ПМТФ, № 3, 1968

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНОТОЧНОГО РАЗРЯДА В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ В УСЛОВИЯХ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. Рухадзе, С. А. Тригер

(Москва)

Исследованы равновесие и устойчивость сильноточного самосжатого разряда в плотной оптически непрозрачной плазме конечной проводимости с учетом диссипации энергии вследствие лучистой теплопроводности. В условиях большой теплопроводности температура плазмы оказывается практически однородной в сечении разряда, в то время как плотность и давление спадают от оси разряда достаточно быстро. Анализ спектров малых колебаний показал, что такой равновесный разряд при достаточно низкой проводимости плазмы является неустойчивым по отношению к коротковолновым гидродинамическим колебаниям (изгибы, перетяжки). Развитие неустойчивостей возможно лишь для длинноволновых возмущений в цилиндрическом разряде, а также в неравновесном разряде в условиях, когда время их нарастания меньше времени установления равновесия. Плоский равновесный разряд оказывается устойчивым. Цилиндрический же равновесный разряд в плотной низкотемпературной плазме более устойчив, чем разряд в высокотемпературной плазме.

В последнее время в литературе часто обсуждается вопрос об использовании сильноточных разрядов в плотной плазме в качестве источников света для «подкачки» ОКГ. Выбор размеров разряда при этом диктуется температурой излучающей поверхности плазмы, которая должна быть порядка $T \approx 3 \div 10$ *эв*. Очевидно, что поддержать плазму при такой температуре достаточно длительное время ($\approx$100 *мксек*) возможно лишь благодаря омическому нагреву. С другой стороны, известно, что в плотной плазме с током могут развиваться гидродинамические неустойчивости (изгибы, перетяжки, перегрев), приводящие к срыву тока и развалу плазмы (см., например, [1] и цитированную там литературу). Поэтому одной из основных проблем при использовании сильноточных разрядов в плазме в качестве источников света является проблема устойчивости разряда. Применение теории, изложенной в работе [1], к таким разрядам, однако, оказывается незаконным, так как там речь идет о не очень плотной, высокотемпературной и оптически прозрачной плазме в условиях, когда излучение не играет существенной роли в динамике развития разряда, в то время как для источников света наиболее эффективным является использование разрядов в плотной оптически непрозрачной плазме. В такой плазме вынос энергии вследствие лучистой теплопроводности может стать значительным и влиять на весь характер развития разряда. Кроме того, в рассматриваемой области относительно низких температур существенными являются также и эффекты, обусловленные конечной проводимостью плазмы (диффузия электрического и магнитного полей). Ниже приводится теоретическое исследование равновесия и устойчивости сильноточного разряда в плотной, оптически непрозрачной плазме в условиях конечной проводимости и большой лучистой теплопроводности.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Полная система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая плазму с учетом лучистой теплопроводности, записывается в виде [2]

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{4\pi}{c}\sigma\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right\}$$

$$-c\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) - \frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \operatorname{div}(\mathbf{q} + \mathbf{S}) = 0 \qquad (1.1)$$

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla P + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \qquad P = P(\rho,\ T)$$

Здесь $\mathbf{q}$ — поток энергии вещества, а S — поток излучения в оптически непрозрачной плазме [3]

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon + \frac{P}{\rho}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \frac{c^2}{(4\pi)^2\sigma}\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B} - (\mathbf{v}\cdot\sigma') - \chi\nabla T \quad (1.2)$$

$$\mathrm{S} = -{}^{16}/_{3}\sigma^\circ T^3 l(\rho,\ T)\nabla T$$

$\sigma^\circ = 5.67\cdot10^{-5}$ *эрг* $\cdot$ *см*$^{-2}$ *град*$^{-4}\cdot$*сек*$^{-1}$ — постоянная Стефана — Больцмана, а l — росселандов пробег света.

