(20) $$z_f \sim z_ф + 6^{1/3}\varkappa(1-\omega)y,\ y \to +0,\ \varkappa^3 = 2c^2$$

для плоской струи ($i = 0$) и

(21) $$z_f \sim 2^{1/2}\left[z_ф^2/2 + 12^{2/3}(1-\omega)^{1/3}t^{1/3}\right]^{1/2},\quad t \to +0$$

для цилиндрической ($i = 1$). Здесь $t = t(y)$ вычисляется из соотношения

$$\left[z_ф^2/2 + 12^{2/3}(1-\omega)^{1/3}t^{1/3}\right]^{-3/2}dt = 2^{3/2}c^2 dy^3/12.$$

При этом, если выполняется неравенство $y \gg z_ф$, выражение (21) аппроксимируется соотношением

(22) $$z_f \sim 3^{1/3}2(1-\omega)^{1/3}\varkappa y,\ y \to +0\ (i = 1).$$

На фиг. 4 приведено сравнение полученных теоретических зависимостей для границы струи $z_f = z_f(y)$ с экспериментальными данными [9, 10] в безразмерных координатах $\zeta = z_f/z_ф$ и $\xi = y/z_ф$. Кривые *1*, *2* построены по формулам (20), (21). При этом полагалось $\omega = 0$, $\varkappa = 0{,}1$ и $0{,}077$ для $i = 0$ и 1 соответственно [7]. Крестиками помечены экспериментальные данные для плоской турбулентной струи ($i = 0$) [9], а точками — для цилиндрической ($i = 1$) [10]. Штриховая линия построена по приближенной зависимости (22).

Совпадение полученных теоретических зависимостей, результатов численных расчетов и экспериментальных данных свидетельствует об эффективности развитого асимптотического метода.

Авторы благодарят К. А. Волосова за помощь при проведении численных расчетов.

Поступила 11 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950.
2. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
3. **Лейбензон Л. С.** Общая задача о движении сжимаемой жидкости в пористой среде.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1947, т. 9, № 1.
4. **Баренблатт Г. И., Вишик М. И.** О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
5. **Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др.** Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 6.
6. **Мартинсон Л. К.** Распространение сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
7. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй и следов. М.: ГИФМЛ, 1960.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
9. **Förtmann E.** Über turbulente Strahlausbreitung.— Ingenieur-Archiv, 1934, vol. V, N 1.
10. **Trüpel T.** Über die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft.— Zeitschrift für das gesammte Turbinenwesen, 1915, N 5—6.

УДК 532.5

О СПЕКТРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ

И. В. Никитина, А. Г. Сазонтов

(Горький)

Центральной проблемой теории развитой сильной турбулентности является, как известно, определение спектра турбулентности. Современные представления о масштабно-инвариантных спектрах основываются на идеях Колмогоро-

ва, выдвинувшего гипотезу об автомодельном характере спектра в инерционном интервале и локальности турбулентности [1]. Долгое время методы подобия являлись, по существу, единственным средством теоретического анализа для определения спектральной структуры. Однако из-за свойства перемежаемости турбулентности чисто размерностные соображения не позволяют до конца найти вид спектра [2], поэтому в настоящее время делаются многочисленные попытки решить проблему колмогоровского спектра исходя непосредственно из уравнения гидродинамики.

Возрастающий интерес к автомодельным спектрам связан, по-видимому, с двумя обстоятельствами. Во-первых, в последнее время усиленно развивается теория масштабно-инвариантных спектров в задачах о фазовом переходе. Так, ренормгрупповой подход, рассмотрение задачи в произвольной размерности явились мощным средством исследования критических явлений [3, 4]; сейчас эти идеи успешно переносятся на сильную турбулентность [5, 6]. Во-вторых, для решения проблемы колмогоровского спектра плодотворным оказывается метод конформных преобразований [7, 8], впервые предложенный в [9] (см. также обзор [10]) для нахождения точных степенных решений в теории слабой турбулентности.

До сих пор все результаты по спектрам сильной турбулентности относились к случаю изотропной среды *. В действительности влияние анизотропии, связанное, например, с действием силы тяжести, является существенным. В данной работе решается задача о нахождении анизотропных спектров турбулентной конвекции (выделенным направлением является вертикальное).

Явление конвекции играет большую роль во многих физических процессах. Например, конвективные движения лежат в основе всего многообразия солнечных явлений [12], конвекция является одним из основных факторов, формирующих структуру деятельного слоя в океане [13], конвективные процессы оказывают существенное влияние на динамику атмосферных движений [14]. Как правило, во всех перечисленных явлениях конвекция носит турбулентный характер, и в связи с этим представляется важной задача о спектре турбулентной конвекции. В данной работе найдены анизотропные спектры турбулентности кинетической энергии и температурных пульсаций, соответствующие постоянному потоку тепла, и доказано свойство локальности полученных распределений.

