующим образом:

$$\Psi_{i*} = 1 + \frac{(1 - \varepsilon_f)\rho_p}{\varepsilon_f \rho_f} \int_0^\infty \left\{1 - \frac{u_1}{a(\delta) l_1}\left[1 - \exp\left(-a(\delta)\frac{l_1}{u_1}\right)\right]\right\}^2 f(\delta)\, d\delta. \qquad (11)$$

Турбулентная диффузия в гетерогенной среде

Перейдем к характеристике диффузионных процессов, возникающих в турбулентном ядре установившегося «градиентного» потока гетерогенной среды постоянной плотности. Для простоты предполагается, что распределение концентрации не зависит от координат. Это предположение, естественно, исключает влияние гравитационных, а также подъемных сил, возникающих при относительном движении вращающихся частиц. В этой постановке остановимся на определении турбулентных напряжений, возникающих в потоке.

Следует, прежде всего, отметить ведущую роль в турбулентном переносе массы главных масштабов пульсационного движения, генерация которых за счет осредненного движения обеспечивает необходимый уровень «турбулентной вязкости». По порядку величины кинематический коэффициент турбулентной вязкости в частном случае гомогенной среды определяется в основном главными масштабами пульсационного движения u_0 и l_0. Единственной величиной, составленной из этих параметров с размерностью кинематической вязкости, будет

$$\nu_0 \sim u_0 l_0.$$

Тогда, касательное турбулентное напряжение τ, учитывая (3), определяется порядковыми соотношениями

$$\tau \sim \rho_f \nu_f \frac{\Delta U}{l_0} \sim \rho_f u_0^2 \sim \rho_f \frac{E_0 l_0}{u_0},$$

где $u_0 \sim \Delta U$, а $\Delta U / l_0 \sim dU/dy$ и, следовательно,

$$\frac{\tau}{\rho_f} \sim l_0^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2.$$

После включения коэффициента пропорциональности в величину линейного масштаба l, получим известную формулу, установленную Прандтлем

$$\frac{\tau}{\rho_f} = l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dU}{dy}. \qquad (12)$$

Для турбулентного потока гетерогенной среды при указанных ограничениях и монодисперсном составе примесей порядковые соотношения, определяющие касательное напряжение, могут быть представлены аналогичным образом [5]:

$$\tau_\varepsilon \sim \rho_\varepsilon \nu_\varepsilon \frac{\Delta U}{l_1} \sim \varepsilon_f \rho_f u_1^2 \Psi_1 \sim \rho_\varepsilon \frac{E_1 l_1}{u_1}.$$

Полагая $u_1/l_1 \sim dU/dy$ и раскрывая значение Ψ_1 по (4), имеем

$$\tau_\varepsilon \sim \varepsilon_f \rho_f \left(1 + \frac{w_1^2 \varepsilon_p \rho_p}{u_1^2 \varepsilon_f \rho_f}\right) l_1^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 \qquad (13)$$

или, включая значение коэффициента пропорциональности в масштаб l_1,

$$\tau_\varepsilon = \varepsilon_f \rho_f \left(1 + \frac{w_1^2 \varepsilon_p \rho_p}{u_1^2 \varepsilon_f \rho_f}\right) l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2. \qquad (14)$$

Отметим некоторые частые случаи полученной зависимости. При $\varepsilon_p = 0$, т. е. для гомогенной среды, зависимость (14) переходит в формулу Прандтля (12). В случае тонкодисперсных примесей ($\delta \to 0$), когда частицы движутся без отставания от несущей среды $w_1 = u_1$, зависимость (2.7) преобразуется к форме

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = l^2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2,$$

что соответствует также формуле Прандтля, но для среды с плотностью $\rho_\varepsilon = \rho_f \varepsilon_f + \rho_p \varepsilon_p$. Во всех прочих случаях касательное напряжение зависит от отношения масштабов w_1/u_1, которое в соответствии с (10) равно:

$$\frac{w_1}{u_1} \sim 1 - \frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\left[1 - \exp\left(-a \Big/ \frac{dU}{dy}\right)\right].$$

