фиг. 2) и Ag_2O (*4*, *9*, *13*, *14* на фиг. 2). Наблюдаются также и линии, не относящиеся к вышеперечисленным веществам (*1*, *2*, *3*, *5*, *10*, *11* на фиг. 2).

Результаты вычислений параметров решеток для веществ по рентгенограммам приведены в таблице в сравнении с теоретически вычисленными, взятыми из работ [7, 8]. Там же приводятся данные по электронограммам.

Из полученных данных следует, что в условиях описываемых экспериментов на поверхности датчиков в основном происходят реакции окисления. Об этом наглядно свидетельствуют данные рентгеноструктурного и электронно-графического анализов. На рентгенограммах имеются линии Ag, AgO и Ag_2O, что указывает на наличие этих компонентов на поверхности датчиков в кристаллической фазе. Существование на поверхности датчиков трех различных фаз подтверждается и данными электронно-графического анализа. Это подтверждается сравнением микроструктур поверхностей датчиков (фиг. 1, *а*, *б*) и результатами, приведенными в таблице, полученными из обработок электронограмм. Отсутствие на электронограммах ряда линий AgO и Ag_2O, наблюдаемых на рентгенограммах, объясняется спецификой метода исследования. Линии на рентгенограммах (*1*, *2*, *3*, *5*, *10*, *11* на фиг. 2), по-видимому, являются либо линиями $AgNO_3$, либо Ag_2CO_3 [8].

Из приведенных результатов следует, что изменения электрического сопротивления датчиков [1, 3] и полная гибель атомов кислорода [2] связаны с окислением серебра на поверхности.

В заключение авторы благодарят Г. Поца, Д. Варшани, Я. Бела, Е. Буца, Ю. А. Брагину, С. С. Мищенко за помощь в работе.

Поступила 3 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайнутдинов Р. Д., Токтомышев С. Ж. К измерениям концентрации атомарного кислорода в диссоциированных газах. ПМТФ, 1972, № 2.
2. Токтомышев С. Ж. О коэффициенте гибели атомарного кислорода на твердых поверхностях. Кинетика и катализ, 1969, т. 10, вып. 5, стр. 1109—1111.
3. Henderson W. R., Schiff H. I. A simple sensor for the measurement of atomic oxygen height profiles in the upper atmosphere. Planet. Space Sci., 1970, vol. 18, No. 10.
4. Henderson W. R. D-region atomic oxygen measurement. J. Geophys. Res., 1971, vol. 76, No. 13. pp. 3166, 3167.
5. Брагин Ю. А., Токтомышев С. Ж., Кихтенко В. Н. Методы измерения коэффициента гибели атомарных частиц кислорода на твердых поверхностях. Тр. Центр. аэролог. обсерв., 1969, вып. 82.
6. Кихтенко В. Н., Токтомышев С. Ж. О химических детекторах атомарного кислорода в разреженных газах. Тр. Центр. аэролог. обсерв., 1969, вып. 91.
7. Горелик С. С., Расторгуев Л. Н., Скаков Ю. А. Рентгенографический и электронооптический анализы. М., «Металлургия», 1970.
8. Миркин Л. И. Справочник по рентгеноструктурному анализу поликристаллов. М., Физматгиз, 1961.
9. Токтомышев С. Ж. Об измерении концентрации атомарных частиц кислорода в диссоциированных газах. ПМТФ, 1970, № 1.

УДК 535.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ОСНОВНОЙ МОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

А. А. Колоколов

(Москва)

В параболическом приближении найден критерий устойчивости основной моды скалярного волнового уравнения для кубичной безынерционной среды. С помощью полученного критерия доказана устойчивость одномерной и двумерной мод и неустойчивость трехмерной моды относительно малых возмущений амплитуды и фазы.

Одним из важных вопросов в теории самофокусировки является устойчивость стационарных решений нелинейного волнового уравнения [1–4]. В данной работе исследована устойчивость основной моды в одномерном, двумерном и трехмерном случаях относительно малых возмущений амплитуды и фазы для кубичной безынерционной среды.

Уравнение, описывающее распространение огибающей электрического поля E светового пучка, в параболическом приближении имеет вид [1]

$$i\frac{\partial E}{\partial z}+\Delta_2 E+|E|^2E=0 \qquad \left(\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

где волна распространяется вдоль оси z.

