6. Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров. Теория вязкой жидкости. «Наука», 1965.
7. А. С. Гиневский. Сб. «Промышленная аэродинамика», № 15, Оборонгиз, 1959.
8. J. A. Monters. J. Chem. Phys., 1955, 23, 10.
9. Ш. А. Ершин, Л. П. Ярин. Сб. «Прикладная теплофизика». Изд. АН КазССР, 1964.

УДК 536.463

К РАСЧЕТУ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ

А. Н. Иванов

(Москва)

Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий [1] установили для случая равенства коэффициентов диффузии и температуропроводности подобие концентрационного и температурного профиля в стационарной волне горения, распространяющейся в газовой системе

$$\frac{N}{N_0} = \frac{T_к - T}{T_к - T_0}. \tag{1}$$

Эта связь позволяет вместо двух уравнений теплопроводности и диффузии рассматривать одно уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) - \rho u c_p \frac{dT}{dx} + q\,\Phi = 0, \tag{2}$$

представив кинетическое уравнение химического превращения в виде

$$\Phi = k_0 c_0^{\nu} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\nu} \left(\frac{T_к - T}{T_к - T_0}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \tag{3}$$

Перейдя к переменным $T - \frac{dT}{dx}$ и обозначив $\frac{dT}{dx} = y$, преобразуем уравнение (2)

$$\lambda y \frac{dy}{dT} - \rho u c_p y + q k_0 c_0^{\nu} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\nu} \left(\frac{T_к - T}{T_к - T_0}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) = 0. \tag{4}$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\overline{T} = \frac{T}{T_к};\quad A = \frac{E}{RT_к},\quad M = \frac{q k_0 c_0^{\nu} \lambda}{c_p^2 \rho^2 u^2 T_к};\quad \overline{y} = \frac{\lambda y}{\rho u c_p T_к},$$

то

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{T}} - 1 + \frac{M}{\overline{y}} f(\overline{T}) = 0, \tag{5}$$

где

$$f(\overline{T}) = \left(\frac{\overline{T}_0}{1 - \overline{T}_0}\right)^{\nu} \left(\frac{1 - \overline{T}}{\overline{T}}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{A}{\overline{T}}\right).$$

Для определения массовой скорости горения, которая вошла в безразмерный параметр M, введем граничные условия:

при $\bar{T}=\bar{T}_0$ $\bar{y}=0$,

$$\text{при } \bar{T}=1 \quad \bar{y}=0. \tag{6}$$

Таким образом, для определения параметра M необходимо решить краевую задачу, представленную нелинейным уравнением (5) и граничными условиями (6).

Эта задача решалась численно при практически важном диапазоне изменения определяющих параметров: $\nu=1$ и 2, $A=4$, 6, 8, 10, 15, 20, $\bar{T}_0=0{,}1$, 0,2 и 0,3.

Расчеты проводились методом Рунге-Кутта на БЭСМ-2. Параметр M подбирался автоматически с точностью до шестой значащей цифры. Интегрирование начиналось с точки $\bar{T}=\bar{T}_0$ и $\bar{y}=0$.

Интегральные кривые представлены на рис. 1, 2 и 3.

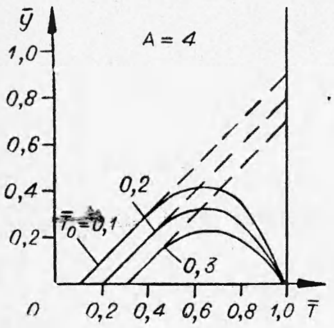

Рис. 1.

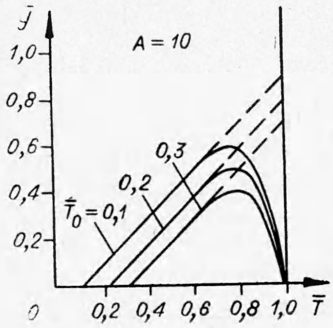

Рис. 2.