Следовательно, формула (14) может быть записана так:

$$\frac{\tau}{\rho_\varepsilon} = \left\{1 - \frac{\rho_p \varepsilon_p}{\rho_\varepsilon}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{a}\frac{dU}{dy} + \frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\exp\left(-a \Big/ \frac{dU}{dy}\right)\right)^2\right]\right\} l_2 \left(\frac{dU}{dy}\right)^2. \qquad (15)$$

Полученные результаты позволяют определить коэффициенты турбулентной диффузии каждой из компонент смеси. Основываясь на физическом представлении о том, что кинематический коэффициент вязкости эквивалентен понятию турбулентного переноса массы, следует считать его одного порядка с коэффициентом диффузии. Таким образом, $\nu_f \sim D_f$ и $\nu_p \sim D_p$. Из зависимости (13) видно, что

$$D_f \sim \nu_f \sim \varepsilon_f l_1^2 \frac{dU}{dy},$$

$$D_p \sim \nu_p \sim \varepsilon_p \frac{w_1^2}{u_1^2} l_1^2 \frac{dU}{dy}.$$

Поток массы примесей, например, при наличии изменения концентрации в направлении нормали к осредненному движению, будет

$$M_p = -\rho_p D_p \frac{d\varepsilon_p}{dy} = -\rho_p \varepsilon_p \frac{w_1^2}{u_1^2} l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{d\varepsilon_p}{dy}$$

или, учитывая (10),

$$M_p = -\rho_p \varepsilon_p \left[1 - \exp\left(-a\Big/\frac{dU}{dy}\right)\right]^2 l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{d\varepsilon_p}{dy}.$$

Не представляет труда обобщение этой зависимости на полидисперсный состав примесей по (11).

Перенос тепла в турбулентном потоке гетерогенной среды рассматривается в условиях установившегося осредненного течения при равновесных условиях по температурам, когда их значения для несущей среды и частиц примесей совпадают. В случае тонкодисперсных примесей можно предполагать, что в конце пульсационного перемещения массы имеет место тепловая ассимиляция как несущей среды, так и частиц примесей. Для более крупных частиц возможна неполная ассимиляция, приводящая к уменьшению переноса тепла. Коэффициенты турбулентной теплопроводности при полной тепловой ассимиляции полностью определяются условиями переноса массы и могут быть представлены соотношениями

$$c_{pf}\rho_f \nu_f \sim \Lambda_f, \tag{16}$$

$$c_{pp}\rho_p \nu_p \sim \Lambda_p, \tag{17}$$

что эквивалентно записи

$$\sigma \sim \frac{c_{pf}\rho_f \nu_f}{\Lambda_f} \sim \frac{c_{pp}\rho_p \nu_p}{\Lambda_p} \sim 1,$$

где σ — число Прандтля, составленное для турбулентного потока. Тепловой поток, определяющийся турбулентным переносом при принятых условиях, находится из формулы:

$$q = -(c_{pf}\rho_f \nu_f + c_{pp}\rho_p \nu_p)\frac{dT}{dy}.$$

Учитывая (16) и (17), находим

$$q = -c_{pf}\rho_f \varepsilon_f \left(1 + \frac{c_{pp}\rho_p \varepsilon_p w_1^2}{c_{pf}\rho_f \varepsilon_f u_1^2}\right) l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dT}{dy}$$

или, после замены w_1/u_1 по (10),

$$q = -c_{pf}\rho_f \varepsilon_f \left\{1 + \frac{c_{pp}\rho_p \varepsilon_p}{c_{pf}\rho_f \varepsilon_f}\left[1 - \frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\left(1 - \exp \times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(-a\Big/\frac{dU}{dy}\right)\right)\right]^2\right\} l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dT}{dy}.$$

