

ОБ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

А. П. Ершов

(Новосибирск)

Рассматриваются нестационарные одномерные движения газа со взвешенными частицами. При дозвуковых относительных скоростях газа и частиц система уравнений имеет две комплексные характеристики [1], что эквивалентно неустойчивости решений задачи Коши. Физическая причина неустойчивости [2, 3] — повышение скорости фильтрации газа и соответственное падение давления в области, где возникла повышенная концентрация частиц. Появившийся градиент давления «загоняет» частицы в область сгущения, и возмущение экспоненциально растет. Скорость роста обратно пропорциональна длине волны возмущения.

Принципиальным является вопрос о разделении реальной физической неустойчивости течения и формальной неустойчивости, возникающей из-за неточностей описания двухфазной среды. Именно такой неточностью может объясняться сколь угодно быстрый рост коротковолновых возмущений. В [3] отмечено различие в постановках задач, допускающих постоянное проскальзывание фаз (взвешенные слои, осаждение суспензий) и существенно нестационарных, типа прохождения ударной волны через газозвесь. В последнем случае скорость относительного движения фаз стремится к нулю со временем, и при условии устранения нефизических пульсаций задача Коши может быть корректной. При численном решении таких задач это всегда подразумевается.

В [3, 4] в качестве стабилизирующего эффекта рассмотрено хаотическое движение частиц. В данной работе рассмотрена нестационарная задача при малой концентрации частиц, когда хаотические движения несущественны. Полученные уравнения явно включают усреднение межфазных сил и относительного содержания дисперсной фазы на размере частиц. Тем самым рост коротких волн подавляется.

1. Исходная система и предварительные оценки. Как известно [1,3], негиперболичность — внутреннее свойство подсистемы уравнений масс и импульсов. Поэтому ограничимся, как и в [3], случаем баротропного газа, что позволяет не рассматривать уравнения энергии. Тогда система уравнений имеет вид [3, 5]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial \rho \varphi / \partial t + \partial \rho \varphi u / \partial x &= 0, \quad \rho_s (\partial \alpha / \partial t + \partial \alpha v / \partial x) = 0, \\ \rho \varphi (\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x) + \varphi \partial p / \partial x &= -n f_D, \\ \rho_s \alpha (\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x) + \alpha \partial p / \partial x &= n f_D, \\ \varphi + \alpha &= 1, \quad \alpha = nV, \quad p = p(\rho), \end{aligned}$$

где φ и α — объемные доли газа и частиц; ρ — плотность газа; ρ_s — постоянная плотность частиц; u, v — скорости газа и частиц; p — давление газа; n — счетная концентрация частиц; V — объем частицы; f_D — сила межфазного трения, включающая в себя вязкое трение, донное сопротивление и силу присоединенных масс. Кроме силы f_D , учтена архимедова сила ($-V \partial p / \partial x$ для одной частицы). Предполагаем, что массовых сил, способных вызывать длительное проскальзывание, нет.

Будем считать, что f_D — функция параметров течения. Силой присоединенных масс, в которую входят производные, пренебрегаем, для чего необходимо условие $\rho_s \gg \rho$. Учет силы присоединенных масс, как показано в [3], качественно не меняет ситуации. Система (1.1) всегда имеет две действительные характеристики, при $\alpha \rightarrow 0$ соответствующие звуковым волнам в газе. Если относительная скорость фаз $w = u - v$ дозвуковая, оставшиеся две характеристики — комплексные. При $\alpha \ll 1$ можно написать для них явное выражение [1]

$$(1.2) \quad \lambda = dx/dt = v \pm i \beta w / \sqrt{1 - w^2/c^2},$$

где c — скорость звука в газе; $\beta = \sqrt{\alpha \rho / \rho_s} \ll 1$.