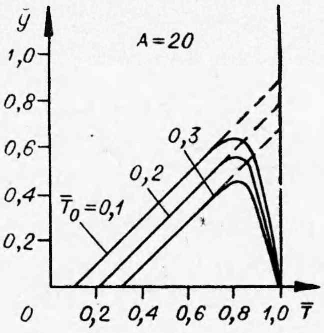

Рис. 3.

Для этих решений характерным является наличие в начале прямолинейного участка, что обусловлено малым значением функции $\frac{M}{\bar{y}} f$ по сравнению с единицей. Этот участок почти чистого подогрева за счет распространения тепла из более нагретых зон известен как Михельсоновское решение.

При дальнейшем увеличении температуры в связи с тепловыделением, обусловленным химическими превращениями, производная $\frac{d\bar{y}}{d\bar{T}}$ начинает уменьшаться, и кривая $\bar{y}=\bar{y}(\bar{T})$ приходит в точку $\bar{T}=1$ и $\bar{y}=0$.

Результаты машинного расчета параметра M сравнивались с его значением, определенным по методу Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого, согласно которому процесс горения разбивается на два этапа: подогрев и химическое превращение.

Первый этап описывается решением В. А. Михельсона

$$\bar{y}=\bar{T}-\bar{T}_0. \tag{7}$$

На втором этапе полагается, что $\frac{M}{\bar{y}} f \gg 1$. В связи с этим укороченное уравнение $\frac{d\bar{y}}{d\bar{T}}+\frac{M}{\bar{y}} f(\bar{T})=0$ решается в квадратурах

$$y^2=2M\int_{\bar{T}}^{1} f(\bar{T})\,d\bar{T}. \tag{8}$$

Решения обоих этапов удовлетворяют граничным условиям. В некоторой точке $\bar{T}=\bar{T}^*$ и $\bar{y}=\bar{y}^*$ оба решения смыкаются

$$(\bar{T}^* - \bar{T}_0)^2 = 2M \int_{\bar{T}^*}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}. \tag{9}$$

Для определения скорости горения в левой части полученного выражения (9) температура $\bar{T}^*$ принимается равной температуре горения (т. е. единице), а в правой части эта же температура принимается равной ее начальному значению, т. е. $\bar{T}_0$,

$$(1 - \bar{T}_0)^2 = 2M \int_{\bar{T}_0}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}. \tag{10}$$

Из (10) и определяется параметр M:

$$M = \frac{(1 - \bar{T}_0)_2}{2\int_{\bar{T}_0}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}}. \tag{11}$$

Тот же результат может быть получен формально без физического обоснования малости единицы по сравнению со значением функции $\frac{M}{y} f$ на втором этапе, что было сделано в работе [1].

Для этого проинтегрируем уравнение (5) по $\bar{T}$ от $\bar{T}=\bar{T}_0$ до $\bar{T}=1$

$$\int_{\bar{T}_0}^{1} \bar{y} \frac{d\bar{y}}{d\bar{T}}\, d\bar{T} = \int_{\bar{T}_0}^{1} \bar{y}\, d\bar{T} - M \int_{\bar{T}_0}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}. \tag{12}$$

Интеграл в левой части соотношения (12) в связи с граничными условиями (6) равен нулю, а поэтому

$$M = \int_{\bar{T}_0}^{1} \bar{y}\, d\bar{T} \Big/ \int_{\bar{T}_0}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}. \tag{13}$$

Таким образом, для расчета параметра M, согласно формуле (13), необходимо знать функциональную зависимость $\bar{y}=\bar{y}(\bar{T})$ для определения интеграла, стоящего в числителе.

Сравнение формул (11) и (13) показывает, что в методе Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого в качестве функциональной зависимости $\bar{y}=\bar{y}(\bar{T})$ принято решение первого этапа (7).

