

О. Д. Пряхина, В. В. Сатарова, О. М. Тукодова

## РАСЧЕТ ДИНАМИКИ ГИБКОЙ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ НА ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается динамическая контактная задача о взаимодействии деформируемой круглой плиты радиуса  $b$  с упругой или вязкоупругой полуограниченной средой типа слоя, пакета слоев, слоистого полупространства. На плиту действует осесимметричная поперечная внешняя нагрузка вида  $p_0(r) \exp(-i\omega t)$  ( $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время). Контакт плиты с основанием осуществляется без трения. Рассматривается широкий класс условий закрепления краев плиты: а) скользящая заделка, б) шарнирно опертый край, в) защемленный край, г) свободный край.

Для решения осесимметричной задачи применен подход, ранее развитый для решения аналогичных задач в плоской постановке [1]; он оказался эффективным и для осесимметричных задач. Метод основан на использовании собственных форм колебаний упругого тела конечных размеров и метода фиктивного поглощения, применяемого для решения возникающих в динамических задачах теории упругости интегральных уравнений с сильно осциллирующими ядрами.

На основе построенных решений созданы алгоритмы и программы, позволяющие проводить анализ основных характеристик процесса взаимодействия круглых плит с основанием: прогибов плиты и напряжений в области контакта плиты с основанием. Численный анализ проведен для среды, представляющей собой упругий или вязкоупругий слой, жестко сцепленный с недеформируемым основанием. В то же время метод позволяет проводить анализ для более сложных сред.

**1. Основные уравнения. Построение решения.** Основное уравнение колебаний круглой плиты, напряженно-деформированное состояние которой описывается технической теорией изгиба, в амплитудных безразмерных параметрах (множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опущен) имеет вид

$$(1.1) \quad D_0(\partial^2/\partial r^2 + 1/r \cdot \partial/\partial r)^2 w(r) - RH\Omega^2 w(r) = p(r) - q(r).$$

Здесь  $D_0 = H^3/[12M(1-\nu_0^2)]$ ;  $H = h_0/h$ ;  $R = \rho_0/\rho$ ;  $M = \mu/E_0$ ;  $\Omega^2 = \exp(-i\gamma)\rho\omega^2 h^2/\mu$ ;  $a = b/h$ ;  $\mu = E/(2(1+\nu))$  — коэффициент Ляме для среды;  $E_0$ ,  $\nu_0$ ,  $h_0$ ,  $\rho_0$  — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, толщина и плотность материала плиты;  $E$ ,  $\nu$ ,  $h$ ,  $\rho$  — аналогичные характеристики среды;  $\gamma$  — параметр вязкости среды (коэффициент потерь на внутреннее трение в материале по Сорокину [2]);  $\Omega$  — безразмерная частота колебаний;  $w(r)$ ,  $a$  — прогиб и радиус плиты, отнесенные к характерному геометрическому параметру среды  $h$  (например, толщине слоя);  $p(r) = p_0(r)$ ,  $q(r)$  — заданная нагрузка и реакция основания или контактные напряжения, отнесенные к  $\mu$ . Эта функция определяется при решении стандартной динамической контактной задачи о действии абсолютно жесткого круглого штампа на среду:

$$(1.2) \quad \int_0^a k(r, \xi) q(\xi) \xi d\xi = f(r), \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$k(r, \xi) = \int_{\sigma} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \xi) \alpha d\alpha$$

( $f(r)$  — функция, описывающая форму подошвы штампа,  $J_0(r)$  — функция Бесселя нулевого порядка).