При решении задачи Коши комплексные характеристики приводят к экспоненциальному росту возмущений. Характерное время роста возму-

щения с волновым числом k

$$(1.3) \quad t_p \sim \sqrt{\frac{\varphi \rho_s}{\alpha \rho}} \frac{1}{kw}$$

Оценим теперь характерное время выравнивания скоростей фаз. Рассмотрим простейший случай, когда все величины не зависят от x . Тогда из (1.1)

$$\partial w / \partial t = -nf_D(1/\rho\varphi + 1/\rho_s\alpha).$$

Отсюда получаем оценку времени проскальзывания

$$(1.4) \quad t_e \sim (R/C_D w)(\rho/\rho_s + \alpha/\varphi)^{-1}.$$

Здесь R — размер частиц; C_D — характерное значение коэффициента сопротивления. Для «не слишком обтекаемых» частиц $C_D \geq 1$.

Начальное возмущение заметно возрастет при $t_p \leq t_e$. Сравнивая (1.3) и (1.4), находим, что при этом должно быть $kR \gg 1$. Развиваются возмущения с длиной волны $\leq R$. Скорость роста коротких волн может быть как угодно велика, так что задача Коши для системы (1.1) некорректна.

При численном решении неустойчивость может наблюдаться, если шаг расчетной сетки $\leq R$. Обычно выполняется обратное неравенство. При мелком шаге для гашения неустойчивости вводится искусственная или схемная вязкость на том основании, что уравнения (1.1) не пригодны для быстро меняющихся процессов. Возможно также сглаживание возникающих в решении пульсаций. Согласно [6], рост возмущений сглаженной (усредненной на размере, малом по сравнению с характерным размером течения) величины α ограничен, и в такой норме задача Коши для системы (1.1) корректна.

Альтернативой регуляризации решения в рамках системы типа (1.1) является уточнение исходной физической модели. Остановимся на роли хаотических движений частиц, приводящих к возникновению «давления» псевдогаза частиц и диффузионным эффектам [3, 4]. В отличие от концентрированных смесей с длительным проскальзыванием фаз, рассмотренных в [4], в разреженной смеси локальное равновесие хаотических движений с течением газа не успевает установиться.

При обтекании частиц газом на каждую частицу со стороны окружающих действуют силы гидродинамического взаимодействия через поток. При хаотическом расположении равнодействующая будет порядка силы взаимодействия соседних частиц. По результатам [7] сила взаимодействия сфер радиуса R , удаленных на расстояние $l \gg R$, в идеальной жидкости $f_i \sim 2\pi\rho w^2 R^6/l^4$. Это выражение примем как оценку реальной силы. Считая, что f_i действует в течение времени выравнивания скоростей фаз t_e , оценим набранную хаотическую скорость:

$$v_c \sim w(R/l)^4(1 + \alpha\rho_s/\varphi\rho)^{-1} \leq w\alpha^{4/3}.$$

Давление псевдогаза частиц $p_2 \sim \rho_s v_c^2 \sim \rho_s w^2 \alpha^{8/3}$. Согласно [3], учет p_2 при $\alpha \rightarrow 0$ не может обеспечить устойчивость, так как показатель степени при α $8/3 > 2$.

Хаотическое смещение частицы за время t_e

$$l_c \sim v_c t_e \sim \frac{R\alpha^{4/3}\rho}{\rho_s}(\rho/\rho_s + \alpha/\varphi)^{-2} < R\alpha^{1/3} \ll R.$$

Эта величина дает оценку длины волны, при которой начинают сказываться диффузионные эффекты. При достаточно малой α имеются волны, нарастающие за время t_e хотя и в конечном, но большое число раз.

Ниже показано, что в уточненной постановке ограничение роста возникает уже при длине волны порядка R . Поэтому в разреженной смеси диффузионный эффект не основной. Далее хаотическими движениями частиц будем пренебрегать.

2. Осредненные уравнения и межфазные соотношения. При исследовании коротковолновой устойчивости необходимы уравнения, пригодные для быстро меняющихся течений. Между тем обычно рассматриваются плавные течения, когда характерный размер L велик по сравнению с межчастичным расстоянием l . Это позволяет [8] выбрать представительный микрообъем с размером $\Delta x \gg l$ и провести по нему осреднение уравнений. Возможность осредненного подхода к течениям с быстрыми изменениями параметров может показаться проблематичной.