В частном случае при $\sigma \to 0$ и, следовательно, $w_1 = u_1$

$$q = c_{p\varepsilon}\rho_\varepsilon l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dT}{dy},$$

где

$$c_{p\varepsilon} = \frac{c_{pf}\rho_f \varepsilon_f + c_{pp}\rho_p \varepsilon_p}{\rho_f \varepsilon_f + \rho_p \varepsilon_p}.$$

При $\varepsilon_p = 0$ имеем известную зависимость Прандтля

$$q = -c_{pf}\rho_f l^2 \left|\frac{dU}{dy}\right| \frac{dT}{dy}.$$

Распределение скоростей в пристеночной области установившегося турбулентного потока гетерогенной среды

Исследование поля осредненных скоростей в пристеночной области турбулентного потока выполним в постановке, принятой Прандтлем, полагая касательное напряжение величиной постоянной и равной значению τ_0 на стенке. Если принять зависимость для $l=\varkappa y$, то по (15) находим

$$\frac{\tau_0}{\rho_\varepsilon \varkappa^2 y^2}=\left\{1-\frac{\varepsilon_f \rho_f}{\rho_\varepsilon}\left[1-\left(1-\frac{1}{a}\frac{dU}{dy}+\frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\exp\left(-a\Big/\frac{dU}{dy}\right)\right)^2\right]\right\}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2.$$

Интегрирование этого уравнения выполняется при аппроксимации $\exp(-z)=1-\alpha z+\beta z^2$ при $0<z<2{,}5$ и $\exp(-z)=0$ при $z>2{,}5$, где $\alpha=0{,}79034$, $\beta=0{,}15822$, $z=a\Big/\frac{dU}{dy}$.

Используя первую аппроксимацию, получим

$$\frac{\tau_0}{\rho_\varepsilon \varkappa^2 y^2}=\left\{1-\frac{\varepsilon_p \rho_p}{\rho_\varepsilon}\left[1-\left(1-\frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\left(\frac{\alpha a}{\frac{dU}{dy}}-\frac{\beta a^2}{\left(\frac{dU}{dy}\right)^2}\right)\right)^2\right]\right\}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2,$$

что приводит к квадратному уравнению относительно производной

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\varphi_1\frac{dU}{dy}-\frac{\varphi_2}{y^2}+\varphi_3=0,$$

где

$$\varphi_1=\frac{2\gamma a\beta(1-\alpha)}{1+\gamma(1-\alpha)^2};\quad \varphi_2=\frac{v_*^2}{\varkappa^2(1-\gamma)[1+\gamma(1-\alpha)^2]};$$

$$\varphi_3=\frac{\gamma a^2\beta^2}{1+\gamma(1-\alpha)^2};\quad \gamma=\frac{\varepsilon_p\rho_p}{\varepsilon_f\rho_f};\quad v_*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_\varepsilon}}.$$

Из этого уравнения определяется значение производной

$$\frac{dU}{dy}=-\frac{\varphi_1}{2}+\frac{1}{y}\sqrt{\varphi_2-\left[\varphi_3-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2\right]y^2}.$$

Интегрирование приводит к зависимости

$$\frac{U}{\sqrt{\varphi_2}}=-\frac{\varphi_1 y}{2\sqrt{\varphi_2}}+\sqrt{1-Ay^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-Ay^2}}{y\sqrt{A}}+C,$$

где

$$A=\frac{1}{\varphi_2}\left[\varphi_3-\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2\right].$$

Полученное выражение справедливо при $a\Big/\frac{dU}{dy}<2{,}5$, т. е. отвечает области, граничащей с ламинарным подслоем, где значения производной dU/dy наибольшие. Постоянная C определяется из условия с ламинарным подслоем: при $y=y_1$

$$U=U_1.$$

Окончательно получим

$$\frac{U-U_1}{v_*}=\frac{\sqrt{\varphi_2}}{v_*}\left[-\frac{\varphi_1}{2\sqrt{\varphi_2}}(y-y_1)-\sqrt{1-Ay_1^2}+\sqrt{1-Ay^2}+\right.$$
$$\left.+\ln\frac{\left(1+\sqrt{1-Ay_1^2}\right)y}{\left(1+\sqrt{1-Ay^2}\right)y_1}\right].$$

Эта зависимость установлена для интервала $y_2\geqslant y\geqslant y_1$, где верхний предел координаты y_2 находится из ограничивающего условия $a\Big/\frac{dU}{dy}<2{,}5$.