Функция  $K(\alpha)$  определяется типом среды, контур  $\sigma$  выбирается в соответствии с принципом излучения [3] и совпадает с вещественной полу-

осью  $(0, \infty)$  для среды, обладающей внутренним трением. Для упругой среды контур  $\sigma$  обходит вещественные нули  $z_l$ , полюсы  $p_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N_0$ ) функции  $K(\alpha)$  снизу, остальная его часть совпадает с вещественной полuosью. К уравнениям (1.1), (1.2) необходимо добавить условие равенства смещений в области контакта плиты и основания

$$w(r) = f(r), 0 \leq r \leq a, z = 0$$

и граничные условия на краях плиты  $r = a, z = 0$  в зависимости от типа заделки:

а) скользящая заделка

$$\begin{aligned} \partial w / \partial r &= 0 \text{ при } r = a, \\ Q(r) &= \partial^3 w / \partial r^3 + 1/r \cdot \partial^2 w / \partial r^2 - 1/r^2 \cdot \partial w / \partial r = 0 \text{ при } r = a; \end{aligned}$$

б) шарнирно опертый край

$$w(a) = 0, M(r) = \partial^2 w / \partial r^2 + \nu_0 / r \cdot \partial w / \partial r = 0, r = a;$$

в) защемленный край

$$w(r) = \partial w / \partial r = 0, r = a;$$

г) свободный край

$$M(a) = Q(a) = 0$$

( $M(r), Q(r)$  — момент и приведенная поперечная сила).

Решение (1.1), (1.2) ищем в виде

$$(1.3) \quad w(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \varphi_m(r), \varphi_m(r) = [J_0(\theta_m r) - j_m I_0(\theta_m r)],$$

где  $j_m$  выбираем следующим образом:

а)  $j_m = 0$ ;

б, в)  $j_m = J_0(\theta_m a) / I_0(\theta_m a)$ ;

г)  $j_m = J_1(\theta_m a) / I_1(\theta_m a), \varphi_1 = 1$

( $I_0(z), I_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка).

Неизвестные  $\theta_m$  для задач а — г определяются из трансцендентных уравнений, вид которых определяется граничными условиями на краях плиты  $r = a$ :

а)  $J_1(\theta_m a) = 0$ ;

б)  $L(\theta_m a) = 2\theta_m a(1 - \nu_0)^{-1} I_0(\theta_m a) J_0(\theta_m a)$ ;

в)  $L(\theta_m a) = 0$ ;

г)  $L(\theta_m a) = 2(1 - \nu_0) I_1(\theta_m a) J_1(\theta_m a), L(z) = J_1(z) I_0(z) + I_1(z) J_0(z)$ .

В [4] методом фиктивного поглощения построено решение  $t(r, \eta)$  интегрального уравнения (1.2) для правой части  $w(r) = J_0(\eta r)$ . Используя результаты этой работы для смещений  $w(r)$  типа (1.3), контактные напряжения определим соотношениями

$$(1.4) \quad q(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m q_m(r), q_m(r) = [t(r, \theta_m) - j_m t(r, i\theta_m)].$$

А. Вдали от края плиты функция  $t(r, \eta)$  имеет вид

$$\begin{aligned} t(r, \eta) &= J_0(\eta r) K^{-1}(\eta) + \pi i a c^{-1} \left\{ \sqrt{\eta^2 + B^2} \sum_{l=1}^N z_l \operatorname{Res} H^{-1}(z_l) \times \right. \\ &\quad \times J_0(z_l r) F_1(\eta, z_l) - \pi i \sum_{k=1}^N c_k \sum_{j=1}^N p_j \operatorname{Res} H(p_j) \times \\ &\quad \left. \times J_0(p_j r_k) \sum_{l=1}^N z_l \operatorname{Res} H^{-1}(z_l) J_0(z_l r) F_2(p_j, z_l) \right\}. \end{aligned}$$