Искомая система уравнений может быть получена, если применить менее распространенный способ осреднения — по площади. Известно, что в плавных течениях совпадают средние по представительному микрообъему и содержащейся в нем площадке [8]. Действительно, потоки через границы контрольного объема — среднеповерхностные величины, и для замыкания уравнений существенно используется эквивалентность объемных и поверхностных средних. Представительная площадка, размеры которой значительно превышают l , пересекает большое количество частиц, и по ней возможно статистически достоверное осреднение. Вид общих уравнений сохранения не изменяется при переходе к среднеповерхностным величинам [9].

Однако область применимости таких величин шире, чем среднеобъемных. В одномерном, наиболее наглядном, случае осреднение по площадке с нормалью, направленной вдоль движения, позволяет рассматривать течения с резкими градиентами. Быстрые изменения величин поперек площадки не отразятся на процедуре осреднения в ее пределах.

Таким образом, для вывода уравнений может быть применен «тонкий» контрольный объем (фиг. 1). Толщина Δx меньше l и, возможно, меньше R . Частицы, имеющие общую часть с контрольным объемом, могут дважды пересекаться его границами. Процедура вывода не отличается от общепринятой. Приведем уравнения с необходимыми комментариями.

Для твердой фазы, поскольку пренебрегается хаотическими движениями частиц, удобно рассматривать их центры масс как материальные точки. Для концентрации центров n и скорости v имеем

$$(2.1) \quad \partial n / \partial t + \partial n v / \partial x = 0, \quad \rho_s V (\partial n v / \partial t + \partial n v^2 / \partial x) = n f,$$

где V — объем частицы; f — сила, с которой газ действует на частицу, центр которой в момент t находится в точке x .

Величины, относящиеся к газу, осредняются по сечениям газовой фазы, причем скорости u и u^2 осредняются с весом ρ ; α и φ будут обозначать доли сечения двухфазной среды плоскостью $x = \text{const}$. Как ясно из фиг. 2, частица, центр которой лежит на расстоянии ξ от контрольной плоскости, пересекается по площади $A(\xi)$, определяемой формой частицы. Тогда α можно записать как интеграл по поперечнику частицы:

$$(2.2) \quad \alpha(x, t) = \int_{-R}^R A(\xi) n(x + \xi, t) d\xi$$

или более коротко в виде интеграла по объему частицы V :

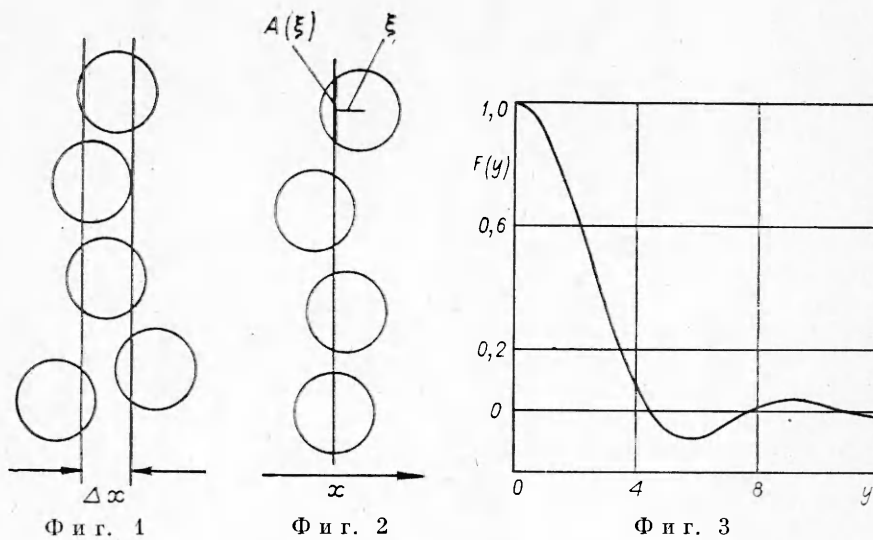
$$(2.3) \quad \alpha = \int_V n dV, \quad \varphi = 1 - \alpha.$$

Если n — медленно меняющаяся функция, (2.2), (2.3) сводятся к равенству $\alpha = nV$.