В условиях высоких температур ($T \approx 3$—10 *эв*) плазму можно считать полностью ионизованным идеальным газом, а следовательно,

$$P = (1+z)N\varkappa T = \frac{(1+z)\varkappa}{M}\rho T, \qquad \varepsilon = c_v T = \frac{3}{2}\frac{(1+z)\varkappa}{M}T = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho} \quad (1.3)$$

где M — масса ионов, а z — их эффективный заряд. При этом проводимость плазмы $\sigma = \alpha z^{-1}T^{3/2}$, где $\alpha = 4\cdot10^7$.

Наконец заметим, что в системе уравнений (1.1) пренебрегается энергией излучения по сравнению с внутренней (тепловой) энергией плазмы, что справедливо при условии

$$\frac{\sigma^\circ T^4}{c} \ll P \approx \rho\varepsilon \quad (1.4)$$

В рассматриваемой области температур это условие хорошо выполняется при плотностях $N \gtrsim 10^{16}$ *см*$^{-3}$. В дальнейшем будем также пренебрегать теплопроводностью плазмы (электронной) по сравнению с лучистой теплопроводностью, т. е. примем

$$\chi \ll \frac{16}{3}\sigma^\circ T^3 l \quad (1.5)$$

Это неравенство позволяет также пренебречь вязкими членами в уравнениях (1.1) и (1.2).

Все полученные ниже результаты, касающиеся устойчивости разряда, не зависят от явного вида функции l (ρ, T). Однако для оценок различных параметров плазмы будем пользоваться выражением [3]

$$l = \gamma_0 \frac{M^2 T^{7/2}}{z(1+z)^2\rho^2} \quad (1.6)$$

которое при $\gamma_0 \approx 4.4\cdot10^{22}$ справедливо для газа с многократно ионизованными атомами [1].

Используя выражение (1.6) и учитывая, что $\chi \approx e^{-2}\varkappa^2\ \sigma T$, условие (1.5) можно записать в виде

$$N \ll 10^{12}\ T^2 \quad (1.7)$$

В рассматриваемой области температур это неравенство хорошо выполняется вплоть до плотностей $N \lesssim 10^{21}$ *см*$^{-3}$.

2. Равновесное состояние разряда в плотной плазме. Легко видеть из системы (1.1), что в строго равновесном стационарном состоянии разряда электрическое поле $\mathbf{E}_0$ следует считать однородным по сечению плазмы (при $\mathbf{v}_0 = 0$). Давление, плотность, температура плазмы, ток и магнитное поле при этом, вообще говоря, являются функциями координат.

---

[1] Выражение (1.6) пригодно также для описания свободно-свободных переходов (тормозное излучение и поглощение) в полностью ионизованной плазме при $\gamma_0 \approx$ $\approx 4.8\cdot10^{24}$.

Пространственное распределение этих величин определяется уравнениями [1] (индексом нуль обозначены равновесные величины)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}_0=\frac{4\pi}{c}\sigma_0\mathbf{E}_0=\frac{4\pi\alpha}{cz}T_0^{3/2}\mathbf{E}_0,\quad \nabla P_0=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\times\mathbf{B}_0$$
$$\operatorname{div}\left\{\frac{c^2}{(4\pi)^2\sigma_0}\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\times\mathbf{B}_0-\frac{16}{3}\sigma^\circ T_0{}^3 l_0\nabla T_0\right\}=0,\quad P_0=\frac{(1+z)\,\varkappa}{M}\rho_0 T_0 \tag{2.1}$$

Ниже анализируются разряды двух типов: плоский (поверхностный) разряд и простой цилиндрический (Z-пинч). Точное решение уравнений (2.1) как в плоском, так и в цилиндрическом случае возможно лишь численно. Для рассматриваемой задачи, однако в точном решение этой системы нет необходимости. Дело в том, что разряд в плотной плазме может быть эффективно использован в качестве источника света только при высокой температуре поверхности плазмы. Это, в свою очередь, будет иметь место в условиях, когда температуру можно считать практически однородной по сечению плазмы. Считая температуру плазмы однородной, из первых трех уравнений системы (2.1), соответственно, для плоского и цилиндрического разрядов получаем

$$B_0=\sqrt{8\pi P_0(0)}\,\frac{x}{x_p},\quad P_0=P_0(0)\left(1-\frac{x^2}{x_p{}^2}\right),\quad x_p{}^2=\frac{P_0(0)\,c^2}{2\pi\sigma_0{}^2(0)\,E_0{}^2}$$
$$B_0=\sqrt{4\pi P_0(0)}\,\frac{r}{r_p},\quad P_0=P_0(0)\left(1-\frac{r^2}{r_p{}^2}\right),\quad r_p{}^2=\frac{P_0(0)\,c^2}{\pi\sigma_0{}^2(0)\,E_0{}^2} \tag{2.2}$$