Уравнение (1) при $\gamma>0$ имеет счетное множество решений вида $E_n = A_n(r)\exp(i\gamma z)$, где A_n удовлетворяет уравнению [5]

$$\frac{d^2A_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dA_n}{dr}-\gamma A_n+A_n{}^3=0 \tag{2}$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{dA_n}{dr}\right|_{r=0}=0, \quad A_n(\infty)=0, \quad r=(x^2+y^2)^{1/2} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

Рассмотрим устойчивость основной моды $E_0 = A_0\exp(i\gamma z)$, для которой $A_0>0$ при всех r и оператор $L_0=-\Delta_2+\gamma-A_0{}^2$ является неотрицательным, где A_0 есть собственная функция L_0 с нулевым собственным значением. Поскольку A_0 нигде в нуль не обращается, то она является основной функцией оператора L_0, а нулевое собственное значение есть наименьшее. Подставляя в (1)

$$E=(A_0+\delta\psi)\exp(i\gamma z) \quad (\delta\Psi=(u+iv)\exp(\Omega z))$$

и оставляя только члены первого порядка по u и v, получим

$$\Omega u=L_0v, \qquad \Omega v=-L_1u \qquad (L_1=L_0-2A_0{}^2) \tag{3}$$

Исключая из уравнений v, приходим к задаче на собственные значения [3]

$$-\Omega^2u=L_0L_1u \tag{4}$$

Поскольку оператор L_0 имеет нулевое собственное значение, то в полном гильбертовом пространстве ограниченный обратный оператор $L_0{}^{-1}$ не существует. Из (3) следует, что

$$\Omega\langle A_0|u\rangle=\langle A_0\mid L_0u\rangle = \langle L_0A_0|u\rangle=0 \quad \left(\langle A_0|u\rangle=\int A_0u\,dx\,dy\right)$$

поэтому при $\Omega\neq 0$ все решения u системы (3) ортогональны к A_0 (здесь $\langle A_0|u\rangle$ — скалярное произведение). Поскольку рассматриваются решения системы (3) при $\Omega\neq 0$, то уравнение (4) достаточно исследовать на подпространстве функций, ортогональных к A_0. В этом подпространстве к (4) можно применить обратный оператор $L_0{}^{-1}$

$$-\Omega^2L_0{}^{-1}u=L_1u, \qquad \langle A_0|u\rangle=0$$

Из вариационного принципа следует, что наименьшее собственное значение $-\Omega_0{}^2$ равно [6]

$$-\Omega_0{}^2=\min\frac{\langle\varphi|L_1|\varphi\rangle}{\langle\varphi|L_0{}^{-1}|\varphi\rangle} \qquad (\langle\varphi|A_0\rangle=0) \tag{5}$$

При $\langle\varphi|A_0\rangle=0$ величина $\langle\varphi|L_0{}^{-1}|\varphi\rangle$ положительна, поэтому достаточно исследовать условный минимум функционала $G=\langle\varphi|L_1|\varphi\rangle$. Если $\min G<0$, то существуют экспоненциально растущие возмущения и E_0 неустойчиво, если $\min G\geqslant 0$, то все Ω чисто мнимые или равны 0 и E_0 есть устойчивое решение. В работе [3] было показано, что абсолютный минимум G отрицателен, и на этом основании сделан вывод о неустойчивости E_0. Однако отрицательность абсолютного минимума G есть необходимое, а не достаточное условие существования экспоненциально растущих возмущений. Ниже показано, что условный минимум G равен нулю и тем самым доказана устойчивость E_0 относительно малых возмущений амплитуды и фазы.

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, можно получить уравнение для функции ψ, минимизирующей функционал G

$$L_1\psi=\lambda\psi+\alpha A_0 \tag{6}$$

где λ и α —константы, определяемые из условий ортогональности и нормировки

$$\langle\psi \mid A_0\rangle = 0 \ \langle\psi \mid \psi\rangle = 1, \ \min G = \min \lambda$$

Разлагая ψ и A_0 по полной ортонормированной системе собственных функций L_1 ($L_1\psi_n = \lambda_n\psi_n$) и подставляя эти разложения в (6), получим

$$\psi = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda}\psi_n, \qquad (c_n = \langle\psi_n | A_0\rangle)$$

Условие $\langle A_0 \mid \psi\rangle = 0$ приводит к уравнению для определения λ

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda} = 0 \tag{7}$$

Проведенный на ЭВМ анализ спектра оператора L_1 показал, что L_1 имеет одно отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -5.44\gamma$, второе собственное значение $\lambda_2 = 0$, причем соответствующие собственные функции ортогональны к A_0. Для доказательства продифференцируем (2) по параметру γ

$$L_0 \frac{\partial A_0}{\partial\gamma} + A_0 - 2A_0^2 \frac{\partial A_0}{\partial\gamma} = L_1 \frac{\partial A_0}{\partial\gamma} + A_0 = 0$$

или

$$L_1 \partial A_0 / \partial\gamma = -A_0 \tag{8}$$

Умножая (8) слева на собственные функции L_1, соответствующие $\lambda_2 = 0$, получим

$$-\langle\psi_2 | A_0\rangle = \left\langle \psi_2 \mid L_1 \mid \frac{\partial A_0}{\partial\gamma}\right\rangle = \left\langle L_1\psi_2 \mid \frac{\partial A_0}{\partial\gamma}\right\rangle = 0$$

Отсюда следует, что $c_1 = \langle\psi_2 \mid A_0\rangle = 0$. Отметим, что $c_1 \neq 0$, так как ψ_1 как основная функция оператора L_1 не имеет нулей и не может быть ортогональной к A_0, которая также нигде в нуль не обращается. Таким образом, наименьшее λ_0 в уравнении (7) лежит между λ_1 и $\lambda_3 > 0$. Для определения знака λ_0 достаточно определить $f(0)$, поскольку в интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ $f(\lambda)$ монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$. При $f(0) > 0$ $\lambda_0 < 0$, при $f(0) \leqslant 0$ $\lambda_0 \geqslant 0$.