Уравнение массы газа имеет тот же вид, что в (1.1). Уравнение импульса запишем для среды в целом, чтобы не рассматривать межфазную силу внутри контрольного объема:

$$\frac{\partial \rho \varphi u}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varphi \langle u^2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (p \varphi - \tau \alpha) + G = 0.$$

Среднее по сечениям частиц напряжение в твердой фазе обозначено τ (для твердых частиц нельзя ввести микроскопических напряжений, но



средние по сечениям каждой частицы вполне определены воздействием газа); G обозначает лагранжеву скорость изменения импульса твердой фазы:

$$G = \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_V n v dV + \frac{\partial}{\partial x} \int_V n v^2 dV \right).$$

Это выражение можно получить аналогично (2.2), (2.3). Переносим дифференцирование под знак интеграла и используя (2.1), имеем

$$(2.4) \quad G = \frac{1}{V} \int_V n f dV.$$

Введем флуктуацию скорости газа $\delta u^2 = \langle u^2 \rangle - u^2$ и выделим из напряжения в твердой фазе среднее по газу давление: $\tau = -p - \tau'$. Знак поправки τ' выбран для удобства. После обычных преобразований получаем систему

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = f / \rho_s V, \\ \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varphi u}{\partial x} &= 0, \\ \rho \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \varphi \delta u^2 + \tau' \alpha) &= -G. \end{aligned}$$

В результате преобразования (2.4) уравнение импульса смеси приобрело вид, близкий к уравнению импульса газа, в которое G входит как объемная сила.

Система (2.5) сама по себе позволяет рассматривать быстро меняющиеся течения, если известна зависимость для f , δu^2 , τ' . Имеющиеся соотношения пригодны, с определенными оговорками, только для плавных течений. Тем не менее можно сделать некоторые предварительные выкладки.

Запишем микроскопический тензор напряжений в газе в виде

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \sigma'_{ik},$$

где σ' заметно отличается от нуля только вблизи частиц. Тогда сила f естественным образом разделяется на две части:

$$f = f_A + f_D = - \int_S p dS_1 + \int_S \sigma'_{1k} dS_k$$

(S — поверхность частицы). Среднее давление p формально определено

во всем пространстве, так что архимедову силу f_A , используя теорему Гаусса, можно преобразовать в интеграл по объему частицы:

$$(2.6) \quad f_A = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV.$$

Сила трения f_D возникает из-за отклонения давления в окрестности частицы от среднего и вязких напряжений в газе. Для плавных течений в пренебрежении силой присоединенных масс f_D обычно считают функцией средних величин.

Нет оснований распространять такую зависимость на быстропеременные течения. Поэтому система (2.5) с традиционным выражением для силы f_D пригодна только для течений с характерным размером $L \gg R$ (но возможно $L < l$). Вряд ли реально найти f_D для общего случая.

Далее, однако, будет рассмотрена более простая задача устойчивости плавного течения. Если имеется решение с наложенным на него малым коротковолновым возмущением, то разумно предположить, что f_D определяется в основном плавным течением, так как возмущения f_D из-за ее интегрального по поверхности частицы характера будут тем или иным способом сглажены. Поэтому при рассмотрении устойчивости примем, что f_D зависит от параметров газа, каким-то способом усредненных на размере частицы. Подробнее ограничения на вид f_D , необходимые для корректности, рассматриваются в п. 3.

3. Анализ устойчивости. Неустойчивая система (1.1) следует из (2.5) после принятия следующих предположений:

1) течение является плавным, так что $\alpha = nV$, $f_A = -V\partial p/\partial x$, $G = nf = -\alpha\partial p/\partial x + nf_D$;

2) сила трения f_D — известная функция параметров течения;

3) можно пренебречь флуктуацией скорости газа и добавочными напряжениями в частицах.

Первое предположение наиболее существенно и приводит к чисто дифференциальной системе. Попробуем, сохранив предположения 1 и 2, учесть поправку $\rho\delta u^2 + \tau'\alpha$ в уравнении импульса. Флуктуацию δu^2 , возникающую при обтекании частиц, для разреженной смеси и существенно дозвуковых скоростей можно записать в виде [8]

$$\delta u^2 = \delta_1(\alpha)w^2, \quad \delta_1 \sim \alpha.$$

При не слишком малых скоростях дополнительные напряжения в частицах $\tau' \sim \rho w^2$ — характерного перепада давления в газе вокруг частицы. Таким образом, имеем

$$(3.1) \quad \rho\delta u^2 + \tau'\alpha = \delta(\alpha)\rho(u-v)^2, \quad \delta(\alpha) \sim \alpha.$$

Существенно, что $\delta(\alpha) > 0$, так как в среднем $\tau' > 0$ (частица «сдавлена» ускоряющим потоком).