Здесь $P_0(0)$ и $\sigma_0(0)$ — значения равновесного давления и равновесной проводимости плазмы на оси разряда. Используя соотношения (2.2) и (1.6), из последнего уравнения (2.1) можно найти распределение равновесной температуры по сечению плазмы

$$T_0=T_0(0)\left\{1-\frac{x^2}{x_T{}^2}\left(1-\frac{x^2}{x_p{}^2}+\frac{x^4}{3x_p{}^4}\right)\right\}$$
$$T_0=T_0(0)\left\{1-\frac{r^2}{r_T{}^2}\left(1-\frac{r^2}{r_p{}^2}+\frac{r^4}{3r_p{}^4}\right)\right\} \tag{2.3}$$

где

$$\frac{x_T{}^2}{x_p{}^2}=\frac{r_T{}^2}{r_p{}^2}=\frac{16}{3}\sigma^\circ\frac{4\pi\gamma_0\varkappa^2\sigma_0(0)\,T_0{}^{19/2}(0)}{zc^2p_0{}^3(0)} \tag{2.4}$$

Согласно принятому выше предположению, $x_T{}^2\gg x_p{}^2$. К этому неравенству необходимо добавить условие применимости приближения лучистой теплопроводности $x_p\gg l$ (или $r_p\gg l$). При $z=2$ эти неравенства можно записать в виде

$$10^7T_0{}^{8/3}\gg N\gg 10^{10}T_0{}^{9/5}E^{2/5} \tag{2.5}$$

Формулы (2.2) и (2.3) справедливы в области $x\lesssim x_p$ (или $r\lesssim r_p$). Вблизи $x\approx x_p$ давление и плотность плазмы сильно падают, а росселандов пробег неограниченно возрастает; плазма становится прозрачной. При $x_p\gg l$ область прозрачности плазмы пренебрежимо мала и не вносит существенного вклада в энергетический баланс разряда. Энергетический баланс определяется, с одной стороны, омическим нагревом, а с другой — излучением поверхности разряда. В данных условиях $x_T{}^2\gg x_p{}^2$ поток излучения с поверхности плазмы равен излучению черного тела с температурой T_0 (0).

В заключение заметим, что при исследовании равновесного состояния разряда существенным образом использовалась однородность электрического поля $\mathbf{E}_0$. Такое предположение, однако, справедливо лишь спустя достаточно длительное время (время скинирования, или, как будем его называть, время достижения равновесия) после наложения электрического поля на разряд. Поэтому ниже при рассмотрении задачи устойчивости разряда не будем привязываться к конкретному равновесному состоянию

[1] Эффективный заряд ионов является слабой функцией температуры. В рассматриваемой области можно принять $z\approx T^\beta$, где $\beta\lesssim 0.5$, причем по величине $z\approx 2$. Ниже, однако, этой зависимостью z от T пренебрегается.

(2.2), (2.3), допуская, вообще говоря, произвольное неоднородное распределение тока в плазме в квазистационарном состоянии.

3. Устойчивость плоского разряда. Перейдем теперь к исследованию устойчивости разряда по отношению к малым возмущениям

$$\rho \to \rho_0 + \rho_1, \quad T \to T_0 + T_1, \quad P \to P_0 + P_1, \quad \mathbf{B} \to \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{v}$$