Для описания конвекции в бесконечном слое вязкой несжимаемой жидкости воспользуемся безразмерными уравнениями движения в приближении Буссинеска [15] для поля скорости $\mathbf{v}$ и отклонения температуры T, отсчитываемой от состояния гидростатического равновесия $T_0 = -Az + T_1$ (A — равновесный градиент, T_1 — температура на нижней границе слоя):

$$\mathrm{Pr}^{-1} d\mathbf{v}/dt = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \mathrm{Ra}\, T \cdot \mathbf{e}_z; \tag{1}$$

$$\partial T/\partial t + (\mathbf{v}\nabla) T = \Delta T + \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_z; \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где $\mathrm{Ra} = g\beta A h^4/\nu\chi$ — число Рэлея; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный по оси z; β — коэффициент теплового расширения; ν и χ — коэффициенты вязкости и температуропроводности; h — толщина слоя. В этих уравнениях время измеряется в единицах h^2/ν, скорость — χ/h, температура — Ah, давление — $\rho_0\nu\chi/h^2$ (ρ_0 — невозмущенная плотность).

В качестве граничных условий примем рэлеевские:

$$w = 0,\ \partial \mathbf{v}_\perp/\partial z = 0,\ T = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1. \tag{4}$$

Поле температуры $T(\mathbf{r}_\perp, z, t)$ можно представить в виде суммы осредненного по горизонтали поля $\overline{T}(z, t)$ и отклонения от этого среднего значения $\Theta(\mathbf{r}_\perp, z, t)$:

$$T(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \overline{T}(z, t) + \Theta(\mathbf{r}_\perp, z, t)$$

---

* В рамках слабой турбулентности анизотропные спектры обсуждались в работе [11].

(поле скорости имеет нулевую среднюю составляющую).

Из уравнения (2) для $\overline{T}$ и Θ следует

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \Delta\Theta = \frac{\partial\overline{T}}{\partial z} w - \nabla\left(\mathbf{v}\Theta - \left(\overline{\mathbf{v}\Theta}\right)\right); \tag{2a}$$

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} - \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w\Theta}\right), \tag{2б}$$

где w — вертикальная компонента скорости, черта означает осреднение по горизонтали. В дальнейшем будем предполагать выполненным условие $\mathrm{Pr} \gg 1$, при этом в уравнении (1) можно пренебречь инерционным слагаемым и связать флуктуации температуры с полем скорости

$$-\nu\Delta\mathbf{v} = \mathbf{g}\beta T - \frac{1}{\rho_0}\nabla p. \tag{5}$$

Будем искать решение системы (1)—(3) с граничными условиями (4) в виде разложения по собственным функциям линейной краевой задачи:

$$w(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \int w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}(t)\, e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp + ik_z z} d\mathbf{k}_\perp, \tag{6}$$

$$T(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \int T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}(t)\, e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp + ik_z z} d\mathbf{k}_\perp,$$

$$\mathbf{u}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z, t) = -\sum_{k_z=-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}_\perp k_z}{k_\perp^2} w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}(t)\, e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp + ik_z z} d\mathbf{k}_\perp,$$

$$w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = w_{-\mathbf{k}_\perp}^{*k_z}, \quad T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = T_{-\mathbf{k}_\perp}^{*k_z}, \quad w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = -w_{\mathbf{k}_\perp}^{-k_z}, \quad T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = -T_{\mathbf{k}_\perp}^{-k_z},$$

где $\mathbf{k}_\perp$ — волновой вектор, лежащий в горизонтальной плоскости; $k_z = \pi n/h$ — квантованная величина z-компоненты импульса (n — дискретное число, характеризующее число полуволн, укладывающихся по вертикали).

Из (5) следует

$$w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = \frac{g\beta}{\nu}\frac{k_\perp^2}{k^4} T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}; \quad \mathbf{u}_{\perp\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = -\frac{g\beta}{\nu}\frac{\mathbf{k}_\perp k_z}{k^4} T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}, \quad k^2 = k_\perp^2 + k_z^2. \tag{7}$$

Используя (7), для фурье-компоненты поля температуры получим уравнение

$$\frac{\partial T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}}{\partial t} = \gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} T_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} + \frac{i}{2} \sum_{k_z + k_{z_1} + k_{z_2} = 0} \int V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} T_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{*k_{z_1}} T_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{*k_{z_2}} \times \tag{8}$$

$$\times\, \delta(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_{\perp_1} + \mathbf{k}_{\perp_2})\, d\mathbf{k}_{\perp_1} d\mathbf{k}_{\perp_2},$$