Анализ характеристик системы (1.1) с исправленным уравнением импульса газа

$$\rho\varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \varphi \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\rho(u-v)^2 = -nf_D$$

приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & [(u-\lambda)(u-\lambda+2\delta w/\varphi) - (c^2 + \delta w^2/\varphi)](v-\lambda)^2 = \\ & = 2c^2\beta^2 w(v-\lambda)\delta/\alpha + c^2\beta^2 [(u-\lambda)(u-\lambda+2\delta w/\varphi) + w^2\delta\delta/\alpha]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\delta \sim \alpha$, $d\delta/d\alpha \sim 1$ и > 0 , по-прежнему имеем две комплексные характеристики. В первом приближении по α они даются выражением

$$\lambda = v \pm i\beta w \sqrt{1 + d\delta/d\alpha} / \sqrt{1 - w^2/c^2}.$$

Мнимая часть λ , определяющая инкремент неустойчивости, того же порядка, что и в формуле (1.2). Таким образом, поправка вида (3.1) не из-

меняет ситуации: малый множитель δ делает ее несущественной в балансе сил газа. Далее этими эффектами будем пренебрегать; они могут быть важны только при $\alpha \sim \varphi$ или вблизи поверхностей разрыва, где $\tau'\alpha$ и δu^2 изменяются на расстоянии порядка R и рассмотренное слагаемое становится порядка силы G в правой части.

Покажем теперь, что основная причина некорректности — использование предположения о плавности течения. Действительно, система (1.1) не описывает коротких волн, и поэтому оценки инкремента на основании этой системы неприменимы. Например, в то время как естественное выражение для архимедовой силы (2.6) — интеграл от градиента давления по объему частицы, в (1.1) архимедова сила равна $-V\partial p/\partial x$, т. е. оставлен первый член ряда Тейлора. Очевидно, (2.6) будет сглаживать коротковолновые пульсации. То же относится к интегральным выражениям для α и G .

Рассмотрим устойчивость системы (2.3) — (2.6) в общем интегродифференциальном виде. Невозмущенное решение будем считать плавным с характерным размером $L \gg R$. Пульсациями δu^2 и τ' пренебрегаем. Возмущения отмечаются штрихом и пропорциональны $\exp(i(kx - \omega t))$. Исследуем короткие волны, так что $kL \gg 1$ (kR может быть порядка 1). В линейном приближении по малым возмущениям получаем из (2.5) систему

$$(3.2) \quad \begin{aligned} i\omega n' &= ik(n'v + v'n), \quad -(i\omega - ikv)v' = f'/\rho_s V, \\ -\rho\varphi(i\omega - iku)u' + ikp' &= -G', \\ -\varphi(i\omega - iku)p' + ik\rho\varphi u' + (i\omega - iku)\rho\alpha' &= 0. \end{aligned}$$

Так как $kL \gg 1$, слагаемые с производными невозмущенного решения опущены. Примем простейшую зависимость $p' = c^2\rho'$. Согласно (2.2), возмущение

$$\alpha' = n' \int_{-R}^R A(\xi) e^{ikh\xi} d\xi.$$

Для сферических частиц $A(\xi) = \pi(R^2 - \xi^2)$. Элементарное интегрирование приводит к выражению

$$(3.3) \quad \alpha' = (4\pi R^3/3)n'F(kR) = Vn'F(kR),$$

где F — формфактор частицы

$$(3.4) \quad F(y) = 3(\sin y/y^3 - \cos y/y^2).$$

График F изображен на фиг. 3. При $y \ll 1$ $F \approx 1 - y^2/10$, при $y \gg 1$ $F = O(y^{-2})$. Таким образом, α оказывается мало чувствительной к возмущениям с длиной волны, много меньшей R . Аналогично ведут себя и другие интегральные величины.