Неизвестные  $c_k$  определяются из уравнений

$$\pi i \sum_{k=1}^N c_k \sum_{j=1}^N p_j \operatorname{Res} H(p_j) J_0(p_j r_k) F_1(z_l, p_j) = \sqrt{\eta^2 + B^2} F_0(z_l, \eta), \quad l=1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_0(\alpha, \eta) &= \{a [J_1^2(\alpha a) + J_0^2(\alpha a)]/2, \quad \eta = \alpha, \\ & \quad [i\eta J_0(\alpha a) J_1(\eta a) - \alpha J_1(\alpha a) J_0(\eta a)]/(\eta^2 - \alpha^2); \\ F_1(\alpha, \eta) &= [\eta J_0(\alpha a) H_1^{(1)}(\eta a) - \alpha J_1(\alpha a) H_0^{(1)}(\eta a)]/(\eta^2 - \alpha^2); \\ F_2(\alpha, \eta) &= [\alpha H_1^{(1)}(\alpha a) H_0^{(1)}(\eta a) - \eta H_0^{(1)}(\alpha a) H_1^{(1)}(\eta a)]/(\alpha^2 - \eta^2); \\ H(\alpha) &= \sqrt{\alpha^2 + B^2} K(\alpha)/c; \quad c = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} |\alpha| K(\alpha); \end{aligned}$$

$H_n^{(1)}$  — функции Хаикеля первого рода;  $r_k$  — точки, делящие интервал  $(0, a)$  на равные отрезки;  $B$  — параметр аппроксимации, который выбирается в соответствии с методом фиктивного поглощения ( $B \gg 1$ );  $z_l, p_l$  — нули и полюсы  $K(\alpha)$  такие, что  $\operatorname{Im} z_l, p_l \geq 0$  для упругой среды и  $\operatorname{Im} z_l, p_l > 0$  для вязкоупругой.

Б. Вблизи края плиты функция  $t(r, \eta)$  примет вид

$$\begin{aligned} t(r, \eta) &= c^{-1} \left[ C(\eta) / \sqrt{a^2 - r^2} + \pi C(\eta) F_3(r) - \right. \\ & \quad \left. - \pi i/4 \sum_{k=1}^N c_k (a^2 F_4(r_k) / \sqrt{a^2 - r^2} + \pi a^2 F_3(r) F_4(r_k) + 4F_5(r, r_k)) \right], \end{aligned}$$

где  $C(\eta) = a^2 \eta [J_1^2(\eta a) + J_0^2(\eta a)] \sqrt{\eta^2 + B^2} (2 \sin(a\eta))^{-1}$ ;

$$F_3(r) = \sum_{l=1}^N \operatorname{Res} H^{-1}(z_l) \exp(iz_l a) J_0(z_l r);$$

$$\begin{aligned} F_4(r_k) &= \sum_{j=1}^N 2p_j^2 \operatorname{Res} H(p_j) J_0(p_j r_k) [J_1(p_j a) H_1^{(1)}(p_j a) + \\ & \quad + J_0(p_j a) H_0^{(1)}(p_j a)] / \sin(p_j a); \end{aligned}$$

$$F_5(r, r_k) = \sum_{l=1}^N z_l \operatorname{Res} H^{-1}(z_l) \begin{cases} H_0^{(1)}(z_l r) J_0(z_l r_k), & r \geq r_k, \\ H_0^{(1)}(z_l r_k) J_0(z_l r), & r \leq r_k. \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты  $c_k$  определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^N c_k [z_l J_0(z_l r_k) + \pi i a^2 \sin(z_l a) F_4(r_k)/4] = C(\eta) \sin(z_l a), \quad l=1, 2, \dots, N.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (1.1) выражения для  $w(r)$  и  $q(r)$  в виде (1.3), (1.4), умножая на  $\varphi_n(r)$  и интегрируя по  $r$  от 0 до  $a$ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_m$ :

$$(1.5) \quad \alpha_n A_n + \sum_{m=1}^{\infty} s_{nm} A_m = p_n, \quad n=1, 2, \dots, \infty.$$

Здесь  $s_{mn} = \int_0^a q_m(r) \varphi_n(r) r dr$ ;  $p_n = \int_0^a p(r) \varphi_n(r) r dr$ ;  $\alpha_n = (D_0 \theta_n^4 - R H \Omega^2) \Delta_n$ ;

$$\Delta_n = \int_0^a \varphi_n^2(r) r dr.$$

Элементы матрицы  $S = \|s_{mn}\|$ , функции  $\Delta_n$  вычисляются непосредственным интегрированием с учетом (1.4) и являются аналитическими функциями от частоты  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} s_{mn} &= T(\theta_n, \theta_m) - j_m T(\theta_n, i\theta_m) - j_n T(i\theta_n, \theta_m) + \\ & \quad + j_n j_m T(i\theta_n, i\theta_m). \end{aligned}$$