Учитывая значение dU/dy, имеем

$$y_2 = \sqrt{\frac{6{,}25\,\varphi_2}{(a+1{,}25\,\varphi_1)^2 + 6{,}25\,A\varphi_2}}. \tag{18}$$

Для области $y > y_2$ используется вторая аппроксимация. Тогда

$$\frac{\tau_0}{\rho_\varepsilon \varkappa^2 y^2} = \left\{1 - \frac{\varepsilon_p \rho_p}{\rho_\varepsilon}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{a}\frac{dU}{dy}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2,$$

где изменение ограничено пределами $0{,}4 > \frac{1}{a}\frac{dU}{dy} > 0$. Полагая в первом приближении $\frac{dU}{dy}\Big| a \sim v_* \Big| a\varkappa y$, получим

$$\frac{v_*^2}{\varkappa^2 y^2} = \left\{1 - \frac{\varepsilon_p \rho_p}{\rho_\varepsilon}\left[\frac{2v_*}{a\varkappa y} - \frac{v_*^2}{(a^2\varkappa y)^2}\right]\right\}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

и, следовательно,

$$\frac{U - U_2}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\int_{y_2}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - k_1 y + k_2}}$$

или

$$\frac{U - U_2}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{2y - k_1 + 2\sqrt{y^2 - k_1 y + k_2}}{2y_2 - k_1 + 2\sqrt{y_2^2 - k_1 y_2 + k_2}},$$

где

$$k_1 = \frac{2v_* \varepsilon_p \rho_p}{a\varkappa\rho_\varepsilon}; \quad k_2 = \frac{v_*^2\, \varepsilon_p\, \rho_p}{a^2\varkappa^2\rho_\varepsilon},$$

а y определяется соотношением (18).

Полученные зависимости для случая, когда размеры частиц малы и обеспечивают за счет высокого сопротивления движение без отставания от несущей среды, переходят в известный логарифмический закон распределения скоростей для турбулентного потока гомогенной среды при значениях концентрации примесей, существенно меньших предельных значений, вызывающих «вымерзание» турбулентности. То же имеет место при малых содержаниях примесей, но независимо от размеров частиц. В этих случаях значение константы турбулентного потока $\varkappa$ совпадает со значением для потока гомогенной среды. Во всех остальных случаях можно предполагать некоторое несущественное отклонение от этого значения.

В заключение отметим, что применение метода размерного анализа к турбулентности гетерогенной среды обеспечило возможность выявить качественные особенности энергетического спектра турбулентности и, в том числе, подавляющее влияние тяжелых примесей. На основе крупномасштабного пульсационного движения установлены зависимости, определяющие турбулентную вязкость, коэффициенты диффузии и теплопроводности для пристеночной области градиентных потоков в форме, аналогичной полуэмпирической теории турбулентности гомогенной среды. Полученные результаты позволили также установить распределение осредненных скоростей в пристеночной области турбулентного потока гетерогенной среды.

Поступила в редакцию
3/V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. И. О. Хинце. Турбулентность. М., ФМЛ, 1963.
2. С. Соу. Гидродинамика многофазных систем. М., «МИР», 1971.
3. Г. Н. Абрамович. Докл. АН СССР, 1971, **190**, 5.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
5. В. А. Шваб. Матер. третьей конф. по математике и механике. Т. 2. Томск, Изд-во Томского ун-та, 1973.