Линеаризуем систему уравнений (1.1) — (1.3), принимая возмущенные величины в плоском разряде зависящими от времени и координат в виде $f(x)\exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$. В результате получим

$$-i\omega\rho_1 + \operatorname{div}\rho_0\mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}_1 = 0, \tag{3.1}$$

$$-i\omega\rho_0\mathbf{v} = -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\times\mathbf{B}_1 + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_0$$

$$i\omega\left(\frac{3}{2}P_1 + \frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{B}_1}{4\pi}\right) = \operatorname{div}(\mathbf{q}_1 + \mathrm{S}_1), \quad P_1 = \frac{\varkappa}{M}(1+z)(\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0)$$

$$-i\omega\mathbf{B}_1 = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0) - \frac{c^2}{4\pi}\left\{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot}\mathbf{B}_1\right) - \frac{3}{2}\operatorname{rot}\left(\frac{T_1}{\sigma_0 T_0}\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\right)\right\}$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{5}{2}\mathbf{v}P_0 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}_0\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0) - \frac{c^2}{(4\pi)^2\sigma_0}\left\{\mathbf{B}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_0 + \right.$$

$$\left. + \mathbf{B}_0\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_1 - \frac{3}{2}\frac{T_1}{T_0}\mathbf{B}_0\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_0\right\}$$

$$\mathrm{S}_1 = -\frac{16}{3}\sigma^0 T_0^3 l_0\left\{\nabla T_1 + \left(\frac{\partial\ln l_0}{\partial T_0}T_1 + \frac{\partial\ln l_0}{\partial\rho_0}\rho_1\right)\nabla T_0\right\}$$

Анализ системы (3.1) в общем случае весьма затруднителен. Для того чтобы выяснить роль различных процессов в развитии колебаний, проанализируем эту систему вначале в приближении геометрической оптики [4], т. е. для колебаний с длиной волны меньше характерного размера неоднородности плазмы

$$k_x x_p \sim \frac{x_p}{\lambda_x} \gg 1 \tag{3.2}$$

Здесь $\lambda_x \sim k_x^{-1}$ — длина волны колебаний в направлении неоднородности. Для применимости приближения лучистой теплопроводности, кроме того, должно выполняться неравенство $\lambda_x \gg l_0$. В нулевом приближении геометрической оптики из системы (3.1) получим следующие дисперсионные уравнения колебаний (точнее, уравнения эйконала [4])

$$1 + i\frac{c^2k^2}{4\pi\sigma_0\omega} = 0, \quad \omega^2 - k^2 v_a^2\cos^2\alpha + i\frac{c^2k^2\omega}{4\pi\sigma_0} = 0, \quad v_a^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}$$

$$\frac{32}{9}\frac{ik^2}{\omega}\sigma^0 T_0^3 l_0\left\{1 - \frac{k^2(v_a^2+v_s^2)}{\omega^2} + \frac{k^4 v_a^2 v_s^2\cos^2\alpha}{\omega^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{ic^2k^2}{4\pi\sigma_0\omega}\left(1 - \frac{k^2v_s^2}{\omega^2}\right)\right\} + \rho_0\frac{\varkappa(1+z)}{M}\left\{1 - \frac{k^2}{\omega^2}\left(v_a^2 + \frac{5}{3}v_s^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{3}\frac{k^4v_a^2v_s^2\cos^2\alpha}{\omega^4} + \frac{ic^2k^2}{4\pi\sigma_0\omega}\left(1 - \frac{5}{3}\frac{k^2v_s^2}{\omega^2}\right)\right\} = 0, \quad v_s^2 = \frac{\varkappa(1+z)T_0}{M} \tag{3.3}$$

Здесь α — угол между направлением распространения волны и магнитным полем, v_s — скорость изотермического звука в плазме. v_a — альфвеновская скорость. Заметим, что уравнения (3.3), по существу, описывают спектры колебаний однородной магнитоактивной плазмы с учетом лучистой теплопроводности и конечной проводимости. Первое из этих уравнений описывает проникновение поперечного (вихревого) поля в плазму, второе — представляет собой дисперсионное уравнение для альфвеновских волн и, наконец, третье уравнение соответствует быстрым и медленным магнитозвуковым волнам в плазме. Легко показать, что колебания, описываемые этими уравнениями, затухают со временем ($\gamma = \mathrm{Jm}\,\omega < 0$), причем в условиях слабой лучистой теплопроводности, когда $k^2 f_0 \sigma^\circ T_0^4 \ll P_0\omega$, они носят адиабатический характер и декремент их затухания $\gamma \sim l_0$; в обратном же пределе большой лучистой теплопроводности колебания плазмы являются изотермическими и декремент их затухания $\gamma \sim l_0^{-1}$.