где

$$\gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = \frac{\chi k_\perp^2}{(kh)^4}(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_c); \quad \mathrm{Ra}_c = \frac{h^4 k^6}{k_\perp^2};$$

$$V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} = \frac{g\beta}{\nu}\left[\frac{k_{\perp_1}^2}{k_1^4}\left(k_{z_2} + \frac{1}{2}k_{z_1} - \frac{1}{2}k_{z_1}\left(\frac{k_{\perp_2}^2 - k_\perp^2}{k_{\perp_2}^2}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{\perp_2}^2}{k_2^4}\left(k_{z_1} + \frac{1}{2}k_{z_2} - \frac{1}{2}k_{z_2}\left(\frac{k_{\perp_1}^2 - k_\perp^2}{k_{\perp_2}^2}\right)\right)\right].$$

Матричный элемент взаимодействия $V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}}$ обладает симметрией $V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} = V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_2}\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_2}k_{z_1}}$ и удовлетворяет тождеству Якоби

$$V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} + V_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_2}\mathbf{k}_\perp}^{k_{z_2}k_z} + V_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_2}}\Big|_{\mathbf{k}_\perp\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_z k_{z_1}} = 0, \tag{9}$$

являющемуся следствием закона сохранения потока тепла.

В дальнейшем понадобится асимптотика матричного элемента в двух предельных случаях: $k_z \gg k_\perp$ и $k_z \ll k_\perp$. При этом $V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}}$ является однородной функцией своих аргументов

$$V_{\lambda\mathbf{k}_\perp}^{\xi k_z}\Big|_{\lambda\mathbf{k}_{\perp_1}\lambda\mathbf{k}_{\perp_2}}^{\xi k_{z_1}\xi k_{z_2}} = \lambda^t\xi^r V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}},$$

причем при $k_z \gg k_\perp$ $t = 2$, $r = -3$, при $k_z \ll k_\perp$ $t = -2$, $r = 1$.

Спецификой задачи является наличие среднего поля температуры, описываемого нулевой пространственной гармоникой в (8).

Наличие средней составляющей осложняет статистическое рассмотрение в рамках уравнения (8), поэтому удобнее переформулировать задачу в терминах вертикальной компоненты скорости, имеющей нулевое среднее значение:

$$\frac{\partial w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}}{\partial t} = \gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} + \frac{i}{2}\sum_{k_z+k_{z_1}+k_{z_2}=0}\int \frac{k_\perp^2}{k^4}\frac{k_1^4k_2^4}{k_{\perp_1}^2k_{\perp_2}^2} V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} \overset{*}{w}{}_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}} \overset{*}{w}{}_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_2}} \times$$
$$\times\, \delta\left(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_{\perp_1} + \mathbf{k}_{\perp_2}\right) d\mathbf{k}_{\perp_1} d\mathbf{k}_{\perp_2}. \tag{10}$$

Будем интересоваться режимом развитой турбулентной конвекции. Как свидетельствуют эксперименты (см., например, [16]), при $\mathrm{Pr} > 5$ такой режим возникает при $\mathrm{Ra} \sim 5\cdot 10^5$. Прежде всего качественно рассмотрим структуру турбулентной конвекции. Избыток тепла, имеющийся в нижнем слое, передается движениям вихрей самых больших размеров. Эти вихри существуют не больше, чем время движения жидкости по окружности вихря и поэтому не успевают донести избыток тепла до верхней границы слоя. Крупномасштабные вихри распадаются на более мелкие, и, таким образом, вся область турбулентной конвекции состоит из ансамбля вихрей различных масштабов. Поскольку вихри подвергаются действию силы тяжести, турбулентность носит анизотропный характер (выделенное направление — вертикальное). Для описания турбулентности введем в рассмотрение следующие характеристики:
спектральную плотность кинетической энергии

$$F(\mathbf{k}, t) = \left\langle \mathbf{u}_{\perp\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \overset{*}{\mathbf{u}}{}_{\perp\mathbf{k}_\perp}^{k_z} + w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \overset{*}{w}{}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \right\rangle$$

и спектральную плотность температурных пульсаций

$$F_{\mathrm{T}}(\mathbf{k}, t) = \left\langle \Theta_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \overset{*}{\Theta}{}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \right\rangle,$$

где $\langle\ \rangle$ — осреднение по статистическому ансамблю.

С учетом (7), (6) для $F(\mathbf{k}, t)$ и $F_{\mathrm{T}}(\mathbf{k}, t)$ могут быть получены следующие соотношения:

$$F(\mathbf{k}, t) = \frac{k^2}{k_\perp^2}\left\langle w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \overset{*}{w}{}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \right\rangle \equiv \frac{k^2}{k_\perp^2} I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z},$$

$$F_{\mathrm{T}}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{\nu k^4}{g\widehat{\beta} k_\perp^2}\right)^2 \left\langle w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \overset{*}{w}{}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \right\rangle \equiv \left(\frac{\nu k^4}{g\widehat{\beta} k_\perp^2}\right)^2 I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}.$$

Таким образом, знание величины $I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} = \left\langle w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} w_{\mathbf{k}_\perp}^{*k_z} \right\rangle$ даст возможность определить искомые характеристики. Из уравнения (10) для $I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}$ следует