Равнодействующая контактных давлений или реакция основания определяется формулой

$$(1.6) \quad Q = \int_0^a q(r) r dr = \sum_{k=1}^{\infty} A_k [T(0, \theta_k) - j_k T(0, i\theta_k)].$$

Функция  $T(\alpha, \eta)$  есть преобразование Бесселя функции  $t(r, \eta)$  и имеет вид вдали от края

$$T(\alpha, \eta) = a \left\{ F_0(\alpha, \eta) \sqrt{\eta^2 + B^2} - \pi i \sum_{k=1}^N c_k \sum_{j=1}^N p_j \operatorname{Res} H(p_j) \times \right. \\ \left. \times J_0(p_j r_k) F_1(\alpha, p_j) \right\} / c/H(\alpha),$$

вблизи края плиты

$$T(\alpha, \eta) = \left\{ C(\eta) \sin(\alpha a) / \alpha - \sum_{k=1}^N c_k [J_0(\alpha r_k) + \right. \\ \left. + \pi i a^2 \sin(\alpha a) F_4(r_k) / 4 / \alpha] \right\} / c/H(\alpha).$$

Для построения приближенного решения  $w(r)$  и  $q(r)$  достаточно взять в (1.3) — (1.5) всего несколько членов ряда, чтобы обеспечить заданную точность, поскольку коэффициенты  $A_m$  быстро стремятся к нулю с ростом параметра  $m$ .

**2. Численный анализ решения.** Численный анализ проводился для упругого и вязкоупругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, и двух видов нагрузки:  $p(r) = 1$  и  $p(r) = \delta(r)$  ( $\delta(r)$  — дельта-функция Дирака). Слой занимает область  $-\infty \leq x, y \leq \infty, 0 \leq z \leq h$ .

Изучено влияние условий закрепления плиты, типа нагружения, вязкости среды, жесткости и геометрических размеров плиты на распределение амплитуд прогибов  $w(r)$ , контактных давлений  $q(r)$  и суммарных усилий  $Q$  в области контакта в зависимости от приведенной частоты  $\Omega$ .

Для указанной среды функция  $K(\alpha)$  имеет вид, приведенный в [3, 4]. Для численной реализации задачи предварительно рассчитываются вещественные и комплексные нули, полюсы  $K(\alpha)$ , затем строится аппроксимирующая функция

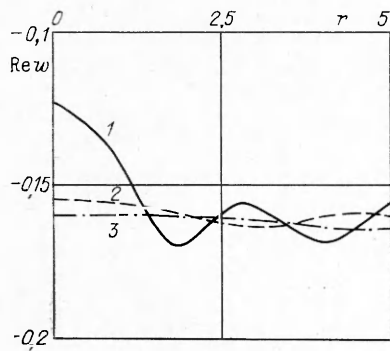
$$K_*(\alpha) = c(\alpha^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1}$$

так, чтобы  $|K(\alpha) - K_*(\alpha)| < \varepsilon$  для любого наперед заданного числа  $\varepsilon > 0$ . Этим, согласно [3], обеспечивается и близость решений интегральных уравнений  $Kq = w$  и  $K_*q = w$ . Затем по формулам (1.3), (1.4), (1.6) производится расчет амплитудно-частотных характеристик задачи.