Таким образом, в нулевом приближении геометрической оптики разряд устойчив. Это означает, что разряд устойчив по отношению к коротковолновым возмущениям с длиной волны значительно меньше размеров неоднородности плазмы. Однако, при этом возможны неустойчивости разряда по отношению к раскачке длинноволновых возмущений с длиной волны $\lambda_x \gtrsim x_p$, для описания которых не применимо приближение геометрической оптики. Очевидно, что частоты (а следовательно, и инкременты нарастания) таких колебаний должны удовлетворять условию $|\omega| \lesssim (v_s + v_a) / x_p \approx v_s/x_p$ (так как, согласно равновесию, $v_a \approx v_s$). Учтем теперь основное требование к разряду — высокую эффективность излучения, которая имеет место при большой лучистой теплопроводности, когда $x_T^2 \gg x_p^2$. Это неравенство позволяет в уравнениях (3.1) пренебречь неоднородностью температуры T_0 по сравнению с неоднородностью плотности, давления и магнитного поля в плазме. Если, кроме того, выполнено условие

$$\frac{\sigma^\circ T_0^4 l_0}{\omega p_0 x_p^2} \approx \frac{x_T^2}{x_p^2} \frac{c^2}{\sigma_0 v_s x_p} \gg 1 \tag{3.4}$$

то в процессе колебаний возмущение температуры благодаря высокой лучистой теплопроводности будет успевать релаксировать, т. е. в уравнениях (3.1) можно положить $T_1 = 0$. В результате таких упрощений систему (3.1) можно свести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для величины

$$v = p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{4\pi}$$

которое, однако, все еще оказывается достаточно сложным и трудно обозримым. Проанализировать это уравнение удается в двух противоположных предельных случаях:

а) $c^2 \Delta \mathbf{B}_1 \gg 4\pi\sigma_0\omega\mathbf{B}_1$ (т. е. $\sigma_0 \to 0$), когда оно сводится к виду

$$(\omega^2 + v_s^2 \Delta) v = 0 \tag{3.5}$$

б) при $c^2 \Delta \mathbf{B}_1 \ll 4\pi\sigma_0\omega\mathbf{B}_1$ (т. е. $\sigma_0 \to \infty$), когда оно принимает вид

$$[\omega^4 + (v_a^2 + v_s^2)\,\omega^2\Delta - k_y^2 v_s^2 v_a^2 \Delta]\, v + (\omega^2 - k_y^2 v_a^2) \times$$
$$\times \left[\frac{B_0}{4\pi} \omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_0}{\rho_0} \frac{1}{\omega^2 - k_y^2 v_a^2} \right) + \frac{2 k_y^2 v_s^2}{\omega^2 - k_y^2 v_a^2} \frac{B_0}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B_0}{\partial x} \right] \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

Уравнения (3.5) и (3.6) должны быть дополнены граничными условиями. Они могут быть получены из требования сохранения полного тока и ограниченности ускорения границы плазмы при возмущениях. При $k_y = 0$, а $k_z \neq 0$ (возмущения типа перетяжек) такие граничные условия следуют непосредственно из уравнений (3.1) и имеют вид

$$v = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = x_p \tag{3.7}$$

Легко видеть, что уравнение (3.5) при любых недиссипативных граничных условиях имеет лишь положительный спектр собственных значений ω^2, соответствующий устойчивым колебаниям плазмы (звуковые волны). Иное положение имеет место для колебаний, описываемых уравнением (3.6), основные моды которого, как увидим ниже, в определенных условиях могут быть неустойчивыми.