Из (7) и (8) следует, что

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n} = \langle A_0 \mid L_1^{-1} \mid A_0\rangle = -\left\langle A_0 \mid \frac{\partial A_0}{\partial\gamma}\right\rangle = -\frac{1}{2}\frac{dI}{d\gamma}$$

где $I = \langle A_0 \mid A_0\rangle$ — энергия основной моды.

Решение уравнения (2) можно записать в виде

$$A_0 = \sqrt{\gamma}\varphi_0(\sqrt{\gamma}r)$$

поэтому

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} A_0^2 r dr = 2\pi \int_0^{\infty} \varphi_0^2(\rho)\rho d\rho$$

не зависит от γ и $dI/d\gamma = 0$. Следовательно, $f(0) = 0$ и условный минимум $G = 0$. Таким образом все значения Ω задачи (3) чисто мнимые или равны нулю. Анализ системы (3), проведенный на ЭВМ, также показал отсутствие решений при вещественных $\Omega \neq 0$. Из этого можно сделать вывод, что в линейном по возмущению приближении основная мода E_0 устойчива.

Аналогичные рассуждения можно провести для одномерного и трехмерного уравнения (2) и показать, что устойчивость основной моды также определяется знаком производной ее энергии по параметру γ. В одномерном случае основная мода имеет вид

$$A_0 = \sqrt{2\gamma}/\mathrm{ch}(\sqrt{\gamma}x)$$

поэтому ее энергия равна

$$I = \langle A_0 | A_0\rangle = \int_0^{\infty} \frac{2\gamma dx}{\mathrm{ch}^2(\sqrt{\gamma}x)} = 4\sqrt{\gamma}$$

$$dI/d\gamma = 2/\sqrt{\gamma} > 0$$

Следовательно, условный минимум $G \geqslant 0$ и одномерная основная мода в кубичной среде устойчива. В трехмерном случае основную моду можно представить в виде

$$A_0 = \sqrt{\gamma}\ \psi_0(\sqrt{\gamma}\ r), \qquad I = 4\pi \int_0^\infty A_0^2 r^2 dr = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \int_0^\infty \psi_0^2(\rho)\rho^2 d\rho$$

Так как

$$\frac{dI}{d\gamma} = -\frac{2\pi}{\gamma^{3/2}} \int_0^\infty \psi_0^2(\rho)\rho^2 d\rho < 0$$

то основная мода со сферической симметрией в кубичной безынерционной среде неустойчива. Вычисления, проведенные на ЭВМ, показали, что в случае сферической симметрии система (3) при $\Omega = 5.9\,\gamma$ имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=0} = \left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0} = 0, \qquad u(\infty) = v(\infty) = 0$$

Автор благодарен Г. В. Скроцкому за полезное обсуждение и В. Я. Ершову и Е. Д. Пуховой за помощь в проведении вычислений на ЭВМ.

Поступила 3 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалов В. И., Таланов В. И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях. Письма ЖЭТФ, 1966, т. 3, вып. 12.
2. Brueckner K. A., Jorna S. Linearized theory of laser-induced instabilities in liquids and gases. Phys. Rev., 1967, vol. 164, No. 1.
3. Захаров В. Е., О неустойчивости самофокусировки света. ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 5.
4. Карпман В. И., Крушкаль Е. М. О модулированных волнах в нелинейных диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 2.
5. Янкаускас З. К. Радиальные распределения поля в самосфокусировавшемся пучке света. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, вып. 2.
6. Bocheneck J. On some properties of eigenvalues and eigenfunctions of certain differential equations of the fourth order. Ann. Pol. Math., 1971, vol 24, No. 2.

УДК 536.46 + 662.311

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРЕНИЯ ПРИ СЖИГАНИИ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ

Л. К. Гусаченко

(Томск)

Для установок с конической поверхностью горения излагается метод получения прогноза устойчивости с использованием частотных характеристик системы подачи топлива или конструкции центрального стержня. Эти характеристики предлагается находить экспериментально без сжигания топлива.

Известны схемы, в которых регулирование газоприхода от твердого топлива достигается изменением его поверхности [1–4]. Для этого в топливо помещается тонкий (по сравнению с радиусом R камеры) стержень, конструкция которого обеспечивает распространение пламени вдоль него со скоростью v_1, превышающей нормальную скорость горения v. При этом поверхность топлива становится конической с вершиной в конце