Сравнение площадей, ограниченных истинными решениями $\bar{y}=\bar{y}(\bar{T})$ (см. рис. 1, 2 и 3) и осью абсцисс и площадей, ограниченных прямыми $\bar{y}=\bar{T}-\bar{T}_0$ и $\bar{T}=1$ и осью абсцисс, вполне достаточно для того, чтобы определить, во сколько раз точное применение метода Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого завышает параметр M по сравнению с его действительным значением. Эта разница будет тем меньше, чем больше значение параметра A. Однако для практически важных случаев завышение является весьма существенным. В среднем оно может быть оценено в 2—3 раза.

Но при оценке рассматриваемого метода весьма важно обратить внимание на то, что в формулах (11) и (13) есть также второй интеграл (в знаменателе), который определен Я. Б. Зельдовичем и Д. А. Франк-

Каменецким с погрешностями, почти в точности компенсирующими (для практически важного диапазона изменения определяющих параметров (A и $\overline{T}$)) погрешности определения первого интеграла.

Подынтегральная функция $f(\overline{T})$ несколько упрощается.

$$f(\overline{T}) \approx \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} (1-\overline{T})^{\nu} \exp(-A) \exp[-A(1-\overline{T})], \qquad (14)$$

т. е. плотность газа принята своим меньшим значением при температуре горения, а кроме того в показателе экспоненты принято

$$\frac{1}{\overline{T}} \approx 2 - \overline{T}, \qquad (15)$$

что весьма существенно увеличивает значение интеграла.

В связи с проведенными упрощениями получим

$$\int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \overline{T}_0^{\nu} \exp(-A)(1-\overline{T}_0) \int\limits_{0}^{1} z^{\nu} \exp(-\theta z)\, dz, \qquad (16)$$

где
$$z = \frac{1-\overline{T}}{1-\overline{T}_0}; \quad \theta = A(1-\overline{T}_0).$$

В соответствии с [2] принято, что

$$\int\limits_{0}^{1} z^{\nu} \exp(-\theta z)\, dz \approx \frac{\nu!}{\theta^{\nu+1}} \approx \frac{\nu!}{(1-\overline{T}_0)^{\nu+1} A^{\nu+1}}, \qquad (17)$$

а поэтому

$$\int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} \frac{\nu!}{A^{\nu+1}} \exp(-A). \qquad (18)$$

Е. С. Щетинков [3] приводит данные по соотношениям приближенных значений интеграла (16), рассчитанных по формуле (18), к соответствующим истинным значениям его, рассчитанным численным интегрированием (табл. 1)

Таблица 1

ν	A	$\overline{T}_0$	δ
1	4,16	0,125	1,82
	8,32	0,125	1,73
2	4,16	0,125	2,44
	8,32	0,125	1,67
	5,56	0,166	2,14
	11,12	0,166	1,67

Из совместного решения соотношений (11) и (18) следует, что

$$M \approx \frac{(1-\overline{T}_0)^{\nu+2} A^{\nu+1}}{2\nu!\, \overline{T}_0^{\nu}} \exp(A). \qquad (19)$$

Сделаны сравнения результатов расчетов по формуле (19) с результатами машинного подбора значений параметра M, удовлетворяющих условиям краевой задачи (5) и (6). В табл. 2 и 3 приведены отношения значений параметра M, определенных машиной, к его значениям, рассчитанным по формуле (19). В табл. 2 приведены результаты для реакции первого порядка ($\nu=1$), а в табл. 3 — для реакций второго порядка ($\nu=2$).

Анализ этих результатов свидетельствует о достаточно высокой точности формулы (19). Тем более, что при сравнении скоростей распространения пламени относительные ошибки в табл. 2 и 3 должны быть уменьшены вдвое.

При оценке формул для расчета скорости стационарного распространения пламени в тепловой теории Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого необходимо учитывать не только приближенный характер решения дифференциального уравнения теплопроводности, но и приближенное определение интеграла от функции скорости тепловыделения.