При помощи замены

$$v = y \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{x} \varphi(x)\, dx\right) \tag{3.8}$$

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{4\pi} \frac{\omega^2 - k_y^2 v_a^2}{\omega^2(v_a^2 + v_s^2) - k_y^2 v_a^2 v_s^2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_0}{\rho_0} \frac{\omega^2}{\omega^2 - k_y^2 v_a^2}\right) + \frac{2k_y^2 v_s^2}{\omega^2 - k_y^2 v_a^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial B_0}{\partial x}\right]$$

уравнение (3.6) сводится к виду уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{\frac{\omega^4}{\omega^2(v_s^2 + v_a^2) - k_y^2 v_s^2 v_a^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\varphi^2}{4} - (k_y^2 + k_z^2)\right\} y = 0 \tag{3.9}$$

Неустойчивым колебаниям плазмы соответствуют такие собственные значения этого уравнения ω^2, для которых $\operatorname{Jm} \omega > 0$.

Для мод с $k_y = 0$ (перетяжки) граничные условия (3.7) сводятся к требованию $y(x = \pm x_p) = 0$. Учитывая это, находим, что неустойчивыми такие колебания могут быть лишь при условии

$$U(x) = k_z^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{B_0}{4\pi(v_s^2 + v_a^2)} \frac{\partial}{\partial x}\frac{B_0}{\rho_0}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{B_0}{4\pi(v_s^2 + v_a^2)} \frac{\partial}{\partial x}\frac{B_0}{\rho_0}\right]^2 < 0 \tag{3.10}$$

Для равновесного разряда, описываемого формулами (2.2) и (2.3), всегда $U(x) > 0$, т. е. такой разряд устойчив [5]. Неустойчивым может быть лишь неравновесный разряд, когда какое-либо из условий (2.1) не выполнено. Так, например, в случае плазмы высокой проводимости, когда $\sigma_0 \to \infty$, разрядное поле $\mathbf{E}_0$ довольно медленно проникает в плазму (по сравнению со временем сжатия) и может иметь место явно выраженное скинирование тока $\mathbf{j}_0(x)$, в то время как давление плазмы P_0 успевает прийти в равновесие с магнитным давлением. При этом граничные условия (3.7), вообще говоря, не имеют места, однако локальный анализ устойчивости, основанный на неравенстве (3.10), показывает, что разряд может быть неустойчивым, если $3P_0'^2 < 2P_0 P_0''$. Инкремент нарастания неустойчивости при этом может стать порядка $\gamma \sim v_s / x_p$.

Для мод с $k_y \neq 0$ анализ устойчивости решений уравнения (3.6) является более громоздким. Однако основной вывод, касающийся мод с $k_y = 0$, как было показано в работе [5], остается в силе и для мод с $k_y \neq 0$. Именно, плоский равновесный разряд оказывается устойчивым и по отношению к таким возмущениям; неравновесный же разряд может быть неустойчивым, причем максимальный инкремент развития неустойчивости $\gamma_{\max} \lesssim v_s / x_p$. Поэтому очевидно, что реальный разряд будет устойчивым, если время развития неустойчивости больше времени проникновения электрического поля в плазму (т. е. времени достижения равновесия,

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma_0 v_s} > x_p \tag{3.11}$$

Это неравенство выполняется в условиях $N \lesssim 10^{28}\, A E_0^2 T_0^{-2}$, где A — атомный порядковый номер ионов плазмы.

4. Устойчивость цилиндрического разряда. Проведенный выше анализ устойчивости плоского разряда в плотной плазме легко обобщается на случай плазменного цилиндра с током, в котором зависимость возмущенных величин от времени и координат следует искать в виде произведения $f(r) \exp(-i\omega t + im\varphi + ik_z z)$, где m — азимутальное волновое число. Очевидно, что спектр колебаний цилиндрически неоднородной плазмы в приближении геометрической оптики не отличается от спектра колебаний плоского слоя (за исключением тривиальной замены $k_y \to m/r$).