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k_z + k_{z_1} + k_{z_2} = 0} \int \frac{k_\perp^2 k_1^4 k_2^4}{k^4 k_{\perp_1}^2 k_{\perp_2}^2} V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1} k_{z_2}} \times \tag{11}$$

$$\times J_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_z k_{z_1} k_{z_2}} \delta(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_{\perp_1} + \mathbf{k}_{\perp_2}) d\mathbf{k}_{\perp_1} d\mathbf{k}_{\perp_2},$$

где

$$J_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_z k_{z_1} k_{z_2}} = \left\langle w_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} w_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}} w_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_2}} \right\rangle.$$

Для исследования статистических характеристик уравнения (10) удобно пользоваться диаграммной техникой Уайльда [17], оперирующей двумя величинами — спектральной плотностью $I_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z}$ и обобщенной функцией Грина $G_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z}$. Первый порядок теории возмущений соответствует модели прямых взаимодействий Крейчнана [18] *. Однако, как показано в работе [22], это приближение завышает влияние крупномасштабных движений на эволюцию мелкомасштабных неоднородностей и приводит к спектру, не согласующемуся с колмогоровским, который достаточно хорошо подтвержден экспериментально [2].

В работе [8] была отсуммирована часть наиболее расходящихся диаграмм, описывающих перенос, при этом улучшенные уравнения прямых взаимодействий уже содержат решения с колмогоровскими значениями индексов [23].

Для рассматриваемого случая улучшенные уравнения в $\mathbf{k}$ — ω-представлении имеют вид

$$\begin{gathered} I_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} = \left| G_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} \right|^2 \Phi_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z}, \\ G_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} = \left(\omega - i\gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} - \Sigma_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} \right)^{-1}, \\ \Phi_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} = \sum_{k_{z_1}, k_{z_2}} \int dq_1 dq_2 \left[\tilde{V}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1} k_{z_2}} \right]^2 I_{q_1}^{k_{z_1}} I_{q_2}^{k_{z_2}} \times \\ \times \left[\delta(q + q_1 + q_2) \delta_{k_z, -(k_{z_1} + k_{z_2})} - \delta(q + q_1) \delta_{k_z, -k_{z_1}} \right], \\ \Sigma_{\mathbf{k}_\perp \omega}^{k_z} = \sum_{k_{z_1}, k_{z_2}} \int dq_1 dq_2 \tilde{V}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1} k_{z_2}} \tilde{V}_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}} \Big|_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_z k_{z_2}} I_{q_1}^{k_{z_1}} G_{q_2}^{k_{z_2}} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \delta(q + q_1 + q_2) \delta_{k_z, -(k_{z_1} + k_{z_2})} - \delta(q + q_1) \delta_{k_z, -k_{z_1}} \right], \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$q = (\mathbf{k}_\perp \omega); \quad \tilde{V}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1} k_{z_2}} = \frac{k_\perp^2 k_1^4 k_2^4}{k^4 k_{\perp_1}^2 k_{\perp_2}^2} V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} \Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1} k_{z_2}}.$$

Далее выразим тройной коррелятор $J_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1} \mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_z k_{z_1} k_{z_2}}$ в виде ряда по степеням $I_q^{k_z}$ и $G_q^{k_z}$. При этом в рамках модели прямых взаимодействий уравнение (11) перепишем в виде

---

* Применительно к полной системе (1), (2а), (2б) уравнения прямых взаимодействий были сформулированы в работах [19—21].

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} I_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \sum_{k_z+k_{z_1}+k_{z_2}=0} \int dq_1 dq_2 d\omega \widetilde{V}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} \times \tag{13}$$

$$\times \Big\{ \widetilde{V}_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}} G_q^{k_z} I_{q_1}^{k_{z_1}} I_{q_2}^{k_{z_2}} + \widetilde{V}_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_2}}\Big|_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_z k_{z_1}} G_{q_2}^{k_{z_2}} I_q^{k_z} I_{q_1}^{k_{z_1}} +$$

$$+ \widetilde{V}_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_2}\mathbf{k}_\perp}^{k_{z_2}k_z} G_{q_1}^{k_{z_1}} I_{q_2}^{k_{z_2}} I_q^{k_z} \Big\} \delta(q + q_1 + q_2)\, \delta_{k_z, -(k_{z_1}+k_{z_2})}.$$

Уравнение (13) аналогично кинетическому уравнению для волн в теории слабой турбулентности.

Будем интересоваться решением уравнения (13) в инерционном интервале, где влиянием энергосодержащей области и области диссипации можно пренебречь, а основной вклад в формирование неравновесных потоковых спектров вносит интеграл столкновений. Граница применимости такого рассмотрения будет обсуждена ниже.

Вначале определим стационарные спектры из соображений размерности. Для этого воспользуемся колмогоровской гипотезой о постоянстве потока тепла:

$$\varepsilon_{\text{т}} \sim \frac{k_\perp^2 k_z F_{\text{т}}(\mathbf{k})}{\tau_{\text{int}}} = \text{const}, \tag{14}$$

где τ_{int} — характерное время нелинейного взаимодействия температурных пульсаций.