Таблица 2

$\overline{T}_0$	A: 4	6	8	10	15	20
0,1	1,15	1,12	1,10	1,08	1,06	1,05
0,2	0,98	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03
0,3	0,84	0,94	0,97	1,00	1,00	1,00

Таблица 3

$\overline{T}_0$	A: 4	6	8	10	15	20
0,1	1,13	1,12	1,10	1.09	1,07	1.06
0,2	0,92	0,99	1,01	1,02	1,02	1,02
0,3	—	0,82	0,89	0,95	0,97	1,00

Для практически важного диапазона изменения значений определяющих параметров приближенные формулы этой теории дают достаточно точные результаты.

В последующей работе [4] Я. Б. Зельдович, основываясь на том, что при изменении температуры на величину $\frac{RT^2}{E}$ константа скорости реакции изменяется в e раз, и полагая этот интервал малым по сравнению с интервалом $T_к - T_0 / E \gg RT_к$, определил значение интеграла (16)

$$\int_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \frac{1}{A} f_{max}, \tag{20}$$

где f_{max} — максимальное значение функции тепловыделения

$$f_{max} = \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} \left(\frac{1-\overline{T}_m}{\overline{T}_m}\right)^{\nu} \exp\left(\frac{A}{\overline{T}_m}\right). \tag{21}$$

Безразмерная температура максимального тепловыделения равна

$$\overline{T}_m = \frac{1}{1+\frac{\nu}{A}}.$$

В связи с этим

$$f_{max} = \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} \left(\frac{\nu}{A}\right)^{\nu} \exp(-A-\nu). \tag{22}$$

Если следовать рекомендации Я. Б. Зельдовича об упрощенном определении интеграла (16) по формуле (22), то параметр M определится так:

$$M = \frac{(1-\overline{T}_0)^{\nu+2} A^{\nu+1}}{2\nu^{\nu}\, \overline{T}_0^{\nu}} \exp(A+\nu). \tag{23}$$

Сравнение формулы (23) с формулой (19) показывает, что определение интеграла (16) в форме (22) дает завышение параметра M.

Таким образом, расчетные формулы тепловой теории газового горения [1] имеют достаточно высокую точность для практически важного диапазона изменения определяющих параметров. Однако, введение толщины теплового слоя (без химических реакций) вплоть до температуры горения является математическим приемом, примененным одновременно с соответствующим определением интеграла скорости тепловыделения. Как следует из результатов численного интегрирования, процесс химических превращений охватывает достаточно большой интервал изменения температуры.

Поступила в редакцию
27/VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий. ЖФХ, 1938, **XII**, 1.
2. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ОГИЗ, 1948.
3. Е. С. Щетинков. Физика горения газов. М., «Наука», 1965.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, **XII**, 11.

УДК 536.46

ОБ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

Д. А. Ваганов, С. И. Худяев

(Москва)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \omega \frac{du}{dx} - u_0 \eta^n F(u) = 0,$$
$$- \omega \frac{d\eta}{dx} + \eta^n F(u) = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$\text{при } x = -\infty \quad u = 0, \qquad \eta = 0,$$
$$\text{при } x = +\infty \quad u = u_0 > 0, \quad \eta = 1, \qquad (2)$$

которая описывает распространение фронта экзотермической реакции в конденсированной фазе [1]. Здесь η — относительная концентрация; u — безразмерная температура; $F(u)$ — температурный член скорости химической реакции; n — порядок реакции; x — координата. Координаты $x = \pm\infty$ отвечают соответственно начальному и конечному состоянию. Значения параметра $\omega > 0$, при которых задача (1)—(2) имеет решение, по аналогии с линейными уравнениями будем называть собственными значениями задачи. Собственные значения представляют собой безразмерную скорость распространения фронта. Свойства среды (теплопроводность, теплоемкость и плотность) считаются постоянными.

Система имеет первый интеграл

$$-\frac{du}{dx} + \omega (u_0 \eta - u) = \text{const}, \qquad (3)$$