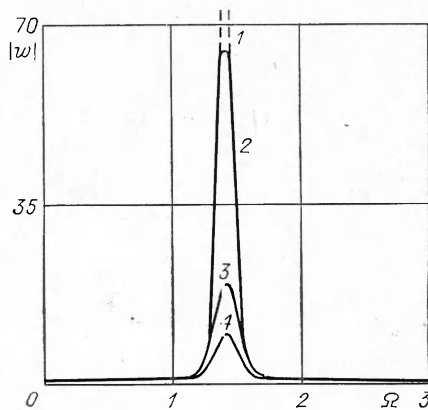
Рис. 1 иллюстрирует влияние жесткости плиты  $M = \mu/E_0$  для скользящей заделки края на распределение амплитуды прогибов  $\operatorname{Re} w(r)$ , когда на плиту действует равномерно распределенная нагрузка единичной амплитуды  $p(r) = 1$ . Кривые 1 — 3 соответствуют  $M = 0,4; 0,04; 0,004$ . Остальные параметры:  $R = 1,25, H = 0,8, a = 5, \Omega = 2,6, \nu = 0,3, \nu_0 = 0,3, \gamma = 0$ .

Анализ показывает, что уменьшение жесткости плиты  $E_0$  (т. е. рост параметра  $M$  при фиксированной жесткости среды) приводит к увеличению амплитуд  $w(r)$  и  $q(r)$  и их осцилляции, и чем жестче плита, тем равномернее происходит распределение прогибов и контактных давлений.

Аналогичные выводы можно сделать при изучении влияния геометрических параметров плиты на поведение  $w(r), q(r)$  при конкретных значениях  $\Omega$ . С увеличением радиуса плиты осцилляция колебаний растет, а с увеличением толщины плиты уменьшается. Выявленные зависимости сильнее сказываются при частотах, больших критической частоты запи-



Р и с. 1



Р и с. 2

рания волновода в упругой среде  $\Omega_*$  (для слоя  $\Omega_* = \pi/2$ ). При частотах  $\Omega \leq \Omega_*$  изменение упругих и геометрических параметров может мало влиять на амплитуды контактных напряжений и прогибов.

Влияние вязкости основания  $\gamma$  (рис. 2) говорит о существенном воздействии внутреннего трения на резонансы системы. С увеличением  $\gamma$  амплитуда колебаний уменьшается. При этом  $p(r) = 1$ ,  $a = 7$ ,  $M = 0,004$ ,  $R = 1,25$ ,  $H = 0,8$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $r = 0$ , линии 1—4 отвечают  $\gamma = 0; 0,01; 0,1; 0,2$ .

Различие максимальных значений амплитуд колебаний для различных  $\gamma$  подтверждает необходимость учета внутреннего трения в материале основания при динамическом расчете фундаментов и сооружений в целом.

**3. Резонансы системы.** Рис. 3 иллюстрирует влияние относительной толщины плиты  $H = h_0/h$  на резонансы системы круглая плита — упругий слой. Кривые 1—4 соответствуют  $H = 0,5; 1,5; 2,5; 4$  при  $p(r) = 1$ ,  $a = 11,5$ ,  $M = 0,0004$ ,  $R = 1,25$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $\gamma = 0$ ,  $r = 0$ . Очевидно, что с ростом параметра  $H$  значение резонансной частоты уменьшается, а пик сужается. При этом в области  $\Omega > \Omega_*$  ( $\Omega_*$  — критическая частота возбуждения волн, в слое  $\Omega_* = \pi/2$ ) резонанс системы носит ограниченный характер, а при  $\Omega \leq \Omega_*$  и начиная с некоторого соотношения геометрических и упругих параметров системы плита — упругое основание появляются так называемые *B*-резонансы, на которых амплитуда колебаний неограниченно растет. Эти резонансы для системы абсолютно жесткий штамп или балка — упругая полоса изучены в [1, 5] и имеют вещественные значения при  $\Omega \leq \Omega_*$  и комплексные при  $\Omega > \Omega_*$ , поэтому на рис. 3 при  $\Omega > \pi/2$  для вещественных значений частот у амплитуды колебаний ограниченный рост.