Из (8) можно оценить

$$\frac{1}{\tau_{\text{int}}} \sim \left(\frac{g\widehat{\beta}}{\nu}\right) F_{\text{т}}(\mathbf{k})\, k_\perp^{t+1} k_z^{r+\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Тогда из (14), (15) получим

$$F_{\text{т}}(\mathbf{k}) \sim \left(\nu\varepsilon_{\text{т}}/g\widehat{\beta}\right)^{2/3} k_\perp^{-(2t+6)/3} k_z^{-(2r+3)/3}. \tag{16}$$

Используя соотношения (7) для $F(\mathbf{k})$, имеем

$$F(\mathbf{k}) \sim \varepsilon_{\text{т}}^{2/3} \left(g\widehat{\beta}/\nu\right)^{4/3} k_\perp^{-2t/3} k_z^{-(2r+3)/3} k^{-6}. \tag{17}$$

В предельных случаях, когда $k_z \gg k_\perp$ или $k_z \ll k_\perp$, (16), (17) соответственно имеют вид

$$F_{\text{т}}(\mathbf{k}) \sim k_\perp^{-2/3} k_z^{-5/3}, \quad F(\mathbf{k}) \sim k_\perp^{-14/3} k_z^{-5/3} \quad (k_z \ll k_\perp); \tag{18}$$

$$F_{\text{т}}(\mathbf{k}) \sim k_\perp^{-10/3} k_z^{1}, \quad F(\mathbf{k}) \sim k_\perp^{-4/3} k_z^{-5} \quad (k_z \gg k_\perp). \tag{19}$$

При произвольном соотношении между k_z и $k_\perp$ соображения размерности могут дать одномерные спектры (зависящие от $|\mathbf{k}|$):

$$F_{\text{т}}(\mathbf{k}) \sim k^{-7/3}, \quad F(\mathbf{k}) \sim k^{-19/3}.$$

В этом случае характер распределений по углу, т. е. характер анизотропии спектра, остается неопределенным.

Отметим, что полученные спектры существенно опираются на гипотезу локальности.

Определим аналитически стационарные спектры турбулентной конвекции. Для этого необходимо найти точные решения уравнений (12), (13). Ввиду выделенности вертикального направления естественно искать распределения, зависящие от k_z и $k_\perp$. В настоящее время известен лишь один способ нахождения точных решений, основанный на методе факторизации [10], при этом существенно используются свойства симметрии и однородность матричных элементов взаимодействия. Однако в данном случае этот метод непосредственно неприменим, поскольку $V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_1}k_{z_2}}$

не является однородной функцией от k_z и $k_\perp$ во всем интервале волновых чисел, и только в предельных случаях, когда либо $k_z \gg k_\perp$, либо $k_z \ll k_\perp$, может быть проведена процедура факторизации. Именно в этих предельных случаях найдем решения уравнений (12), (13), предварительно перейдя в них от суммирования по k_z к интегрированию:

$$\sum_{k_z} \to \frac{h}{(2\pi)} \int dk_z.$$

Решение этих уравнений будем искать в автомодельном виде

$$G^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp \omega} = \frac{1}{k_\perp^s k_z^p}\, g\left(\frac{\omega}{k_\perp^s k_z^p}\right), \quad I^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp \omega} = \frac{1}{k_\perp^{s+\alpha} k_z^{p+\beta}}\, f\left(\frac{\omega}{k_\perp^s k_z^p}\right). \tag{20}$$

Первые два соотношения между искомыми индексами получим из уравнения Дайсона (12)

$$2s + \alpha = 2\tilde{t} + 2, \; 2p + \beta = 2\tilde{r} + 1, \tag{21}$$

где $\tilde{t} = 0$, $\tilde{r} = 1$ как при $k_z \ll k_\perp$, так и при $k_z \gg k_\perp$ ($\tilde{t}$ и $\tilde{r}$ — степени однородности матричного элемента $\tilde{V}^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}$ в рассматриваемых случаях).

Следующие два соотношения между s, α, p и β получим, решая стационарное уравнение (13)

$$I_{\mathrm{st}} = \mathrm{Im} \int d\omega dq_1 dq_2 dk_{z_1} dk_{z_2} \tilde{V}^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}} \Big\{ \tilde{V}^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}} G^{k_z}_q I^{k_{z_1}}_{q_1} I^{k_{z_2}}_{q_2} + \tag{22}$$
$$+ \tilde{V}^{k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_2}}\Big|^{k_z k_{z_1}}_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1}} G^{k_{z_2}}_{q_2} I^{k_z}_q I^{k_{z_1}}_{q_1} + \tilde{V}^{k_{z_1}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}}\Big|^{k_{z_2} k_z}_{\mathbf{k}_{\perp_2}\mathbf{k}_\perp} G^{k_{z_1}}_{q_1} I^{k_{z_2}}_{q_2} I^{k_z}_q \Big\} \delta(q + q_1 + q_2)\, \delta \times$$
$$\times (k_z + k_{z_1} + k_{z_2}) = 0.$$