Из (2.4) имеем

$$G' = \frac{n'}{V} \int_{-R}^R A(\xi) f(x + \xi) e^{ikh\xi} d\xi + \frac{f'}{V} \int_{-R}^R A(\xi) n(x + \xi) e^{ikh\xi} d\xi.$$

В интегралах медленно меняющиеся функции f и n достаточно взять в точке x :

$$(3.5) \quad G' = (fn' + nf')F(kR).$$

Наконец, $f' = f'_A + f'_D$. Первое слагаемое из (2.6) выражается элементарно:

$$(3.6) \quad f'_A = -ikp'VF(kR).$$

К сожалению, для силы трения нет зависимостей, пригодных в течениях с короткими волнами. Поэтому при определении f'_D неизбежен некоторый произвол. Если для плавного течения известна зависимость

$f_D(\rho, w)$, то будем предполагать

$$(3.7) \quad f'_D = f_\rho \rho' H(kR) + f_w (u' H(kR) - v'), \quad f_\rho = \partial f_D / \partial \rho, \quad f_w = \partial f_D / \partial w.$$

Формфактор $H(kR)$, точный вид которого пока не устанавливаем, отражает возможное подавление возмущений силы трения при коротковолновых возмущениях потока газа из-за интегрального по поверхности характера силы f_D . $H(0) = 1$, возможна зависимость H от режима обтекания, т. е. чисел Рейнольдса и Маха течения. Скорость v' для данной частицы постоянна, и ее вклад не подавляется при всех k .

Обозначим $\lambda = \omega/k$, $f^* = f/ik\rho V$, $f_w^* = f_w/ik\rho V$, $f_\rho^* = f_\rho/ikV$ и введем малые параметры $r = \rho/\rho_s$, $\gamma = nV/\varphi$. Система (3.2) и соотношения (3.3) — (3.7) позволяют выписать дисперсионное уравнение

$$(3.8) \quad (\lambda - v)(\lambda - v - rf_w^*) \left[(\lambda - u)(\lambda - u - \gamma H F f_w^*) - \left(\frac{c^2}{\varphi} - \gamma F (c^2 F - H f_\rho^*) \right) \right] = r\gamma F \left[(c^2 F - H f_\rho^*) ((\lambda - u)^2 + f^* - f_w^*(\lambda - v)) - H f_w^*(\lambda - u) \left(\frac{c^2}{\varphi} + f^* - f_w^*(\lambda - v) \right) \right].$$

Если считать $F = 1$ и пренебречь f^* , f_w^* , f_ρ^* , то (3.8) сводится к уравнению характеристик системы (1.1).

Правая часть (3.8) содержит малый множитель $r\gamma$, а при $kR \gg 1$ спадает по крайней мере как $(kR)^{-3}$ (в случае, когда $H = O(1)$). Поэтому корни (3.8) близки к корням его левой части. Обозначая последние Λ_i , имеем

$$\Lambda_1 = v, \quad \Lambda_2 = v + rf_w^* = v + f_w/ik\rho_s V.$$

Скорость распространения этих волн близка к скорости частиц. Мнимая часть Λ_2 соответствует затуханию возмущения при $f_w > 0$. Это неравенство может нарушаться только в узкой области кризиса сопротивления. Инкремент возмущения $-rf_w/\rho V$ содержит малость r и не зависит от k . За конечное время, пока частица находится в области кризиса, рост возмущения будет ограничен, а с уменьшением w оно начнет затухать. Эта неустойчивость вполне реальна: быстрые частицы в области кризиса сопротивления тормозятся слабее, чем медленные, и начальная флуктуация скоростей частиц растет.

Корни $\Lambda_{3,4}$ квадратной скобки в левой части (3.8) приблизительно соответствуют звуковым волнам в газе, $\text{Re}\Lambda_{3,4} \approx u \pm c$. Выпишем мнимую часть в первом порядке по γ :

$$\text{Im}\Lambda_{3,4} = \gamma F H (f_w^* \pm f_\rho^*/c)/2.$$

С уменьшением w , практически уже при $w \sim c$, первое слагаемое в скобке преобладает. Инкремент поэтому будет порядка $-\gamma F H C_D w/R$. Из (1.4) видно, что за время t_e «набирается» показатель экспоненты роста возмущения порядка единицы.