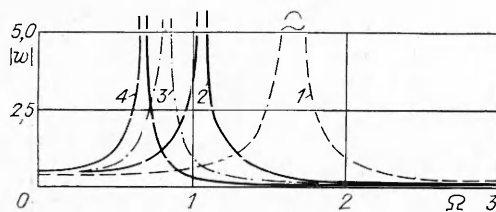
Для системы плита — вязкоупругий слой амплитуды основных характеристик будут неограниченно расти только для комплексных значений частот колебаний, так называемых собственных. Для вязкоупругого основания каждой собственной форме колебаний соответствует своя комплексная собственная частота. Резонансные частоты определяются обращением в нуль определителя системы (1.5):

$$\Delta(\Omega) = \det \|\alpha_i \delta_{kl} + s_{kl}\|_{k,l} = 0$$

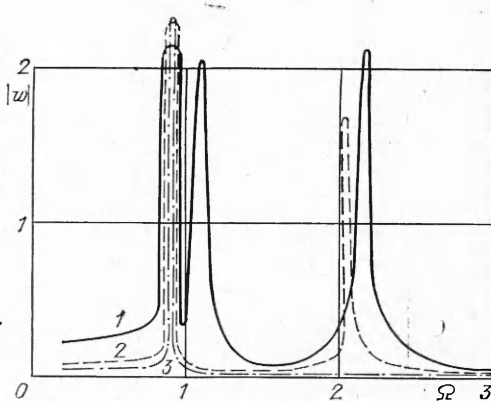
( $\delta_{kl}$  — символ Кронекера).

Используемый в работе метод отыскания комплексных корней этого уравнения опирается на известный в теории «принцип аргумента» и не требует, что существенно, знания начальных приближений для отыскания корней, а также информации об их кратности. Указанный способ реализован в [6] и использован в настоящей работе.

Результаты численного анализа позволяют также сделать следующие выводы. С увеличением радиуса плиты количество резонансных кривых растет. Уменьшение жесткости плиты (увеличение параметра  $M$ )



Р и с. 3



Р и с. 4

при фиксированных геометрических размерах плиты также ведет к увеличению числа резонансов. При этом значение первой резонансной частоты не меняется при изменении  $M$  ( $a$ ,  $H$  фиксированы) и отвечает резонансу для абсолютно жесткого штампа (рис. 4, кривые 1—3 соответствуют  $M = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $4 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 10^{-7}$ ,  $p(r) = \delta(r - 0,1)$ ,  $a = 7$ ,  $R = 3,5$ ,  $H = 0,8$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu_0 = 0,3$ ,  $\gamma = 0,1$ ).

Отметим, что выводы по изучению пределов применимости гипотезы Винклера, полученные в [5], остаются справедливыми и для осесимметричной задачи.

Авторы благодарят И. И. Воровича за обсуждение работы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Об одном эффективном методе решения задачи о колебаниях упругой балки на упругом основании // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 4.
2. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем.— М.: Госстройиздат, 1960.
3. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
4. Бабешко В. А., Пряхина О. Д. Об одном методе в теории динамических контактных задач для круглых штампов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1981.— № 2.
5. Ворович Е. И., Пряхина О. Д., Тукодова О. М. Динамические свойства упругой полуограниченной среды, контактирующей с упругим инерционным элементом // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 2.
6. Ведерников А. И., Уринцев А. Л. Пакет программ для вычисления комплексных корней алгебраических и трансцендентных уравнений вида  $f(z) = 0$ .— Ростов-на-Дону, 1979.— Деп. в ВИНТИ 21.12.79, № 99—80.

г. Ростов-на-Дону

Поступила 4/X 1991 г.,  
в окончательном варианте — 17/XII 1991 г.

УДК 624.074.4 : 678.067

А. Г. Федоренко, М. А. Сырунин, А. Г. Иванов

### ДИНАМИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ ВЗРЫВНОМ НАГРУЖЕНИИ (ОБЗОР)

Применение композитов в современной технике часто является необходимым для достижения требуемых высоких технико-экономических показателей, а в ряде случаев и качественно новых, уникальных свойств разрабатываемых конструкций. К конструкциям, которым свойственны повышенные требования к используемому материалу силовой оболочки

© А. Г. Федоренко, М. А. Сырунин, А. Г. Иванов, 1993