Поэтому здесь рассматриваются лишь основные моды колебаний, для исследования которых приближение геометрической оптики неприменимо. Так же как и в плоском случае, будем считать выполнимым условие (3.4) (с заменой x_p и x_T на r_p и r_T, соответственно) и пренебрежем возмущением температуры плазмы, $T_1 = 0$. В результате систему уравнений (3.1) можно свести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для величины

$$v = \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{2\pi r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{4\pi}\right)$$

В плазме высокой проводимости, когда $c^2 \Delta \mathbf{B}_1 \ll 4\pi\sigma_0\omega\, \mathbf{B}_1$ (т. е. $\sigma_0 \to \infty$), уравнение для v сводится к уравнению второго порядка

$$\left(\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k_z^2 r^2 v_a^2}{\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2}\right) \frac{r^2(\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2)}{k_z^2 v_s^2 r^4 \omega^2 + (m^2 v_s^2 - \omega^2 r^2)(\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2 - k_z^2 r^2 v_a^2)} \times$$

$$\times \left[\frac{\omega^2 B_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2 B_0}{\rho_0(\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2)} - \frac{m^2 v_s^2}{r}\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{\rho_0(\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2)} + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + \frac{v_s^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\omega^2 r^3}{\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2}\right] v - \left(\frac{B_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2 B_0}{\rho_0(\omega^2 r^2 - m^2 v_a^2)} + \frac{r}{2}\right) v = 0$$

Требование ограниченности возмущений в области $r \leqslant r_p$ оказывается достаточным для однозначного определения спектра собственных значений ω^2. Это требование эквивалентно условиям сохранения полного тока и ограниченности ускорения границы плазмы при возмущениях. Для мод с $m = 0$, $k_z \neq 0$ (перетяжки) уравнение (4.1) было подробно исследовано в работе [6], где было показано, что в равновесном цилиндрическом разряде развиваются неустойчивости, инкременты нарастания которых в длинноволновом пределе ($k_z r_p < 1$) равны

$$\gamma^2 = -\omega^2 = \frac{4k_z^2 v_s^2}{(\pi n + 0.75\pi)^2} \ll \frac{v_s^2}{r_p^2}, \quad \gamma^2 = -\omega^2 = 2\sqrt{3}\,\frac{|k_z|\, v_s^2}{r_p} \ll \frac{v_s^2}{r_p^2} \tag{4.2}$$

соответственно, для высоких ($n \geqslant 1$) и основной ($n = 0$) мод колебаний. Аналогичными формулами описываются неустойчивости и на более коротковолновых колебаниях ($k_z r_p > 1$), для которых $\gamma \lesssim v_s / r_p$. Можно показать, что в идеально проводящей плазме такого же порядка инкременты нарастания колебаний для мод с $m \neq 0$ (перегибы).

Обратимся теперь к случаю плохопроводящей плазмы с током, когда $c^2 \Delta \mathbf{B}_1 \gg 4\pi\sigma_0\omega\mathbf{B}_1$ (т. е. $\sigma_0 \to 0$), и покажем, что в такой плазме неустойчивыми могут быть колебания только основной моды ($n = 0$). Ограничимся исследованием лишь перетяжек с $m = 0$. В этом случае для анализа устойчивости плазмы удобно исходить из системы (3.1), записанной в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - k_z^2\right)\chi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{v_s^2} - k_z^2\right) u = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r\omega^2}{2v_s^2}\right)\chi \tag{4.3}$$

$$\chi = \frac{B_0 B_{1\varphi}}{2\pi r}, \quad u = p_1 + \frac{B_0 B_{1\varphi}}{4\pi}$$

Граничные условия, соответствующие сохранению полного тока и ограниченности ускорения границы плазмы при возмущениях, при этом принимают вид

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \chi\right) = 0 \quad \text{при } r = r_p \tag{4.4}$$

В области $\omega^2 < k_z^2 v_s^2$, содержащей и неустойчивые решения ($\omega^2 < 0$), система (4.3), (4.4) сводится к следующему дисперсионному уравнению:

$$I_0(\beta r_p)\left[I_1(\alpha r_p) + \frac{d}{dr_p}\Phi(r_p)\right] - \beta I_1(\beta r_p)\Phi(r_p) = 0 \qquad (4.5)$$

$$\Phi(r_p) = -\frac{2\alpha v_s^2}{\omega^2} I_0(\alpha r_p) + \frac{r_p}{2} I_1(\alpha r_p), \quad \alpha = |k_z|, \ \beta = |\sqrt{k_z^2 - \omega^2/v_s^2}|$$

Легко показать, что в пределе длинных волн, когда $\alpha r_p \ll 1$ и $\beta r_p \ll 1$, уравнение (4.5) допускает существование неустойчивых колебаний только на основной моде ($n = 0$), причем инкремент их нарастания такой же, как и в идеально проводящей плазме, т. е. определяется вторым выражением (4.2). Коротковолновые колебания также неустойчивы. Но они не представляют большой опасности, затухая в объеме плазмы.