При $w = 0$ f_w всегда положительна. Из физически разумного условия устойчивости состояния покоя обеих фаз для всех k получаем ограничение на вид формфактора H : при $w \rightarrow 0$ $H(kR)F(kR) \geq 0$. Это всегда выполняется, если положить $H = F$, для чего следует усреднять входящие в выражение для силы f_D плотность и скорость газа по объему частицы аналогично ряду величин, введенных выше. Такой выбор удобен в основном из-за простоты.

Уточненные корни λ_i находим, вычисляя правую часть (3.8), далее обозначаемую D , в точке Λ_i . Поправки к $\Lambda_{3,4}$ пропорциональны γr и поэтому несут незначительный вклад. Из-за близости $\Lambda_{1,2}$ уточненные $\lambda_{1,2}$ находятся сложнее:

$$\lambda_{1,2} = v + rf_w^*/2 \pm \sqrt{(rf_w^*/2)^2 + D/(w^2 - c^2)}.$$

При больших kR из-за спада D преобладает первое слагаемое под корнем; этот случай уже разобран. При $kR \sim 1$ или $\gamma > r$ может преобладать второе слагаемое. Тогда $\text{Im } \lambda_{1,2} \leq w \sqrt{\gamma r (kR)^{-3/2}}$ и за время проскальзывания рост возмущения также будет конечным.

В околосвуковом случае ($|w| \approx c$), когда близки три корня левой части (3.8), полученными оценками пользоваться нельзя. Наиболее существенно влияние D , когда три корня практически совпадают. Тогда $\lambda_{1,2,3} = \Lambda_{1,2,3} + (D/2c)^{1/3}$ и мнимая часть ω , по крайней мере, ограничена. Из-за малости D ограничен и рост волны. В существенно нестационарной задаче $|w|$ уменьшается со временем и для каждой частицы околосвуковая ситуация возможна в течение малого по сравнению с t_e времени.

4. Обсуждение результатов. Практически для принятой модели начальное коротковолновое возмущение может возрасти в несколько раз. Поэтому исходное плавное течение при наложении малого возмущения изменится мало и задача Коши будет корректной.

Система (2.3) — (2.6) может быть применена и для расчета течений с разрывами. Их устойчивость требует отдельного анализа. Однако разрыв, размазанный на расстоянии порядка R , для данной модели может рассматриваться как непрерывное течение; только при определении G' нельзя будет выносить n и f за знак интеграла. Это приведет к несущественному изменению вида формфактора в (3.5), причем все выводы, касающиеся поведения коротких волн, останутся в силе. Следует отметить, что физическая реальность модели на размерах порядка R определяется достоверностью зависимости для силы f_D .

Вместо интегродифференциальной системы на первый взгляд было бы проще использовать следующее по сравнению с (1.1) дифференциальное приближение. Это можно сделать, разложив в ряд Тейлора медленно меняющиеся функции в интегральных выражениях (2.3), (2.4), (2.6) и взяв первые не исчезающие поправки. Можно видеть, что это приведет к чисто дифференциальной системе с производными по координате вплоть до третьего порядка. Однако полученная таким образом система также приводит к некорректности. Действительно, при анализе устойчивости это равносильно замене формфактора $F(kR)$ на его длинноволновую асимптотику $1 - (kR)^2/10$, которая приводит к неограниченному росту возмущений при $kR \gg 1$. Отсюда ясно также, что дифференциальное приближение любого порядка для достаточно больших k будет неустойчиво и соответствующая задача Коши некорректна. Здесь мы встречаемся с ситуацией, принципиально отличной от однофазной газодинамики.

Отметим возможность обобщения метода на плавные трехмерные течения. Действительно, определения α , f_A и G легко записать в инвариантном виде как интегралы по объему частицы, не выделяя заранее какого-либо направления в пространстве. Переменные плавного течения можно понимать как среднеобъемные; они же будут средними по площадке, перпендикулярной распространению возмущения. Можно ожидать, что и в трехмерном случае сглаживание коротких волн обеспечит корректность задачи.