Для этого проведем факторизацию, вводя совместное конформное преобразование по $k_\perp$ и по k_z, предварительно домножая для симметризации подынтегральную функцию в (22) на $k^8/k_\perp^4$:

$$k_\perp = k''_\perp \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right), \quad k_{\perp_1} = k'_\perp \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right), \quad k_{\perp_2} = k_\perp \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right), \quad k_z = k'_z \left(\frac{k_z}{k''_z}\right),$$

$$k_{z_1} = k'_z \left(\frac{k_z}{k''_z}\right), \quad k_{z_2} = k_z \left(\frac{k_z}{k''_z}\right), \quad \omega = \omega'' \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right)^s \left(\frac{k_z}{k''_z}\right)^p.$$

$$\omega_1 = \omega' \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right)^s \left(\frac{k_z}{k''_z}\right)^p, \quad \omega_2 = \omega \left(\frac{k_\perp}{k''_\perp}\right)^s \left(\frac{k_z}{k''_z}\right)^p.$$

При этом второе слагаемое в (22) на масштабно-инвариантном спектре (20) перейдет в первое с множителем $\left(\frac{k_\perp}{k_{\perp_2}}\right)^x \left(\frac{k_z}{k_{z_2}}\right)^y$, где $x = 2\tilde{\tilde{t}} + 4 - s - 2\alpha$; $y = 2\tilde{\tilde{r}} + 2 - p - 2\beta$, причем $\tilde{\tilde{t}} = 2$, $\tilde{\tilde{r}} = 1$ при $k_z \ll k_\perp$ и $\tilde{\tilde{t}} = -2$, $\tilde{\tilde{r}} = 5$ при $k_z \gg k_\perp$ ($\tilde{\tilde{t}}$ и $\tilde{\tilde{r}}$ — степени однородности величины $\tilde{\tilde{V}}^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}} = \frac{k_1^4 k_2^4}{k_{\perp_1}^2 k_{\perp_2}^2} V^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}}$ в рассматриваемых случаях). Аналогичным образом преобразуется третье слагаемое в (22).

В результате подынтегральная функция примет вид

$$\left(\frac{k_1^4 k_2^4}{k_{\perp_1}^2 k_{\perp_2}^2}\right)^2 V^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}} G^{k_z}_q I^{k_{z_1}}_{q_1} I^{k_{z_2}}_{q_2} \Big\{ V^{k_z}_{\mathbf{k}_\perp}\Big|^{k_{z_1}k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_{\perp_2}} + \left(\frac{k_\perp}{k_{\perp_2}}\right)^x \left(\frac{k_z}{k_{z_2}}\right)^y V^{k_{z_2}}_{\mathbf{k}_{\perp_2}}\Big|^{k_z k_{z_1}}_{\mathbf{k}_\perp \mathbf{k}_{\perp_1}} +$$

$$+\left(\frac{k_\perp}{k_{\perp_1}}\right)^x\left(\frac{k_z}{k_{z_1}}\right)^y V_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_2}\mathbf{k}_\perp}^{k_{z_2}k_z}\Big\}\,\delta(q+q_1+q_2)\,\delta(k_z+k_{z_1}+k_{z_2}).$$

Фигурная скобка обращается в нуль при $x = y = 0$ в силу тождества (9). Условия $x = y = 0$ совместно с соотношениями (21) приводят к следующим значениям для индексов:

$$\alpha = 14/3,\ \beta = 5/3,\ s = -4/3,\ p = 2/3 \text{ при } k_z \ll k_\perp$$

и

$$\alpha = -2/3,\ \beta = 7,\ s = 4/3,\ p = -2 \text{ при } k_z \gg k_\perp,$$

при этом для пространственных спектров $F(\mathbf{k})$ и $F_T(\mathbf{k})$ получаются решения (18), (19), найденные ранее из соображений размерности. Еще раз подчеркнем, что процедура факторизации проходит лишь в предельных случаях, когда либо $k_z \ll k_\perp$, либо $k_z \gg k_\perp$, только при этом матричный элемент является биоднородной функцией своих аргументов.

Для того чтобы полученные решения имели физический смысл, необходимо доказать локальность турбулентности. Последнее означает, что взаимодействие мод с масштабами одного порядка гораздо сильнее, чем взаимодействие мод разных масштабов. Формально свойство локальности требует, чтобы интегралы в (22) сходились на полученных спектрах. Рассмотрим вначале сходимость в области $k_{\perp_1} \ll k_\perp$ и $k_{z_1} \ll k_z$ ($k_{\perp_2} \sim k_\perp$, $k_{z_2} \sim k_z$).