5. **Обсуждение результатов и выводы**. Подводя итог проведенному выше анализу равновесия и устойчивости сильноточного разряда в плотной плазме, обсудим основные результаты с точки зрения использования такого разряда в качестве источника света для подкачки ОКГ. От источника света в первую очередь требуются высокая температура излучательной поверхности и достаточно длительный устойчивый режим работы. Именно, исходя из этих требований, был выбран разряд в оптически непрозрачной плотной плазме с большой лучистой теплопроводностью. Равновесное состояние разряда в такой плазме определяется формулами (2.2) и (2.3), причем $r_T \gg r_p \gg l$. Для газа с многократно ионизованными атомами при высокой температуре (когда $T_0 \approx 3$—10 *эв*) эти неравенства записываются в виде (2.5) и хорошо выполняются в широкой области значений плотностей плазмы $10^{17} < N < 10^{20}$ *см*$^{-3}$ (при $E_0 \approx 0.3 \div 1$ CGSE).

Анализ устойчивости разряда по отношению к малым гидродинамическим возмущениям (типа перегрева, изгибов и перетяжек) показал, что благодаря высокой лучистой теплопроводности возмущения температуры в плотной плазме очень быстро релаксируют при выполнении условия (3.4) и неустойчивости типа перегрева отсутствуют. Что же касается неустойчивостей перетяжек и изгибов, то в отличие от плазмы высокой проводимости, в которой неустойчивыми являются как длинноволновые, так и коротковолновые колебания, в плазме низкой проводимости, когда выполнено условие (3.11), объемно неустойчивыми могут быть лишь длинноволновые колебания ($k_z r_p \ll 1$). При этом плоский разряд является полностью устойчивым. Цилиндрический же разряд оказывается неустойчивым только на основной моде колебаний.

Из всего изложенного следует, что в качестве источника света целесообразно использовать разряд на поверхности полого цилиндра с большим радиусом $R \approx (5$—$10)$ *см*. Максимальный инкремент развития неустойчивостей в таком разряде будет порядка $\gamma_{\max} \lesssim v_s / R$. В рассматриваемой области температур для тяжелого газа ($v_s \approx 10^5$ *см/сек*) при этом имеем $\gamma_{\max} \approx (2$—$1)\cdot 10^4$ *сек*$^{-1}$, что соответствует требуемой временем устойчивости разряда 50—100 *м/сек*.

В заключение отметим, что формулы (2.2) — (2.4) теряют смысл при $x = x_p$ (или $r \approx r_p$). Дело в том, что с уменьшением плотности плазмы резко возрастает росселандов пробег света и используемое выше приближение лучистой теплопроводности перестает быть справедливым. Разряд в плотной непрозрачной плазме всегда окружен слоем прозрачной плазмы, по которому течет ток. При $x_p \gg l$ этот слой не вносит существенного вклада в энергетический баланс разряда и в характере его излучения. Однако он может играть значительную роль в устойчивости разряда.

Авторы благодарят Г. В. Михайлова и В. Б. Розанова, с которыми неоднократно обсуждались рассмотренные в работе вопросы.

Поступила 17 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы. Вопросы теории плазмы, 1963, т. 2, стр. 132.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
4. Рухадзе А. А., Силин В. П. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Усп. физ. н., 1964, т. 82, стр. 499.
5. Kruskal M., Schwarzschild M. Some instabilities of a completely ionized plasma, Proc. Roy. Soc., 1952, A223, p. 348.
6. Трубников Б. А. О неустойчивости цилиндра плазмы. Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», 1958, т. 1, стр. 289.