При очень малой концентрации частиц можно рассматривать движение газа независимо и затем по нему найти движение частиц. В данной работе рассмотрен случай, когда объемное содержание частиц α является малым, но учитываемым. Применимость подхода ограничена пренебрежением хаотическими движениями частиц, из-за чего единственный микроскопический параметр — размер частиц R . Хаотическое смещение частицы l_c должно быть много меньше R , а давление $p_2 \ll p$, ρw^2 . Как следует из оценок п. 1, для времени проскальзывания (1.4) можно пренебречь хаотическими движениями при $\alpha \leq 10^{-2} - 10^{-3}$. В концентрированных системах или при длительном проскальзывании хаотические движения будут существенны.

Поступила 2 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. — ПММ, 1965, т. 29, № 3.
2. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
3. Клебанов Л. А., Крошилин А. Е. и др. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы уравнений двухскоростного течения двухфазных сред. — ПММ, 1982, т. 46, № 1.
4. Воинов О. В., Петров А. Г. Устойчивость относительного движения фаз в течениях двухфазных сред. — ПМТФ, 1982, № 1.
5. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. — ПММ, 1956, т. 20, № 2.
6. Крайко А. И. О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 3.
7. Воинов О. В. О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости. — ПМТФ, 1973, № 4.
8. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
9. Panton R. Flow properties for the continuum viewpoint of a nonequilibrium gas-particle mixture. — J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, pt 2. Рус. пер. — Сб. пер. Механика, 1969, № 1.

УДК 532.517.4; 532.525.2

ИЗМЕРЕНИЕ УСЛОВНО ОСРЕДНЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛОСКОМ СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ

А. А. Прасковский

(Москва)

В настоящее время активно развиваются методы описания турбулентных течений на основе уравнений для плотностей распределения вероятностей (ПРВ) пульсаций скорости и концентрации [1, 2]. Такой подход к изучению турбулентности является особенно плодотворным при анализе течений с химическими реакциями. При замыкании уравнений для ПРВ принимаются некоторые гипотезы физического характера, требующие экспериментальной проверки. В частности, при замыкании уравнения для ПРВ пульсаций скорости потока в [1] на основании теории А. Н. Колмогорова — А. М. Обухова [3] высказана гипотеза о том, что в турбулентной жидкости диссипация энергии турбулентности, измеренная при фиксированном значении скорости, не зависит от этого значения. Справедливость этой гипотезы подтверждена результатами измерений дисперсии производной продольной составляющей скорости потока в плоскости симметрии следа за круговым цилиндром, где течение является полностью турбулентным [4].

Цель данной работы — проверить высказанную в [1] гипотезу в тех областях турбулентного течения, где коэффициент перемежаемости отличен от единицы, причем для оценки диссипации энергии турбулентности используются результаты измерений дисперсии производной по времени продольной составляющей скорости. В процессе измерений получен ряд других условно осредненных характеристик турбулентности потока, которые представляют самостоятельный интерес, некоторые из них также представлены в данной работе.

1. Измерения проводились в плоском следе за круговым цилиндром диаметром $d = 36$ мм на относительном расстоянии от цилиндра $x/d = 38,6$. Цилиндр устанавливался на срезе сопла диаметром 1200 мм в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью, степень турбулентности набегающего потока в отсутствие цилиндра составляла 0,4% на срезе сопла и 0,6% в сечении измерений. Опыты проводились при скорости потока $U_0 = 5,24$ м/с, что соответствовало значению числа Рейнольдса $Re = U_0 d / \nu = 1,26 \cdot 10^4$, где ν — кинематический коэффициент вязкости. Для измерения продольных составляющих средней скорости U и пульсаций скорости $u(t)$, где t — время, использовался термоанемометр постоянной температуры 55A01 фирмы «DISA» с датчиком 55A22 с проволокой из платинированного вольфрама диаметром 5 мкм и длиной 1 мм. Выходной сигнал термоанемометра записывался на измерительный ЧМ магнитограф «MR 800A Labcorder» в диапазоне частот 0—5 кГц, продолжительность кадра записи составляла 45 с. Записанные реализации пропускались через фильтры с крутизной характеристики 48 дБ/окта-