В этом случае наиболее опасными членами (с которыми связана наибольшая расходимость) будут слагаемые, пропорциональные $I_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}$.

При малых $k_{\perp_1}$ и k_{z_1}, используя свойство (9) и учитывая, что $G_q = -G_{-q}^*$, эти слагаемые группируем в выражение

$$\int\limits_0 dk_{z_1}\int\limits_0 \frac{dk_{\perp_1}}{\sqrt{4k_\perp^2-k_{\perp_1}^2}}\,\frac{k_1^8}{k_{\perp_1}^4}\,V_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}\Big|_{\mathbf{k}_\perp-\mathbf{k}_\perp}^{k_z-k_z}\,V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}\mathbf{k}_\perp}^{k_{z_1}k_z}\,I_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}. \tag{23}$$

Поскольку точно выполняется соотношение $V_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}\Big|_{\mathbf{k}_\perp-\mathbf{k}_\perp}^{k_z-k_z} = 0$, это обеспечивает сходимость интегралов (23) и тем самым означает локальность спектров в рассматриваемой области.

Рассмотрим сходимость в области $k_{\perp_1}, k_{\perp_2} \gg k_\perp$ и $k_{z_1}, k_{z_2} \gg k_z$. При этом наиболее опасными членами являются члены, линейные по $I_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}$ и $I_{\mathbf{k}_{\perp_2}}^{k_{z_2}}$. Для них получим интегралы вида

$$\int^\infty dk_{z_1}\int^\infty \frac{dk_{\perp_1}}{\sqrt{4k_{\perp_1}^2-k_\perp^2}}\,\frac{k_1^8}{k_{\perp_1}^4}\left[V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}-\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}-k_{z_1}}\right]^2 I_{\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}}.$$

Сходимость интегралов на верхнем пределе обеспечивается всегда в силу того, что $V_{\mathbf{k}_\perp}^{k_z}\Big|_{\mathbf{k}_{\perp_1}-\mathbf{k}_{\perp_1}}^{k_{z_1}-k_{z_1}} = 0$. Таким образом, найденные спектры являются локальными.

Выясним границу применимости полученных решений. Прежде всего обратим внимание на то, что при $\mathrm{Pr} \gg 1$, как следует из (5), силы инерции полностью теряют значение и архимедовы силы статистически уравновешиваются молекулярными силами. При этом действию вязкости подвергаются движения всех масштабов и колмогоровский участок спектра $F(\mathbf{k}) \sim k^{-11/3}$ отсутствует. При достаточно малых масштабах вязкость будет оказывать изотропизующее влияние. Минимальный масштаб, начиная с которого это влияние становится существенным, можно определить, сравнивая характерное время диссипации из-за вязкости в масштабе l $\tau_\nu \sim l^2/\nu$ с характерным временем конвективного подъема соответствующего масштаба под действием архимедовой силы $\tau_{\text{conv}} \sim l/v_l$. Используя из (5) связь

$$\nu v_l/l^2 \sim g\hat{\beta}T_l$$

и соотношение $\varepsilon_{\text{т}} \sim \frac{T_l^2 v_l}{l} = \text{const}$, из условия $\tau_\nu \sim \tau_{\text{conv}}$ можно найти

$$l_{\text{кр}} \simeq \frac{\nu^{5/8}}{(g\hat{\beta}\varepsilon_{\text{т}}^{1/2})^{1/4}}.$$

Это выражение может быть получено и непосредственно из соображений размерности, если предположить, что величина $l_{\text{кр}}$ зависит лишь от параметров g, $\hat{\beta}$, ν и $\varepsilon_{\text{т}}$. Таким образом, при больших Pr найденные анизотропные спектры (16), (17) будут реализовываться до масштаба $l_{\text{кр}}$. Вихри с масштабами от $l_{\text{кр}}$ до k_{dis}^{-1}, где становится существенной молекулярная теплопроводность, будут практически изотропными.

В изотропном интервале масштабов, решая осредненное по углам уравнение (22), можно получить следующее выражение для пространственного спектра вертикальной компоненты скорости:

$$I_k = B\varepsilon_{\text{т}}^{2/3}\left(\frac{g\hat{\beta}}{\nu}\right)^{4/3} k^{-19/3}. \tag{24}$$

При этом спектры кинетической энергии и температурных пульсаций в сферической нормировке имеют вид

$$E_{\text{т}}(k) \sim k^{-1/3} \text{ и } E(k) \sim k^{-13/3}. \tag{25}$$

Такого вида спектральные характеристики были получены в работе [24] путем численного решения полуэмпирических уравнений баланса энергии и температурных пульсаций. Изотропные спектры (24), (25) будут реализовываться вплоть до масштаба k_{dis}^{-1}, который можно оценить, рассматривая задачу с источником:

$$2\gamma_k I_k = I_{\text{st}}.$$

Решение типа (24) будет справедливо до тех пор, пока интеграл столкновений на этом спектре не сравняется с членом затухания (в области больших k $\gamma_k \sim \chi k^2$)

$$2\chi B k_{\text{dis}}^{2-19/3} \sim B^{3/2}\varepsilon_{\text{т}}^{1/3}\left(\frac{g\hat{\beta}}{\nu}\right)^{2/3} k_{\text{dis}}^{-7}$$

или

$$k_{\text{dis}} \sim \left[\frac{B^{1/2}}{2\chi}(g\hat{\beta}\varepsilon_{\text{т}}^{1/2}/\nu)^{2/3}\right]^{3/8}.$$

При $k > k_{\text{dis}}$ решение быстро спадает. Для определения константы B воспользуемся законом сохранения потока тепла:

$$\int_0^\infty \gamma_k k^4 I_k k^2 dk = 0.$$

Имеем

$$\gamma_0 k_0^7 \frac{B}{k_0^{19/3}} \sim \chi B \int_0^{k_{\text{dis}}} k^{8-19/3} dk = \frac{3}{8}\chi B k_{\text{dis}}^{8/3},$$

где γ_0 — характерное значение инкремента; k_0 — характерный масштаб области неустойчивости. Принимая $\gamma_0 \sim \chi\,\text{Ra}/\pi^2 h^2$, $k_0 \sim (\pi/h)\sqrt{2}$, находим

$$B \sim \left[\frac{16\,\mathrm{Ra}}{3\pi^2 k_0^{4/3}} \left(\frac{\nu}{\varepsilon_{\mathrm{T}}^{1/2} g\hat{\beta}} \right)^{2/3} \right]^2.$$

Все рассмотрение будет справедливо, если существует достаточно большая область прозрачности, т. е. если $k_{\mathrm{dis}} \gg k_0$. Вычисление k_{dis} дает условие

$$\mathrm{Ra} \gg 10^4.$$

Для турбулентной конвекции это заведомо выполняется.

Авторы выражают признательность М. И. Рабиновичу за обсуждение результатов и ценные замечания.

Поступила 5 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колмогоров А. Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 4.
2. **Монин А. С., Яглом Я. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. II. М.: Наука, 1967.
3. **Паташинский А. З., Покровский В. Л.** Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1975.
4. **Вильсон К. Г., Когут Дж.** Ренормализационная группа и ε-разложение. М.: Мир, 1975.
5. **Rose H. R., Sulem P. L.** Fully developed turbulence and statistical mechanics.— J. Phys., 1978, vol. 39, N 5.
6. **Sulem P. L., Fournier J. D., Pouquet A.** Fully developed turbulence and renormalized group.— Lect. Notes Phys., 1979, N 104.
7. **Захаров В. Е., Львов В. С.** О статистическом описании нелинейных волновых полей.— Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика, 1975, т. 18, № 10.
8. **Львов В. С.** К теории развитой гидродинамической турбулентности. Препринт № 53 ИАиЭ СО АН СССР. Новосибирск, 1977.
9. **Захаров В. Е.** Слабая турбулентность в средах с распадным спектром.— ПМТФ, 1965, № 4.
10. **Кадомцев Б. Б., Конторович В. М.** Теория турбулентности в гидродинамике и плазме.— Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4.
11. **Кузнецов Е. А.** О турбулентности ионного звука в плазме в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, № 2.
12. **Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н.** Физика плазмы солнечной атмосферы. М.: Наука, 1977.
13. **Булгаков Н. П.** Конвекция в океане. М.: Наука, 1975.
14. **Винниченко Н. К., Пинус Н. З., Шметер С. М., Шур Г. Н.** Турбулентность в свободной атмосфере. М.: Гидрометеоиздат, 1976.
15. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
16. **Krishnamurti R.** Some further studies on the transition to turbulent convection.— J. Fluid Mech., 1973, vol. 60, N 2.
17. **Wyld H. W.** Formulation on the theory of turbulence in an incompressible fluid.— Ann. Phys., 1961, vol. 14, N 1.
18. **Kraichnan R. H.** The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, N 4.
19. **Kraichnan R. H.** Direct interaction approximation for shear and thermally turbulence.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 7.
20. **Kraichnan R. H.** Diagnolizing approximation for inhomogeneous turbulence.— Phys. Fluids, 1964, vol. 8, N 8.
21. **Herring J. R.** Statistical theory of thermal convection at large Prandtl number.— Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 1.
22. **Кадомцев Б. Б.** Вопросы физики плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964.
23. **Kuznetsov E. A., Lvov V. C.** On the Kolmogorov turbulent spectrum in the direct interaction model.— Phys. Lett., 1977, vol. 64A, N 2.
24. **Беннлов А. Ю., Лозовецкий И. Д.** Об инерционном интервале в спектрах турбулентности стратифицированной жидкости.— В сб.: Исследование изменчивости гидрофизических полей в океане. М.: Наука, 1974.